Є. В. Карнаух

"ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ"

Навчальний посібник

Дніпро
2023

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Є. В. Карнаух

"ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ"

Навчальний посібник

Дніпро
2023

УДК 519.216.1
К24

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Михайлова Т.Ф.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Ткаченко М.Є.

К24 Карнаух, Є. В. "Теорія випадкових процесів": навч. посіб. 2-ге видання, виправлене та доповнене. Д.: Ліра, 2023. 300 с.

Викладено основи теорії випадкових процесів. Основна увага приділена стохастичному аналізу та стохастичному численню.

Для студентів механіко-математичного факультету ДНУ спеціальності 112 "Статистика".

Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара протокол № від ..2023 року

Навчальне видання

Євген Володимирович Карнаух

"Теорія випадкових процесів"

Навчальний посібник

Видання 2-ге, перероблене та доповнене

Друкується за авторською редакцією.

Підписано до друку ..23. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 18,75. Тираж 25 пр.

Зам. №
Друкарня ПП «Ліра ЛТД», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру серія ДК №6042 від 26.02.2018р.

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник містить матеріал лекцій та практичних занять з теорії випадкових процесів та теорії випадкових процесів II, які викладалися для здобувачів вищої освіти спеціальності 112 Статистка IV курсу першого (бакалаврського) та I курсу другого (магістерського) рівнів на механіко-математичному факультеті Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара протягом 2015-2022 рр. Обсяг матеріалу розрахований на 5 годин занять на тиждень річного курсу.

Посібник сформований з метою зібрати в одному місці матеріал, який розміщений у різноманітних джерелах (див. список використаної літератури[1], а також підрядкові бібліографічні посилання), у систематизованому вигляді з урахуванням структури робочої програми дисципліни "Теорія випадкових процесів", її передумов, а також дисциплін, що базуються на її основі. Зокрема, враховано що передумовою вивчення дисципліни є ґрунтовне засвоєння матеріалу курсів теорії ймовірностей, математичних основ теорії ймовірностей, ланцюгів Маркова та теорії міри і інтеграла Лебега. Для повноти викладення, а також з навчальною метою часткового повторення і, можливо, засвоєння на більш глибокому рівні, частина відповідних фактів з детальним доведенням розміщена у окремому розділі посібника "Додаткові відомості". Крім того, включено детальний розгляд окремих прикладів, що мають застосування в теорії масового обслуговування, теорії ризику та стохастичній фінансовій математиці. Відповідно матеріал є достатньо неоднорідний за рівнем абстрактності, проте надає можливість вказати на зв'язки між теоретичними результатами та застосуваннями на практиці.

Дане видання є переробленою версією першого видання 2018 р. По-перше, зроблено спробу усунути значну кількість виявлених помилок та неточностей, внесені редакційні правки. По-друге, зроблені окремі зміни у послідовності викладення матеріалу, додані додаткові пояснення і ілюстрації, приклади та вправи. По-третє, в посібник добавлений розгляд застосування окремих методів статистичного моделювання, в першу чергу, метод статистичних випробувань (Монте-Карло). Метод моделювання є важливим методом розв'язання значної кількості різних практичних задач і заслуговує на окреме вивчення (в рамках окремого курсу статистичного моделювання). У посібнику цей метод застосовано більше як спосіб наочної демонстрації встановлених теоретичних властивостей. Реалізація відповідних алгоритмів здійснена на мові R, як найбільш знайомій для студентів спеціальності 112 Статистика. Частина рисунків, отриманих в наслідок виконання коду в середовищі R, додатково була відредагована програмними засобами Inscape та Scribus для їх більшої ілюстративності.

[1] Для більш поглибленого ознайомлення із сучасною теорією випадкових процесів рекомендується використання підручника "Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування" / Ю.С. Мішура, К.В. Ральченко, Г.М. Шевченко. 2-ге вид., випр. і допов. К.: ВПЦ "Київський університет", 2021.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

ℓ	міра Лебега
$\{E, \mathcal{E}, \nu\}$	простір з мірою
$\mathscr{L}(E)$	множина усіх підмножин множини E
$C_{[0,\infty)}$	множина дійсних неперервних на $[0,\infty)$ функцій
$*$	символ згортки
$\#$	рахуюча міра
$\bar{\mathcal{F}}$	поповнена σ-алгебра
$\bar{A}$	доповнення множини A
$\delta(\mathcal{K})$	d-система, породжена класом $\mathcal{K}$
$\delta_x(A)$	міра Дірака - атомарна міра з єдиним атомом в точці x
$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$	фільтрація
$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$	імовірнісний простір
$\{E, \mathcal{E}\}$	вимірний простір
$\{N_t, t \geq 0\}$	процес Пуассона
$\{W_t, t \geq 0\}$	процес Вінера
$\Longrightarrow$	символ збіжності в основному
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множини натуральних, цілих, дійсних та компексних чисел
$\mathcal{B}(E)$	σ-алгебра борелевих множин на просторі E
$\mathcal{F}^X$	σ-алгебра, породжена випадковим елементом X
$\mathcal{K}$	деякий клас множин
$\mathcal{T}$	топологія
$\mathbb{1}_A$	індикатор множини A
$\mathrm{cl}(A)$	замикання множини A

cov	символ коваріації
$\operatorname{int}(A)$	внутрішність множини A
$\mathscr{B}$	база деякої топології
D	символ дисперсії
E	символ математичного сподівання
P_X	розподіл випадкового елемента X
$\mu(\mathcal{K})$	монотонний клас, породжений класом $\mathcal{K}$
$\stackrel{L_2}{\to}$	символ збіжності в середньому квадратичному
$\stackrel{Law}{\to}$	символ збіжності за розподілом
$\stackrel{P}{\to}$	символ збіжності за ймовірністю
$\stackrel{w}{\to}$	символ слабкої збіжності
∂A	границя множини A
π_I^J	канонічна проекція
$\sigma(\mathcal{K})$	σ-алгебра, породжена класом $\mathcal{K}$
$\varpi_D(f,\delta)$	модуль неперервності функції f на множині D
$A\Delta B$	симетрична різниця множин A та B
$Beta(\alpha,\beta)$	бета-розподіл
$Binomial(n,p)$	біномний розподіл
$Cauchy(a)$	розподіл Коші
$Cyl_{t_1,\ldots,t_n}(B)$	вимірний циліндр з основою B та осями $t_1,\ldots,t_n$
$d(\cdot,\cdot)$	метрика
$D_{[0,T]}$	множина функцій на $[0,T]$ неперервних справа та зі скінченними границями зліва
E^A	простір функцій, заданих на множині A зі значеннями в множині E

E^{∞}	множина послідовностей, елементи яких належать множині E
$E^c = E \cup \{\infty\}$	одноточкове компактне розширення простору
$E^n = E \times \ldots \times E$	множина n-вимірних векторів, елементи яких належать множині E
$Erlang\,(n, \lambda)$	розподіл Ерланга
$Exp(\lambda)$	експоненційний розподіл з середнім $1/\lambda$
f^+	$\max\{f, 0\}$
f^-	$-\min\{f, 0\}$
$Gamma\,(\theta, \beta)$	гамма-розподіл
$Multinomial\,(n; (p_1, \ldots, p_n))$	поліноміальний розподіл
$N(a, \sigma^2)$	нормальний розподіл з середнім a та дисперсією σ^2
$Pois(\lambda)$	розподіл Пуассона з середнім λ
$Unif[a, b]$	рівномірний розподіл на $[a, b]$
$VAR_p\,(f)_t$	повна варіація функції f на $[0, t]$
$var_p\,(f)_t$	варіація функції f на $[0, t]$ вздовж послідовного розбиття
$x \vee y$	максимум між числами x та y
$x \wedge y$	мінімум між числами x та y
cadlag	функції без розривів II роду і неперервні справа
caglad	функції без розривів II роду і неперервні зліва
в с.кв.	в середньому квадратичному
в.в.	випадкова величина
в.п.	випадковий процес
в.ф.	випадкова функція
м.н.	майже напевно
м.у.	майже усюди

1. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Стохастичний аналіз[2] – розділ теорії в.п., у якому для в.ф. розглядають задачі аналогічні до задач аналізу детермінованих функцій. Найчастіше цей аналіз передбачає дослідження питань збіжності, неперервності, диференційовності, інтегровності (у відповідному сенсі) та вимірності, а також їх практичного застосування.

1.1. Поняття випадкового процесу

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – повний імовірнісний простір, T – параметрична множина, $\{E_t, \mathcal{E}_t\}_{t\in T}$ – сім'я вимірних просторів.

Визначення. Функцію $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ задану на декартовому добутку $T \times \Omega$ називають випадковою (в просторі $\times_{t\in T} E_t$), якщо

$$\forall t \in T, B \in \mathcal{E}_t : \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Якщо $\forall t \in T$: $\{E_t, \mathcal{E}_t\} = \{E, \mathcal{E}\}$, то $\{E, \mathcal{E}\}$ називають *фазовим* простором в.ф.

Переважно будемо розглядати числові фазові простори. В цьому випадку в.ф. можна розглядати як сім'ю в.в. зі значеннями в множині дійсних або комплексних чисел.

Визначення. Нехай $X = \{X_t, t \in T\}$ – в.ф., тоді

- $\forall \omega \in \Omega$ функцію $X_t(\omega)$ називають *реалізацією* або *траєкторією*,
- $\forall t \in T$ випадковий елемент $X_t(\omega)$ називають *перерізом*.

Відповідно у стохастичному аналізі розглядають властивості траєкторій функцій, з урахуванням того, що перерізи цих функцій випадкові.

Вправа 1.1. Нехай $\xi = \xi(\omega)$ – деяка в.в. задана на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ і має дискретний розподіл

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Визначимо відображення $X_t = X_t(\omega) = t^{\xi(\omega)}$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Показати, що $X = \{X_t, t \geq 0\}$ визначає в.ф., описати її траєкторії та перерізи.

Визначення. В.ф. називають в.п., якщо $T \subset \mathbb{R}$ та випадковим полем, якщо $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.[3]

[2]Відмітимо, що в англомовній літературі розділ "stochastic calculus" позв'язують з теорію стохастичних диференційних рівнянь.

[3]В багатьох джерелах в.п. визначають в ширшому сенсі як в.ф. При цьому термін випадкове поле вживають лише щоб підкреслити багатовимірність параметричної множини.

Для в.п. аргумент t зазвичай інтерпретують як параметр часу, тоді говорять, що $\{X_t, t \geq 0\}$ визначає динаміку деякого показника. Наприклад, динаміку вартості деякого активу на фінансовому ринку або кількості речовини, отримуваної внаслідок хімічної реакції. Випадкові поля можуть слугувати як моделі, що описують стохастичні явища як в просторовій так і в часовій шкалі. Наприклад, попит на певну продукцію в різних регіонах або масу планктону в товщі деякої водойми.

В.ф. X визначена з точністю до її розподілу $\mathsf{P}_X = \mathsf{P} \circ X^{-1}$ – імовірнісної міри на просторі функцій з відповідною σ-алгеброю циліндричних множин $\{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t\}$. В.ф. вважаємо заданою, якщо заданий розподіл на $\{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t\}$. При цьому як $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ можемо взяти простір $\{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t\}$, і тоді в.ф. визначена як $X_.(\omega) = \omega(\cdot)$, а $\mathsf{P} = \mathsf{P}_X$. Відправною точкою для побудови міри на просторі функцій, а значить і аналізу в.ф., є скінченновимірні розподіли – ймовірнісні міри:

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mathsf{P}\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\},$$

де $t_i \in T$, $B_i \in \mathcal{E}_{t_i}$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вправа 1.2. Показати, що достатньо задати $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ на множинах виду

$$B_1 \times \ldots \times B_n, B_i \in \mathcal{E}_{t_i}, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N},$$

для того, щоб говорити, що однозначно задані ймовірнісні міри на $\{\times_{i=1}^n E_{t_i}, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_{t_i}\}$.

Приклад (процес з дискретною множиною значень). Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \{[0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell\}$. Визначимо в.ф. для $t \in [0,1]$ як

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t \leq \omega, \\ 0, & t > \omega. \end{cases}$$

Зобразимо траєкторії для ξ (див. рис. 1.1.) та знайдемо одно- та двовимірні розподіли.

Нехай $t \in [0,1]$ та $B \in \mathcal{B}[0,1]$, тоді безпосередньо за означенням ξ_t та міри P для одновимірного розподілу отримаємо таке подання

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_t(B) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \in B\} = \\ = \mathsf{P}(\{\omega \geq t : \xi_t(\omega) \in B\} \cup \{\omega < t : \xi_t(\omega) \in B\}) = \\ = \mathsf{P}\{\omega \geq t : 1 \in B\} \cup \{\omega < t : 0 \in B\} = \\ = \ell([t,1))\,\mathbb{1}_B(1) + \ell([0,t))\,\mathbb{1}_B(0) = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin B, \\ t, & 0 \in B, 1 \notin B \\ 1-t, & 1 \in B, 0 \notin B \\ 1, & 0,1 \in B. \end{cases}\end{aligned}$$

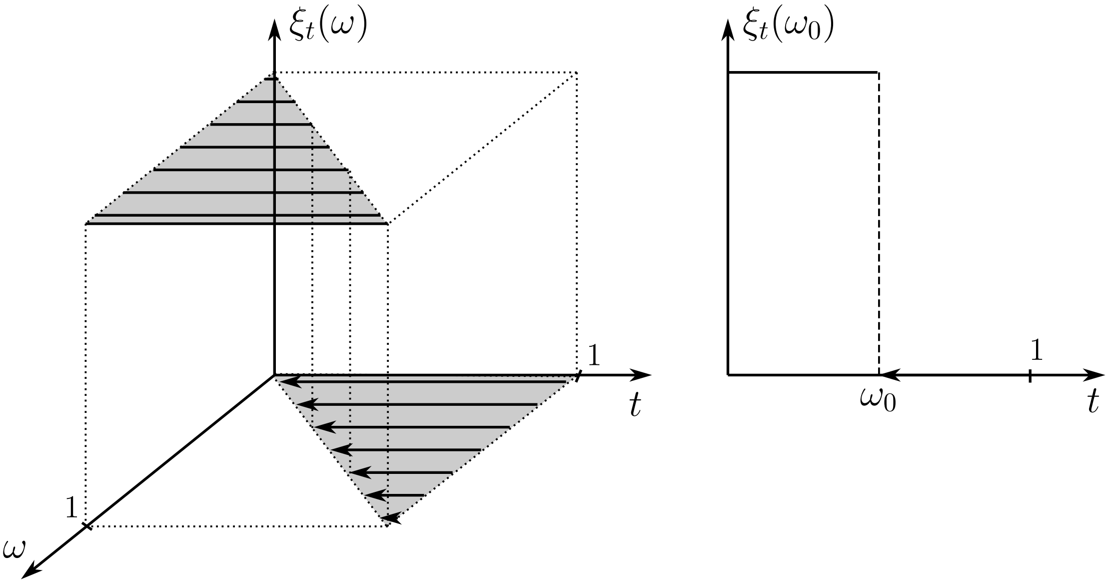


Рис. 1.1. Траєкторії $\xi_t(\omega)$

Іншими словами, одновимірні розподіли даної в.ф. є дискретними розподілами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.

Аналогічно, двовимірні розподіли, як розподіли випадкового вектора (ξ_{t_1}, ξ_{t_2}), $t_1, t_2 \in [0,1]$, також є дискретними, тому достатньо їх задати на множинах виду $B_1 \times B_2$, де $B_i = \{0\}$ або $\{1\}$:

$$\mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{0\} \times \{0\}) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : \xi_{t_1}(\omega) = 0, \xi_{t_2}(\omega) = 0\} = \\ = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : \omega < t_1, \omega < t_2\} = \ell([0,t_1) \cap [0,t_2)) = \ell([0, t_1 \wedge t_2)) = t_1 \wedge t_2,$$

$$\mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{0\} \times \{1\}) = \ell([0,t_1) \cap [t_2,1]) = \begin{cases} 0, & t_1 \le t_2, \\ t_1 - t_2, & t_1 > t_2, \end{cases}$$

$$\mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{1\} \times \{0\}) = \ell([t_1,1] \cap [0,t_2)) = \begin{cases} t_2 - t_1, & t_1 \le t_2, \\ 0, & t_1 > t_2, \end{cases}$$

$$\mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{1\} \times \{1\}) = \ell([t_1,1] \cap [t_2,1]) = 1 - t_1 \vee t_2.$$

З отриманих співвідношень маємо $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$:

$$\mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{0\} \times \{0\}) = \mathsf{P}_{t_2,t_1}(\{0\} \times \{0\}), \mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{1\} \times \{1\}) = \mathsf{P}_{t_2,t_1}(\{1\} \times \{1\}), \\ \mathsf{P}_{t_1,t_2}(\{0\} \times \{1\}) = \mathsf{P}_{t_2,t_1}(\{1\} \times \{0\}),$$

що цілком є передбачуваним з огляду на означення скінченновимірних розподілів (має місце властивість інваріантності за перестановками). Відповідно, достатньо задати P_{t_1,t_2} лише для випадку $t_1 < t_2$, тоді завжди визначений P_{t_2,t_1} як

$$\mathsf{P}_{t_2,t_1}(B_2 \times B_1) = \mathsf{P}_{t_1,t_2}(B_1 \times B_2)$$

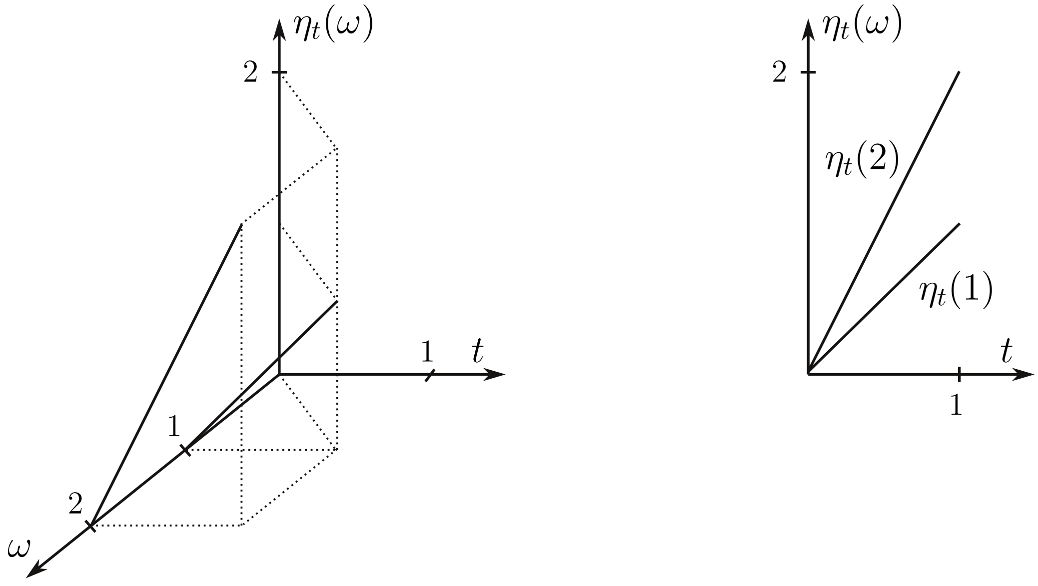


Рис. 1.2. Траєкторії $\eta_t(\omega)$

Відмітимо, якщо $t_1 = t_2$, то двовимірний розподіл визначений одновимірним:

$$\mathsf{P}_{t_1,t_1}(B_1 \times B_2) = \mathsf{P}_{t_1}(B_1 \cap B_2).$$

Отже, двовимірні розподіли P_{t_1,t_2}, $0 \le t_1 < t_2 \le 1$, є дискретними розподілами на $[0,1] \times [0,1]$ виду

$\xi_{t_1} \setminus \xi_{t_2}$	0	1
0	t_1	0
1	$t_2 - t_1$	$1 - t_2$

.

Приклад (процес на дискретному просторі)**.** Нехай $\Omega = \{1,2\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}\}$, $\mathsf{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ та $\mathsf{P}(\{2\}) = \frac{1}{2}$. Визначимо в.ф. для $t \in [0,1]$ як

$$\eta_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega = 1, \\ 2t, & \omega = 2. \end{cases}$$

Побудуємо траєкторії (див. рис. 1.2.) та знайдемо скінченновимірні розподіли.

Враховуючи означення η_t, скінченновимірні розподіли можемо задати лише на одноточкових множинах:

$$\mathsf{P}_t(\{t\}) = \mathsf{P}\{\eta_t \in \{t\}\} = \mathsf{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}, \mathsf{P}_t(\{2t\}) = \frac{1}{2}$$

та

$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(\{t_1\} \times \dots \times \{t_n\}) = \frac{1}{2}, \mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(\{2t_1\} \times \dots \times \{2t_n\}) = \frac{1}{2}.$$

Тобто, скіченновимірні розподіли $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ є дискретними на $[0,2]^n$ з двома рівноймовірними атомами $(t_1, \dots, t_n)$ та $(2t_1, \dots, 2t_n)$.

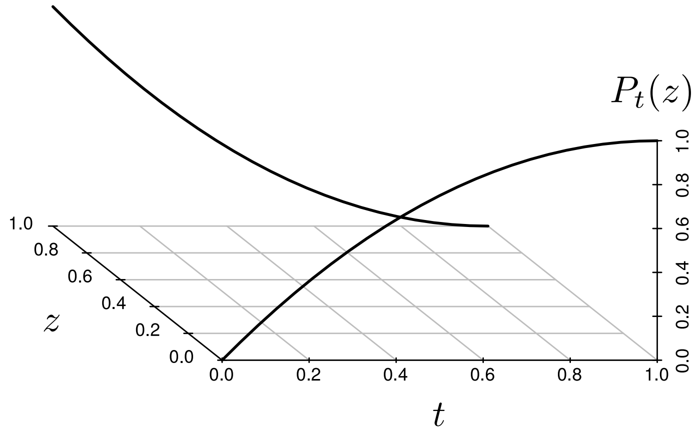


Рис. 1.3. Одновимірні розподіли X_t

Приклад (процес чекання настання події)**.** Нехай в.в. τ зі значеннями на $[0, 1]$ має неперервну функцію розподілу F, $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ – в.ф. визначена як

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}(\omega).$$

Визначимо скінченновимірні розподіли X_t.

Для довільних $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq 1$ в.в. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ можуть набувати лише значення 0 або 1, крім того, якщо для деякого $i = \overline{1, m}$: $X_{t_i} = 1$, то м.н. $\forall j > i : X_{t_j} = 1$. Тому спільний розподіл $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ зосереджений в точках

$$z_0 = (1, \ldots, 1), z_1 = (0, 1, \ldots, 1), \ldots, z_{m-1} = (0, \ldots, 0, 1)$$

та

$$z_m = (0, \ldots, 0).$$

Те, що $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}) = z_j$, $j = \overline{1, m-1}$, означає, що $X_{t_j} = 0$ та $X_{t_{j+1}} = 1$, тобто, що $\tau \in (t_j, t_{j+1}]$. Значить,

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_m}(z_j) = \mathsf{P}\{t_j < \tau \leq t_{j+1}\} = F(t_j) - F(t_{j-1}), j = \overline{1, m-1},$$

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_m}(z_m) = 1 - F(t_m)$$

та

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_m}(z_0) = F(t_1).$$

Приклад (статистичне моделювання. Метод Монте-Карло)**.** Припустимо, що в попередньому прикладі $\tau \sim Beta(a, b)$, тобто, що щільність цього моменту

$$f(s) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} s^{(a-1)}(1-s)^{(b-1)}, s \in [0, 1], a, b > 0.$$

Тоді одновимірний розподіл в.ф. X_t має вигляд (для випадку $a = 1$, $b = 2$ див. рис. 1.3. та алгоритм 1).

Алгоритм 1 Побудова одновимірного розподілу X_t з $a = 1, b = 2$

```
require(scatterplot3d)
a <- 1; b <- 2;
t1 <- seq(0, 1, length = 25)
prob <- pbeta(t1, a, b)
dat0 <- data.frame(t = t1, z = 0, Ptz = prob)
dat1 <- data.frame(t = t1, z = 1, Ptz = 1-prob)
plt <- scatterplot3d(dat, type = "l", grid = TRUE,
       ylim = c(0,1), box = F, lwd = 2, angle = 125)
plt$points3d(dat1, type = "l", lwd = 2)
```

$$P_t(z) = \mathsf{P}\{X_t = z\} = \begin{cases} \int_0^t f(s)\,ds, & z = 1, \\ \int_t^1 f(s)\,ds, & z = 0, \\ 0, & z \neq 0, 1. \end{cases}$$

Зокрема, $\mathsf{E}X_t = \int_0^t f(s)\,ds$, де значення інтегралу за фіксованих значень параметрів можна знайти за допомогою чисельних процедур. Розглянемо одну з них, що має назву простий метод Монте Карло (crude Monte Carlo method). За цією процедурою для пошуку невідомої величини θ подаємо її як математичне сподівання деякої в.в. ξ: $\theta = \mathsf{E}\xi$. Якщо $\left\{\xi_i, i = \overline{1, n}\right\}$ – незалежні реалізації ξ, тоді як оцінку для θ візьмемо

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Якщо $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$, то, спираючись на ЦГТ, за достатньо великого n маємо[4] такий довірчий інтервал з рівнем довіри $1 - \alpha$

$$\left(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}}\right),$$

де z_α – нижній α-квантиль стандартного нормального розподілу: $\mathsf{P}\{\zeta < z_\alpha\} = \alpha$, $\zeta \sim N(0, 1)$, та $\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \hat{\theta}\right)^2$. Оскільки в даному прикладі θ визначає ймовірність події $\{\tau \leq t\}$, то довірчий інтервал можна переписати як

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

[4]За великих значень $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ може знадобитись дуже велике n. В цьому випадку варто застосувати методи зменшення дисперсії (див., наприклад, Розділ 3 в *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие для студ. вузов. М.: Издательский центр "Академия", 2006).

Алгоритм 2 Розрахунок 95% довірчого інтервалу для $\mathsf{P}\left\{X_{1/2}=1\right\}$ за методом Монте Карло

```
set.seed(112)
N<-1000;a<-1;b<-2;
tau<-rbeta(N,a,b)
p_hat<-mean(tau<=1/2)
z_a<-qnorm(1-0.05/2)
p_CI<-p_hat+c(-1,1)*z_a*sqrt(p_hat*(1-p_hat)/N)
plot(0, xlim =c(0.7,0.8),
    axes = FALSE,ylab="",xlab="")
segments(p_CI[1],0,p_CI[2],0,lwd=3)
points(pbeta(1/2,a,b),0,lwd=3)
text(p_CI,c(0.15,0.15),round(p_CI,2))
text(pbeta(1/2,a,b),0.15,round(pbeta(1/2,a,b),2))
```

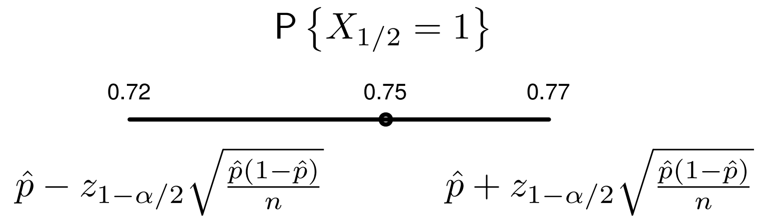


Рис. 1.4. Довірчий інтервал для $\mathsf{P}\left\{X_{1/2}=1\right\}$

де $\hat{p}=\#\left\{i:\tau_i\le t\right\}$, а $\left\{\tau_i, i=\overline{1,n}\right\}$ – вибірка з розподілу $Beta\left(a,b\right)$[5] (див. рис. 1.4. та алгоритм 2).

Вправа 1.3. Застосовуючи нижній α-квантиль розподілу Колмогорова, побудувати довірчу зону для $\mathsf{P}\left\{X_t=1\right\}, t\in[0,1]$, для процесу визначеного в попередньому прикладі.

Основні класи процесів

В залежності від властивостей розподілів виділяють такі класи в.п.:

1. *Процеси з незалежними значеннями.* Процес $\left\{\xi_t, t\in T\right\}$ називають процесом з незалежними значеннями, якщо $\forall t_i\in T$, $B_i\in\mathcal{E}$, $i=\overline{1,n}$:

$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}\left(B_1\times\ldots\times B_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}_{t_i}\left(B_i\right).$$

З практичної точки зору реалізації таких процесів є занадто нерегулярні, і тому розглядають їх переважно для дискретного часу.

2. *Процеси з незалежними приростами.* Процес $\left\{\xi_t, t\in T\right\}$ називають процесом з незалежними приростами, якщо $\forall t_0<t_1<\dots<t_n\in T$ в.в. ξ_{t_0},

[5] Зауважимо, що якщо частота $\hat{p}$ вийшла рівною 0, то довірчий інтервал за цією формулою матиме вигляд $(0,0)$. Імовірність такої події дорівнює $\left(1-p\right)^n$, тоді з нерівності $\left(1-p\right)^n\le\alpha$ маємо $p\le 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$ або, застосовуючи лінійне наближення $1-\alpha^{\frac{1}{n}}=1-e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}\approx-\frac{\ln\alpha}{n}$, отримаємо більш відповідний довірчий інтервал виду $\left(0,-\frac{\ln\alpha}{n}\right)$.

$\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ незалежні. Тобто, $\forall A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{t_0} \in A_0, \xi_{t_1} - \xi_{t_0} \in A_1, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} \in A_n\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{\xi_{t_0} \in A_0\right\} \times \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left\{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}} \in A_i\right\}.$$

Базовими прикладами таких процесів є

а) випадкове блукання $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, де $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}\}$ – процес з незалежними однаково розподіленими значеннями;

б) процес Пуассона $\{N_t, t \geq 0\}$ з інтенсивністю $\lambda > 0$ – процес з незалежними пуассоново розподіленими приростами, $\Delta N_t = N_{t+\Delta t} - N_t \sim Pois(\lambda \Delta t)$, $\Delta t > 0$;

в) процес Вінера $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес з незалежними нормально розподіленими приростами, $\Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$.

Вправа 1.4. Довести, що сума двох незалежних процесів з незалежними приростами також має незалежні прирости.

3. *Квадратично інтегровні процеси* (процеси II порядку або процеси простору L_2). Процес $\{\xi_t, t \in T\}$ називають процесом II порядку, якщо

$$\mathsf{E}\left|\xi_t\right|^2 < \infty, \forall t \in T.$$

Основними характеристиками процесів II порядку є функція середніх

$$m_t = \mathsf{E}\xi_t$$

та коваріаційна функція

$$\gamma_{s,t} = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \mathsf{E}(\xi_s - m_s)\overline{(\xi_t - m_t)}.$$

Виділяють такі підкласи:

а) процеси Гаусса: $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ вектор $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ має нормальний розподіл. Відмітимо, що функція середніх та коваріаційна функція однозначно задають розподіл процесу Гаусса;

б) процеси з некорельованими приростами (з незалежними приростами у широкому сенсі):

$$\forall t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in T, \operatorname{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0.$$

Якщо додатково $\mathsf{E}\xi_t = 0$, то такі процеси називають процесами з ортогональними приростами. Квадратично інтегровний процес з незалежними приростами завжди є процесом з некорельованими приростами, зворотнє включення можемо гарантувати для процесів Гаусса;

в) стаціонарні процеси (у широкому сенсі): $\forall t, s \in T,\ t+h, s+h \in T$ маємо

$$m_{t+h} = m_t$$

та

$$\gamma_{s+h,t+h} = \gamma_{s,t}.$$

4. *Стаціонарні процеси* (у вузькому сенсі). Процес $\{\xi_t, t \in T\}$ називають стаціонарним процесом у вузькому сенсі, якщо скінченно вимірні розподіли процесу інваріантні по зсуву часу: $\forall n \in \mathbb{N},\ t_i, t_i + h \in T,\ B_i \in \mathcal{E}$, $i = \overline{1,n}$:

$$\mathsf{P}_{t_1+h,\ldots,t_n+h}\left(B_1 \times \ldots \times B_n\right) = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}\left(B_1 \times \ldots \times B_n\right).$$

Відмітимо, що процеси II порядку стаціонарні у вузькому сенсі також стаціонарні і у широкому сенсі, зворотнє твердження має місце для процесів Гаусса. Процеси, які мають стаціонарні у вузькому сенсі прирости називають однорідними. Однорідні процеси з траєкторіями без розривів II роду та незалежними приростами називають процесами Леві.

5. *Марковські процеси.* Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ задана сім'я вкладених σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \le t \in T,$$

поповнених за мірою P (повна фільтрація). Процес $\{\xi_t, t \in T\}$ називають марковським, якщо $\forall t \in T$, ξ_t є $\mathcal{F}_t$-вимірним (узгоджений з фільтрацією) та $\forall A \in \sigma\left\{\xi_t, t \ge s\right\}$ м.н.

$$\mathsf{P}\left(A|\mathcal{F}_s\right) = \mathsf{P}\left(A|\xi_s\right).$$

Завдання 1. *Нехай $\{\xi_t, t \ge 0\}$ – дійсний в.п. з незалежними приростами. Показати, що $\forall 0 \le t_1 < \ldots < t_n$:*

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{t_n} \in B|\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_{t_n} \in B|\xi_{t_{n-1}}\right\}.$$

Тобто, що цей процес має марківську властивість.

6. *Мартингали.* Нехай повна фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ неперервна справа:

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s.$$

Процес $\{\xi_t, t \in T\}$ називають мартингалом, якщо

1. $\forall t \in T$: $\mathsf{E}\left|\xi_t\right| < \infty$;
2. $\forall t \in T$: ξ_t є $\mathcal{F}_t$-вимірним;
3. $\forall s \le t \in T$: $\mathsf{E}\left(\xi_t|\mathcal{F}_s\right) = \xi_s$.

Якщо в умові 3) знак рівності замінити на знак $\geq$, то маємо означення субмартингала, якщо ж на знак $\leq$, то – супермартингала.

Завдання 2. *Нехай* $\{\xi_t, t \geq 0\}$ *– дійсний в.п. з незалежними приростами та* $\mathsf{E}|\xi_t| < \infty$. *Показати, що* $\{\xi_t - \mathsf{E}\xi_t, t \geq 0\}$ *є мартингал відносно* $\cap_{s>t}\sigma\{\xi_u, u \leq s\}$.

З означень класів в.п. випливає, що для того щоб задати процес з незалежними значеннями достатньо задати лише одновимірні розподіли. А для процесу з незалежними приростами достатньо задати розподіл ξ_0 та розподіл приросту $\xi_t - \xi_s$. Це твердження можна уточнити.

Теорема 1.1 (про існування процесу з незалежними приростами за заданого розподілу приросту)**.** *Для того, щоб існував в.п. з незалежними приростами* $\{\xi_t, t \geq 0\}$ *необхідно і достатньо, щоб х.ф. приростів*

$$\phi_{st}(\alpha) = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_s)}$$

для довільних $0 \leq s < u < t < \infty$ *задовольняли умові*

$$\phi_{st}(\alpha) = \phi_{su}(\alpha)\,\phi_{ut}(\alpha).$$

При цьому розподіл для ξ_0 *можна обрати довільний.*

Доведення. Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – процес з незалежними приростами, тоді для довільних $0 \leq s < u < t < \infty$:

$$\phi_{st}(\alpha) = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_s)} = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t \pm \xi_u - \xi_s)} = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_u)}\mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_u - \xi_s)} = \phi_{su}(\alpha)\,\phi_{ut}(\alpha).$$

Тобто умова теореми виконана.

Нехай маємо деяку х.ф. $\phi_0(\alpha)$ та сім'ю х.ф. $\{\phi_{st}(\alpha), 0 \leq s < t\}$, для яких виконана умова $\phi_{st}(\alpha) = \phi_{su}(\alpha)\,\phi_{ut}(\alpha)$. Довизначимо $\phi_{00}(\alpha) = 1$ і для $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ задамо скінченно вимірні розподіли $\mathsf{P}_{t_0,\ldots,t_n}$ своїми х.ф.

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{\imath\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k}\mathsf{P}_{t_0,\ldots,t_n}(dx_0, \ldots, dx_n),$$

які визначені як

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \phi_0(\alpha_0 + \ldots + \alpha_n)\,\phi_{0t_0}(\alpha_0 + \cdots + \alpha_n) \times \\ \times \phi_{t_0t_1}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \times \cdots \times \phi_{t_{n-1}t_n}(\alpha_n).$$

Зокрема, $\varphi_t(\alpha) = \phi_0(\alpha)\,\phi_{0t}(\alpha)$, $t \geq 0$. Зауважимо що це означення коректне, оскільки добуток х.ф. визначає х.ф. випадкового вектора з незалежними компонентами. Покажемо, що так визначена сім'я розподілів узгоджена. Для цього достатньо показати, що

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_i,\ldots,t_n}(\alpha_0, \ldots, 0, \ldots, \alpha_n) = \varphi_{t_0,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Зазначена рівність безпосередньо випливає з означення х.ф. $\varphi_{t_0,\dots,t_n}$ та ϕ_{st}:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{t_0,\dots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\dots,t_n}(\alpha_0,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n) = \\
&\qquad = \phi_0(\alpha_0+\dots+\alpha_{i-1}+0+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\times \\
&\qquad \times \phi_{0t_0}(\alpha_0+\dots+\alpha_{i-1}+0+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\times\dots\times \\
&\qquad \times \phi_{t_{i-1}t_i}(0+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\,\phi_{t_it_{i+1}}(\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\dots\phi_{t_{n-1}t_n}(\alpha_n) = \\
&\qquad = \phi_0(\alpha_0+\dots+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\times\dots\times\phi_{t_{i-1}t_{i+1}}(\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_n)\times \\
&\qquad \times\dots\phi_{t_{n-1}t_n}(\alpha_n) = \varphi_{t_0,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n}(\alpha_0,\dots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n).
\end{aligned}$$

Тоді за теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір існує в.п. $\{\xi_t, t\ge 0\}$ зі скінченновимірними розподілами $\mathsf{P}_{t_0,\dots,t_n}$. Більш того, для х.ф. приростів маємо

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}e^{\imath\alpha\left(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\right)} = \mathsf{E}e^{\imath\left(\alpha\xi_{t_i}-\alpha\xi_{t_{i-1}}\right)} = \varphi_{t_{i-1}t_i}(-\alpha,\alpha) = \\
&\qquad = \phi_0(-\alpha+\alpha)\,\phi_{0t_{i-1}}(-\alpha+\alpha)\,\phi_{t_{i-1}t_i}(\alpha) = \phi_{t_{i-1}t_i}(\alpha),
\end{aligned}$$

тобто х.ф. $\phi_{st}(\alpha)$ визначають х.ф. для $\xi_t-\xi_s$, якщо $s<t$. Отже, залишилось показати, що прирости цього процесу є незалежними, а для цього достатньо показати, що х.ф. вектора $\left(\xi_{t_0},\xi_{t_1}-\xi_{t_0},\dots,\xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}}\right)$ дорівнює добутку х.ф. компонент. Дійсно,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}e^{\imath\alpha_0\xi_{t_0}+\imath\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(\xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}}\right)} = \mathsf{E}e^{\imath\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\xi_{t_k}+\imath\alpha_n\xi_{t_n}} = \\
&\qquad = \phi_0(\alpha_0)\,\phi_{0t_0}(\alpha_0)\,\phi_{t_0t_1}(\alpha_1)\times\dots\times\phi_{t_{n-1}t_n}(\alpha_n) = \\
&\qquad\qquad = \mathsf{E}e^{i\alpha_0\xi_{t_0}}\prod_{k=1}^n\mathsf{E}e^{i\alpha_k\left(\xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}}\right)}.
\end{aligned}$$

□

З даної теореми безпосередньо випливає, що існують процеси з незалежними приростами, прирости яких мають х.ф.

$$\phi_{st}(\alpha) = e^{\lambda(t-s)(e^{\imath\alpha}-1)}, 0\le s<t, \lambda>0.$$

Тобто, з пуассоново розподіленими приростами з параметром $\lambda(t-s)$.

Вправа 1.5. 1. Довести, що не існує процесу з незалежними приростами, для якого $\xi_0\sim U[-1,1]$, а $\xi_1\sim Erlang(\lambda,2)$.

2. Довести, що існує однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi_t, t>0\}$ такий, що ξ_t має розподіл Коші.

Завдання 3. *Показати, що існує однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi_t, t>0\}$ із заданою сім'єю одновимірних розподілів $\{\mathsf{P}_t, t>0\}$ на $\mathbb{R}$, для яких маємо $\mathsf{P}_{t+s}=\mathsf{P}_t*\mathsf{P}_s$, $t,s>0$. Визначити скінченновимірні розподіли для ξ.*

1.2. Стохастична еквівалентність

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – повний імовірнісний простір, T – деяка параметрична множина, $\{E_t, \mathcal{E}_t\}_{t\in T}$ – сім'я польських просторів. За теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір скінченновимірні розподіли задають розподіл в.ф., а значить, і саму в.ф. Проте ці розподіли взагалі-то не визначають властивості її траєкторій.

Завдання 4. *Припустимо, що $T = \mathbb{R}$ і одновимірні розподіли визначені як*

$$\mathsf{P}_t\left(\{0\}\right) = 1, t \in T.$$

Побудувати приклади ймовірнісних просторів $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ та в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ із заданими одновимірними розподілами такі, що подія $B = \{\xi_t = 0, \forall t \in T\}$ є

1) невимірна;
2) вимірна та $\mathsf{P}(B) = 1$;
3) вимірна та $\mathsf{P}(B) = 0$.

Один зі способів побудувати в.ф. із заданими скінченновимірними розподілами та траєкторіями з деякого простору – це звузити або перебудувати ймовірнісний простір. Якщо A – деяка множина з $\otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t$: $\mathsf{P}_X(A) = 1$, то можна узяти A як Ω. Проте ця процедура не гарантує, що отримаємо функції з потрібними властивостями. За наслідком про структуру σ-алгебри циліндричних множин подія $\{X_\cdot \in A\}$ повністю визначена послідовністю значень $\{X_{t_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, для деяких $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T$. Проте встановити неперервність, знаючи значення функції на зліченній множині, не вийде. Якщо $F \subset \times_{t\in T} E_t$ та $F \notin \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t$ така, що для будь-якої непорожньої множини $C \in \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t$: $C \cap F \neq \emptyset$ (це має місце зокрема, якщо $\forall t_i \in T$ та $\forall x_i \in E_{t_i}$ існує $y(t) \in F$: $y(t_i) = x_i$), то можна побудувати ймовірнісний простір та в.ф. на ньому зі заданими скінченновимірними розподілами і з траєкторіями в F тоді і тільки тоді, коли зовнішня міра по P_X множини F дорівнює 1[6].

Інший спосіб базується на пошуку в.ф. з тими ж скінченновимірними розподілами, що і початкова функція, проте із заданими властивостями траєкторій. І задача тоді зводиться до визначення умов, за яких така функція (так звана модифікація) існує.

Визначення. В.ф. $X = \{X_t, t \in T\}$ та $Y = \{Y_t, t \in T\}$ (визначені можливо на різних імовірнісних просторах) зі значеннями в $\times_{t\in T} E_t$ називають *еквівалентними* (стохастично еквівалентними у широкому сенсі), якщо на $\otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t$ їх розподіли збігаються: $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$.

[6]Див. детальніше *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. К.: Либідь, 1990. С. 42-44.

Якщо $\forall t \in T : \{E_t, \mathcal{E}_t\} = \{E, \mathcal{E}\}$, тоді за властивістю мір, що збігаються на π-системі (див. завдання 38), рівність $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$ має місце тоді і тільки тоді, коли збігаються скінченновимірні розподіли цих функцій.

На практиці перевірка рівності скінченновимірних розподілів може бути досить складною задачею, тому часто застосовують умову "більш сильної" еквівалентності, перевірка якої в багатьох випадках є більш простою.

Визначення. В.ф. $\{X_t, t \in T\}$ та $\{Y_t, t \in T\}$ визначені на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ зі значеннями в $\times_{t\in T} E_t$ називають *модифікаціями* або *версіями* одна одної (стохастично еквівалентними у вузькому сенсі), якщо

$$\forall t \in T : \mathsf{P}\{X_t \neq Y_t\} = 0.$$

Відмітимо, що у визначенні модифікацій припускаємо, що множина $\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \in \mathcal{F}$. Якщо $\{E_t, \mathcal{E}_t\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, то можна вважати, що дана умова виконана.

Вправа 1.6. Побудувати приклад імовірнісного простору та в.п., для яких

$$\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \notin \mathcal{F}.$$

Приклад (еквівалентні функції з різними властивостями траєкторій)**.** Нехай

$$\Omega = T = [0,1], \mathcal{F} = \bar{\mathcal{B}}[0,1], \mathsf{P} = \ell.$$

Визначимо в.ф. як

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega = t\}} \text{ та } Y_t(\omega) = 0.$$

Зобразимо траєкторії цих функцій (див. рис. 1.5.) та покажемо, що вони еквівалентні у вузькому сенсі.

Дійсно,

$$\forall t \in T : \{\omega : X_t \neq Y_t\} = \{\omega : \omega = t\} = \{t\}$$

та

$$\mathsf{P}(\{t\}) = \ell(\{t\}) = 0.$$

Тобто, маємо еквівалентність, проте функції не мають однакових траєкторій. Для довільного $\omega^* \in \Omega$ в точці $t = \omega^*$:

$$X_t(\omega^*) \neq Y_t(\omega^*),$$

а тому

$$\mathsf{P}\{X_t \neq Y_t, \text{ для деякого } t \in T\} = 1.$$

Відповідно інколи застосовують ще "більш сильну" еквівалентність.

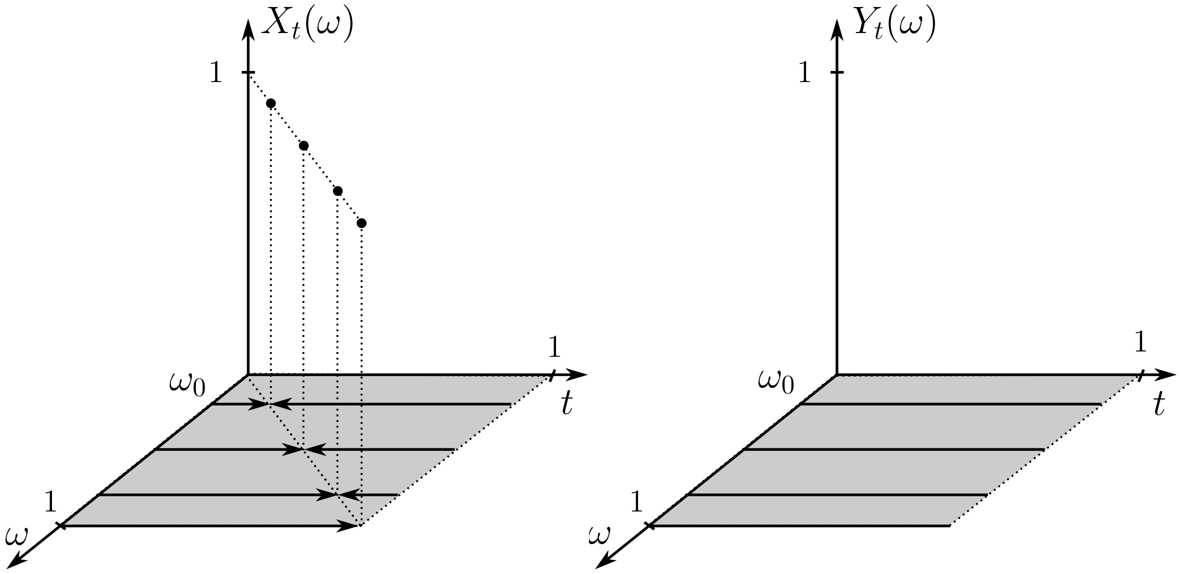


Рис. 1.5. Траєкторії $X_t\,(\omega)$ та $Y_t\,(\omega)$

Визначення. В.ф. $\{X_t, t \in T\}$ та $\{Y_t, t \in T\}$ визначені на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ зі значеннями в $\times_{t\in T} E_t$ називають *нерозрізненними*, якщо м.н. збігаються їх траєкторії:

$$\mathsf{P}\left\{X_t \neq Y_t \text{ для деякого } t \in T\right\} = 0.$$

В даному визначенні неявно припускаємо, що подія $\{X_t \neq Y_t \text{ для деякого } t \in T\}$ є випадковою. Взагалі-то це не так.

Приклад (невимірність нерозрізненності)**.** Нехай $\Omega = [0, 2)$, $T = [0, \infty)$,

$$Z_t\,(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in (1, 2)\,, t = \omega, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

та $\mathcal{F} = \sigma\left\{Z_t, t \geq 0\right\}$. Зобразимо траєкторії цієї функції (див. рис. 1.6.) та покажемо, що подія $\{Z_t = 0, t \geq 0\} = [0, 1] \notin \mathcal{F}$.

Покажемо, що $\mathcal{F}$ можна подати як $\sigma\left\{\{t\}\,, t \in (1, 2)\right\}$. Оскільки Z_t набуває лише двох значень 0 або 1, достатньо розглянути прообрази множин $\{0\}$ та $\{1\}$. Для $t \in [0, 1] \cup [2, \infty)$:

$$Z_t^{-1}\left(\{0\}\right) = [0, 2) \text{ та } Z_t^{-1}\left(\{1\}\right) = \emptyset,$$

а для $t \in (1, 2)$:

$$Z_t^{-1}\left(\{0\}\right) = [0, 2) \backslash \{t\} \text{ та } Z_t^{-1}\left(\{1\}\right) = \{t\}\,.$$

Тобто, дійсно $\mathcal{F} = \sigma\left\{\{t\}\,, t \in (1, 2)\right\}$, проте

$$\{Z_t = 0, t \geq 0\} = [0, 1] \notin \mathcal{F}.$$

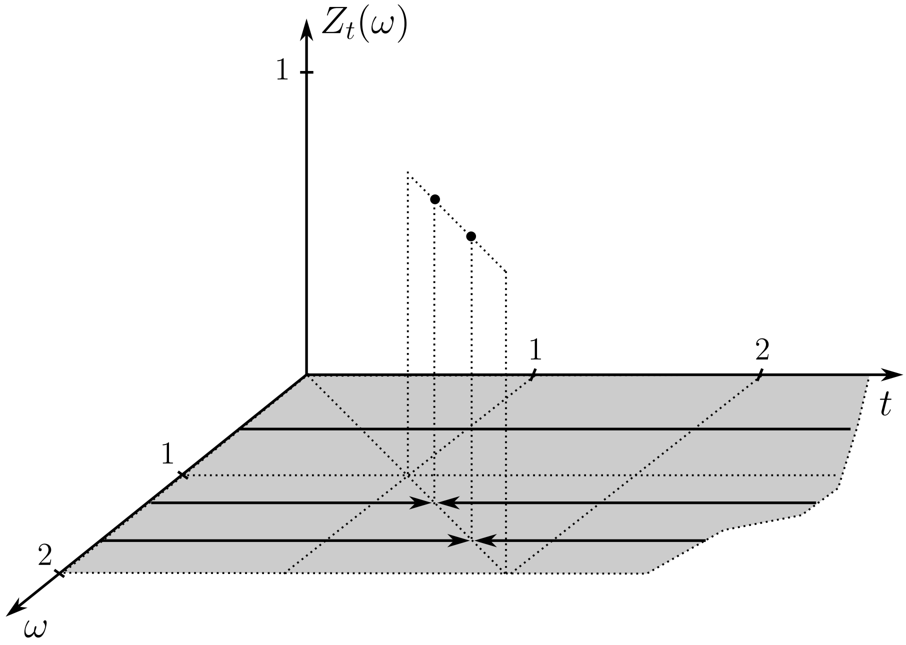


Рис. 1.6. Траєкторії $Z_t\,(\omega)$

Теорема 1.2 (про стохастичну еквівалентність)**.** *1. Нехай імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ повний, тоді з того, що в.ф. X та Y нерозрізненні випливає, що вони є модифікаціями одна одної.*

2. Якщо в.ф. X та Y є модифікаціями одна одної, то вони є еквівалентними.

3. Нехай в.п. X та Y мають траєкторії без розривів II роду і неперервні справа (або зліва) та є модифікаціями один одного, тоді вони нерозрізненні.

Доведення. 1. Має місце таке включення

$$\forall s \in T : \{X_s \neq Y_s\} \subset \{X_t \neq Y_t \text{ для деякого } t \in T\}\,.$$

Тоді з

$$\mathsf{P}\,\{X_t \neq Y_t \text{ для деякого } t \in T\} = 0$$

внаслідок повноти простору $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ одержуємо, що

$$\forall t \in T : \mathsf{P}\,\{X_t \neq Y_t\} = 0,$$

а значить X та Y є модифікаціями одна одної.

2. Позначимо $A_t = \{X_t \neq Y_t\}$, тоді за умовою $\mathsf{P}\,(A_t) = 0$. Оскільки для довільного $B_t \in \mathcal{E}_t : \{X_t \in B_t\} \subset \{Y_t \in B_t\} \cup A_t$, маємо для $t_i \in T$, $B_i \in \mathcal{E}_{t_i}$, $i = \overline{1,n}$:

$$\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\} \subset \{Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n\} \cup A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}.$$

Звідки

$$\mathsf{P}\,\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\} \leq \mathsf{P}\,\{Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n\}\,.$$

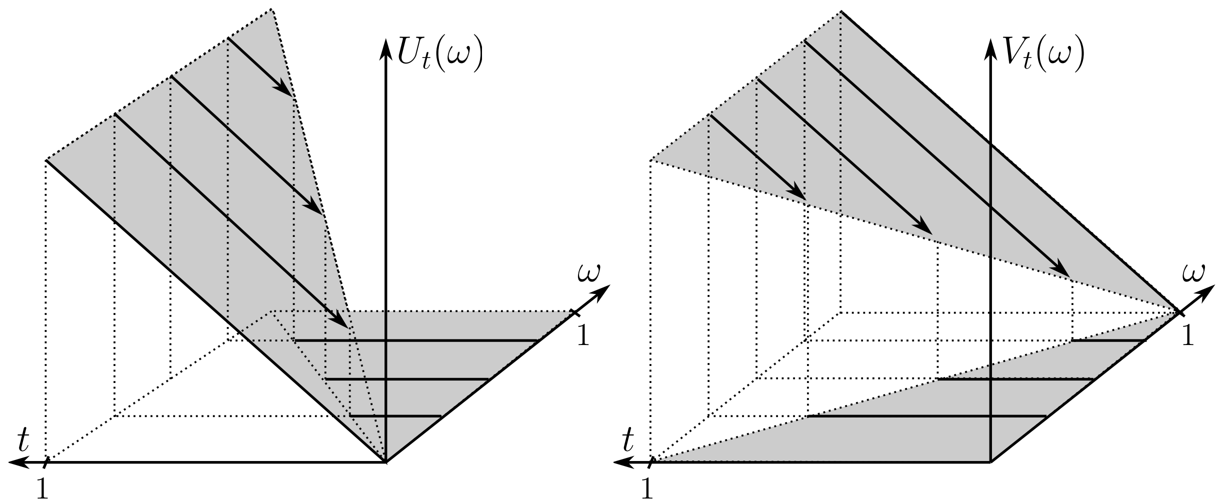


Рис. 1.7. Траєкторії $U_t\,(\omega)$ **та** $V_t\,(\omega)$

Аналогічно,

$$\mathsf{P}\left\{Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n\right\} \leq \mathsf{P}\left\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\right\},$$

тобто скінченновимірні розподіли збігаються.

3. Припустимо, що процеси X та Y мають траєкторії неперервні з однієї сторони (наприклад справа), тоді значення траєкторії в певній точці можна розглядати як границю значень в точках з раціональними координатами. Тоді

$$A = \{X_t = Y_t, t \in T\} = \{X_t = Y_t, t \in T \cap \mathbb{Q}\}.$$

Звідки $A \in \mathcal{F}$ та

$$\mathsf{P}\,(A) = 1 - \mathsf{P}\left\{X_t \neq Y_t \text{ для деякого } t \in T \cap \mathbb{Q}\right\} \geq$$
$$\geq 1 - \sum_{t \in T \cap \mathbb{Q}} \mathsf{P}\left\{X_t \neq Y_t\right\} = 1.$$

□

Приклад (еквівалентні функції, що не є модифікаціями)**.** На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \left\{[0,1]\,, \bar{\mathcal{B}}\,[0,1]\,, \ell\right\}$ визначимо такі в.ф.

$$U_t\,(\omega) = t\mathbb{1}_{\{t \geq \omega\}} \text{ та } V_t\,(\omega) = t\mathbb{1}_{\{1-t \leq \omega\}}, t \in [0,1]\,.$$

Побудуємо траєкторії (див. рис. 1.7.) та покажемо, що U, V еквівалентні, проте не є модифікаціями одна одної.

Для довільних $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ та множин $B_n = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \subset [0,1]^n$ маємо

$$\mathsf{P}\left\{(U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}) \in B_n\right\} = \begin{cases} \mathsf{P}\left\{t_1 \geq \omega, \ldots, t_n \geq \omega\right\}, & (t_1, \ldots, t_n) \in B_n, \\ 0, & (t_1, \ldots, t_n) \notin B_n, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathsf{P}\{\omega \le t_1\}, & (t_1, \dots, t_n) \in B_n, \\ 0, & (t_1, \dots, t_n) \notin B_n, \end{cases} = \begin{cases} t_1, & (t_1, \dots, t_n) \in B_n, \\ 0, & (t_1, \dots, t_n) \notin B_n, \end{cases}$$

та

$$\mathsf{P}\{(V_{t_1}, \dots, V_{t_n}) \in B_n\} = \begin{cases} \mathsf{P}\{1 - t_1 \le \omega\}, & (t_1, \dots, t_n) \in B_n, \\ 0, & (t_1, \dots, t_n) \notin B_n, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} t_1, & (t_1, \dots, t_n) \in B_n, \\ 0, & (t_1, \dots, t_n) \notin B_n. \end{cases}$$

За властивістю мір, збіжних на π-системі, скінченно вимірні розподіли U та V збігаються, проте для $t < 1/2$:

$$\mathsf{P}\{U_t \ne V_t\} = \mathsf{P}(\{\omega \le t\} \Delta \{1 - t \le \omega\}) = 1 - 2t \ne 0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Нехай в.в. ξ має експоненційний розподіл з параметром λ. Для в.п. $X_t = a^\xi t$, $a > 0$, $t \ge 0$, описати траєкторії, визначити одно- та двовимірні розподіли, функцію середніх та коваріаційну функцію.

2. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \{[0,1], \bar{\mathcal{B}}([0,1]), \ell\}$. Описати траєкторії в.п.

$$\xi_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(t) \text{ та } \xi_t^*(\omega) = \mathbb{1}_{\{t_0\}}(t),$$

   а також перевірити їх стохастичну еквівалентність.

3. Показати, що еквівалентні у вузькому сенсі в.п. з дискретним параметром (випадкові послідовності) є нерозрізненними.

4. Нехай ξ, η – незалежні в.в., що мають розподіл $Unif\,[0,1]$. Знайти $\mathsf{P}\{X_t$ монотонно не спадає$\}$, де $X_t = 1 + 2t\eta + \xi^2 t^2, t \ge 0$.

5. Нехай в.в. ξ має експоненційний розподіл з параметром λ. Для в.п. $X_t = \xi a^t$, $a > 0$, $t \ge 0$, визначимо $\tau_x = \inf\{t \ge 0 : \xi_t \ge x\}, x > 0$. Показати, що τ_x є в.в. та знайти $\mathsf{P}\{\tau_x \le t\}$.

1.3. Сепарабельність

В подальшому припускатимемо, що на параметричній множині T задана топологія зі зліченною базою $\mathscr{B}$ (що, зокрема, гарантує сепарабельність T).

Визначення. В.ф. $\{\xi_t, t \in T\}$ називають сепарабельною, якщо існує зліченна усюди щільна множина $T_0 \subset T$ і множина $C \in \mathcal{F}$: $\mathsf{P}(C) = 0$ такі, що для довільних відкритої множини $G \subset T$ і замкненої множини $F \subset E$ маємо

$$\{\xi_t \in F, t \in G\} \Delta \{\xi_t \in F, t \in G \cap T_0\} \subset C.$$

Множину T_0 називають множиною сепарабельності в.ф.

Приклад (вимірність супремума для сепарабельного процесу)**.** Нехай маємо повний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, сепарабельний в.п. $\{\xi_t, t \in [0,T]\}$ в $\mathbb{R}^c$ з множиною сепарабельності $T_0 = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Покажемо, що $\sup_{t\in[0,T]} \xi_t$ є в.в. та мають місце рівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \xi_t \le x\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{t_n\in T_0} \xi_{t_n} \le x\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_{t_1} \le x, \xi_{t_2} \le x, \ldots, \xi_{t_n} \le x\}.$$

Дійсно, оскільки в.п. ξ_t сепарабельний, існує множина $C \in \mathcal{F}$ нульової міри така, що

$$\{\xi_t \le x, t \in (0,T)\} \Delta \{\xi_s \le x, s \in (0,T) \cap T_0\} \subset C.$$

Множина $\{\xi_s \le x, s \in (0,T) \cap T_0\}$ вимірна, а значить внаслідок повноти простору $\{\xi_t \le x, t \in (0,T)\}$ також вимірна. Отже вимірною є

$$\left\{\sup_{t\in[0,T]} \xi_t \le x\right\} = \{\xi_t \le x, t \in (0,T)\} \cap \{\xi_0 \le x\} \cap \{\xi_T \le x\}.$$

Більш того,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T} \xi_t \le x\right\} = \mathsf{P}\{\xi_t \le x, t \in T\} = \mathsf{P}\left(\cap_{t_n\in T_0}\{\xi_{t_n} \le x\}\right) = \mathsf{P}\left\{\sup_{t_n\in T_0} \xi_{t_n} \le x\right\}.$$

Позначимо $T_k = \{t_1, \ldots, t_k\}$, тоді події $\cap_{t_i\in T_k}\{\xi_{t_i} \le x\}$ утворюють незростаючу послідовність і значить,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t_n\in T_0} \xi_{t_n} \le x\right\} = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left(\cap_{t_i\in T_k}\{\xi_{t_i} \le x\}\right).$$

Завдання 5. *Нехай $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра циліндричних множин, поповнена по P, та $\xi_t(\omega) = \omega_t$, $t \in [0,1]$. Показати, що якщо процес ξ_t сепарабельний, то подія, яка полягає в тому, що процес неперервний в точці t_0, є випадковою.*

Лема 1.1 (про альтернативне означення сепарабельності)**.** *Для того, щоб в.ф. $\{\xi_t, t \in T\}$ з компактним фазовим простором була сепарабельною необхідно і достатньо, щоб існувала зліченна множина $T_0 \subset T$ та множина $C \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(C) = 0$ такі, що для довільних $\omega \notin C$, $t \in T$:*

$$\xi_t(\omega) \in \cap_{\textit{відкритих } G: t\in G} \mathrm{cl}\{\xi_s(\omega), s \in G \cap T_0\}.$$

Доведення. Нехай в.ф. ξ_t сепарабельна з множиною сепарабельності T_0. За означенням бази будь-яка відкрита множина $G \subset T$ може бути подана як зліченне об'єднання множин з класу $\mathscr{B}$:

$$G = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i, B_i \in \mathscr{B}.$$

Позначимо

$$A(G,\omega) = \mathrm{cl}\left\{\xi_t(\omega), t \in G\cap T_0\right\}$$

та

$$A(t,\omega) = \cap_{B\in\mathscr{B}:t\in B} A(B,\omega).$$

Сім'я замкнених множин $A(B,\omega)$, $t \in B$, є центрованою, тобто будь-яка скінченна кількість множин цієї сім'ї має спільні точки і в силу компактності E множина $A(t,\omega)$ непорожня. Внаслідок сепарабельності

$$\xi_t(\omega) \in A(t,\omega), \forall t \in T, \omega \notin C, \mathsf{P}(C) = 0.$$

Якщо $\xi_t(\omega) \in F$, $\forall t \in T_0 \cap B$, де F – замкнена підмножина E та $B \in \mathscr{B}$, тоді

$$A(t,\omega) \subset A(B,\omega) \subset F, \forall t \in B,$$

і значить $\xi_t(\omega) \in F$, $\forall t \in B$. Якщо G – довільна відкрита множина в T, то її достатньо подати як $G = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, $B_i \in \mathscr{B}$ для того, щоб пересвідчитись що з

$$\xi_t \in F, \forall t \in G\cap T_0, \omega \notin C$$

випливає $\xi_t \in F, \forall t \in G$. □

З даної леми випливає, що для сепарабельної функції значення від $t \in T$ належить множині часткових границь значень від $s \in T_0$ (м.н. графік траєкторії $\xi_t(\omega)$, $t \in T$, міститься у замиканні графіку $\xi_s(\omega)$, $s \in T_0$), і відповідно висновки щодо значень ξ_t можемо зробити на основі значень ξ_s, $s \in T_0$:

$$\forall \omega \notin C, t \in T, \exists \{s_n\} \subset T_0, s_n \to t : \xi_{s_n}(\omega) \to \xi_t(\omega).$$

Вправа 1.7. Нехай в.ф. $\{\xi_t, t \in T\}$ сепарабельна з множиною сепарабельності T_0 та множиною C: $\mathsf{P}(C) = 0$, $f : E \to E$ – деяка неперервна функція. Показати, що в.ф. $\{f(\xi_t), t \in T\}$ також сепарабельна з тією ж самою множиною сепарабельності T_0 та множиною C.

Вправа 1.8. Показати, що в.ф., яка має для м.у. ω неперервні траєкторії, сепарабельна. Визначити множину T_0 та C.

Приклад (не сепарабельний процес)**.** Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – деякий імовірнісний простір, $\tau \sim Unif[0,1]$ та $\xi_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t=\tau(\omega)\}}$, $t \in [0,1]$. Покажемо, що процес ξ_t не є сепарабельний.

Припустимо, що в.п. $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$ сепарабельний з множиною сепарабельності $T_0 = \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Візьмемо замкнену множину $F = \{0\}$ та відкриту множину $G = (0,1)$, тоді оскільки $\mathsf{P}\{\tau = t_k\} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\mathsf{P}\{\xi_t \in F, \forall t \in T_0 \cap G\} = \mathsf{P}\{\tau \notin T_0 \cap [0,1]\} = 1,$$

проте $\mathsf{P}\{\xi_t \in F, \forall t \in G\} = 0$. А це суперечить тому, що

$$\{\xi_t \in F, t \in G\} \, \Delta \, \{\xi_t \in F, t \in G \cap T_0\}$$

має бути підмножиною множини P міри нуль. Відмітимо, що процес ξ_t має сепарабельну модифікацію $\tilde{\xi}_t = 0$, оскільки $\mathsf{P}\left\{\xi_t \neq \tilde{\xi}_t\right\} = 0$, $t \in [0,1]$, та

$$\left\{\tilde{\xi}_t \in F, t \in G\right\} = \left\{\tilde{\xi}_t \in F, t \in G \cap T_0\right\}.$$

Лема 1.2. *Для довільної $A \in \mathcal{E}$ існує дискретна множина T_0 точок з T таких, що*

$$\mathsf{P}\{\xi_s \in A, s \in T_0, \xi_t \notin A\} = 0, \forall t \in T.$$

Доведення. Побудуємо множину $T_0 = \{t_1, \ldots\}$ таким чином. Нехай t_1 – довільна точка з T, якщо для деякого $k \geq 1$ точки $t_1, \ldots, t_k \in T$ вже вибрані, то позначимо

$$m_k = \sup_{t \in T} \mathsf{P}\{\xi_{t_i} \in A, 1 \leq i \leq k, \xi_t \notin A\}.$$

Послідовність чисел $\{m_k\}$ незростаюча, і якщо $m_k = 0$ для деякого k, то необхідна послідовність вже побудована. Якщо $m_k > 0$, то виберемо t_{k+1} так, щоб

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{t_i} \in A, 1 \leq i \leq k, \xi_{t_{k+1}} \notin A\right\} \geq \frac{m_k}{2}.$$

Оскільки множини

$$L_k = \left\{\xi_{t_i} \in A, 1 \leq i \leq k, \xi_{t_{k+1}} \notin A\right\}, k \geq 1,$$

не мають спільних точок, то

$$1 \geq \sum_k \mathsf{P}(L_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k.$$

Звідки, $m_k \to 0$, $k \to \infty$, і таким чином,

$$\mathsf{P}\{\xi_{t_k} \in A, k \geq 1, \xi_t \notin A\} \leq \lim_{k \to \infty} m_k = 0.$$

□

Лема 1.3. *Нехай $\mathcal{Q}_0$ – зліченний клас множин з $\mathcal{E}$, а $\mathcal{Q}$ – клас перетинів усіх можливих послідовностей множин з $\mathcal{Q}_0$, тоді існує дискретна множина $T_0 \subset T$ та $\forall t \in T$ $\exists C_t \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(C_t) = 0$ такі, що*

$$\{\xi_s \in D, s \in T_0, \xi_t \notin D\} \subset C_t, \forall D \in \mathcal{Q}.$$

Доведення. Для довільного $A \in \mathcal{Q}_0$ побудуємо множину точок $T_0(A)$ з T, визначену в попередній лемі, і нехай $T_0 = \cup_{A \in \mathcal{Q}_0} T_0(A)$. Для довільного $t \in T$ множина

$$C_t = \cup_{A \in \mathcal{Q}_0} \{\xi_s \in A, s \in T_0, \xi_t \notin A\}$$

вимірна та за попередньою лемою $\mathsf{P}(C_t) = 0$. Якщо $D \in \mathcal{Q}$ та $D \subset A \in \mathcal{Q}_0$, тоді

$$\{\xi_s \in D, s \in T_0, \xi_t \notin A\} \subset \{\xi_s \in A, s \in T_0, \xi_t \notin A\} \subset C_t.$$

Якщо $D = \cap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ для $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{Q}_0$, то отримаємо включення

$$\{\xi_s \in D, s \in T_0, \xi_t \notin D\} \subset \cup_{k \in \mathbb{N}} \{\xi_s \in D, s \in T_0, \xi_t \notin A_k\} \subset C_t.$$

□

Теорема 1.3 (Дуба про сепарабельну модифікацію)**.** *Довільна в.ф. з компактним фазовим простором та параметричною множиною зі зліченною базою має сепарабельну модифікацію.*

Доведення. Нехай E_0 – зліченна усюди щільна множина в E, а $\mathcal{Q}_0$ – клас доповнень до відкритих куль раціональних радіусів з центрами в точках з E_0. Тоді $\mathcal{Q}$, клас можливих перетинів множин з $\mathcal{Q}_0$, містить усі замкнені множини. Розглянемо $\xi_t, t \in B \in \mathscr{B}$, за попередньою лемою існує зліченна множина $T_0(B)$ і $C_t(B) \in \mathcal{F}$: $\mathsf{P}(C_t(B)) = 0$ такі, що для будь-якого $D \in \mathcal{Q}$:

$$\{\xi_s \in D, s \in T_0(B), \xi_t \notin D\} \subset C_t(B).$$

Нехай $T_0 = \cup_{B \in \mathscr{B}} T_0(B)$ та $C_t = \cup_{B \in \mathscr{B}} C_t(B)$, тоді для довільної замкненої $F \subset E$ та $B \in \mathscr{B}$:

$$\{\xi_s \in F, s \in T_0 \cap B, \xi_t \notin F\} \subset C_t, \forall t \in B.$$

Визначимо в.ф. $\tilde{\xi}_t$ так

$$\tilde{\xi}_t(\omega) = \begin{cases} \xi_t(\omega), & t \in T_0 \text{ або } \omega \notin C_t, \\ \text{будь-який елемент з } A(t,\omega), & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Оскільки $\xi_t = \tilde{\xi}_t$ для довільного $t \in T_0$, множини $A(t,\omega)$ побудовані за допомогою ξ_t та $\tilde{\xi}_t$ збігаються. За означенням $\tilde{\xi}_t$ маємо, що $\tilde{\xi}_t \in A(t,\omega)$, $\forall t, \omega$, тобто $\tilde{\xi}$ – сепарабельна функція. Крім того, оскільки

$$\left\{\xi_t \neq \tilde{\xi}_t\right\} \subset C_t, \forall t \in T,$$

$\tilde{\xi}$ визначає шукану модифікацію. □

Зауважимо, що цю теорему можна узагальнити на в.ф. в сепарабельних локально компактних просторах[7], зокрема, для дійсних процесів (при цьому необхідно припускати, що модифікація може набувати значення нескінченність). Тобто, умова сепарабельності не задає істотних обмежень на скінченновимірні розподіли в.ф.

Завдання 6. *Нехай* $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{B}}([0,1])$, $\mathsf{P} = \ell$,

$$\xi_t = \frac{1}{t-\omega}\mathbb{1}_{\{t \neq \omega\}}, t \in [0,1].$$

Показати, що ξ_t *не є сепарабельним на* $\mathbb{R}$, *проте*

$$\tilde{\xi}_t = \frac{1}{t-\omega}\mathbb{1}_{\{t \neq \omega\}} + \infty \mathbb{1}_{\{t = \omega\}}, t \in [0,1],$$

визначає сепарабельну модифікацію на $\mathbb{R}^c$.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай маємо повний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ та сепарабельний дійсний в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$. Показати, що $\inf_{t \in I \cap T} \xi_t$, $\overline{\lim}_{t \to t_0} \xi_t$ та $\underline{\lim}_{t \to t_0} \xi_t$ є в.в., де I – деякий відкритий інтервал, $t_0 \in T$.

2. Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – деякий дійсний сепарабельний в.п. Показати, що подія $\{\xi_t$ рівномірно неперервний на $T\}$ є випадковою. Чи можемо при цьому опустити умову повноти $\mathcal{F}$?

3. Нехай $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ – борелева σ-алгебра на $[0,1]$, P – міра Лебега, $\tau_k(\omega)$ – незалежні рівномірно розподілені на $[0,1]$ в.в. та $\xi_t = \mathbb{1}_{\{\exists k : t = \tau_k(\omega)\}}$, $t \in [0,1]$. Показати, що процес ξ_t не є сепарабельний.

4. Нехай в.п. $\{\xi_t, t \in [0,T]\}$ для м.у. ω має неперервні справа траєкторії. Показати, що він є сепарабельний, визначити множину T_0 та C. Проаналізувати випадок, коли траєкторії неперервні або зліва, або справа.

5. Побудувати сепарабельний дійсний в.п. $\{\xi_t, t \geq 0\}$, який для м.у. ω має не неперервні траєкторії, проте для довільного фіксованого $t \geq 0$:
$$\mathsf{P}\left\{\omega : \lim_{s \to t} \xi_s(\omega) = \xi_t(\omega)\right\} = 1.$$

6. Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – деякий дійсний в.п. Припустимо, що існує множина $T_0 = \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset T$ та подія C нульової ймовірності такі, що $\forall \omega \notin C$ та відкритого інтервалу I маємо $\sup_{t \in I \cap T} \xi_t = \sup_{s \in I \cap T_0} \xi_s$ та $\inf_{t \in I \cap T} \xi_t = \inf_{s \in I \cap T_0} \xi_s$. Показати, що тоді для довільного замкненого інтервалу F маємо $\{\xi_t \in F, t \in I \cap T\} \Delta \{\xi_s \in F, s \in I \cap T_0\} \subset C$.

[7]Див., наприклад, Теорема IV.2.2 в *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

1.4. Стохастична неперервність

Визначення. Нехай d – метрика, що породжує топологію в E, T – деякий метричний простір, тоді в.ф. $\{\xi_t, t \in T\}$ називають *стохастично неперервною* (неперервною за ймовірністю), якщо для довільних $\varepsilon > 0$ та $t \in T$ маємо

$$\mathsf{P}\{d(\xi_t, \xi_s) > \varepsilon\} \to 0, s \to t.$$

Вправа 1.9. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$. Показати, що він є стохастично неперервний.

Завдання 7. *Нехай $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – вимірна зростаюча неперервна в нулі функція така, що*

- $g(0) = 0$,
- $g(x) > 0, x > 0$,
- $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$.

Показати, що $g_1(x) = \frac{x}{1+x}$ та $g_2(x) = \min\{x, 1\}$ задовольняють зазначені умови. Показати, що

$$\rho(X, Y) = \mathsf{E}g(|X - Y|)$$

на множині в.в. на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ задає метрику (рівність в.в. визначена з точністю до P міри 0). Показати, що збіжність в цій метриці еквівалентна збіжності за ймовірністю.

Вправа 1.10. Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – в.п. з незалежними значеннями, причому $\forall t \in T$ в.в. ξ_t має функцію розподілу G. Показати, що процес не є стохастично неперервний.

Вправа 1.11. Підібрати приклад в.п. стохастично неперервного, але не неперервного з імовірністю 1.

Теорема 1.4 (про множину сепарабельності стохастично неперервного процесу)**.** *Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – сепарабельна стохастично неперервна функція, тоді будь-яка зліченна усюди щільна множина $T_* \subset T$ може бути множиною сепарабельності для ξ.*

Доведення. Нехай $T_0 = \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset T$ – відповідна множина сепарабельності для ξ. Визначимо множину

$$\{s_{k,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset T_* : s_{k,m} \to t_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Внаслідок стохастичної неперервності $\xi_{s_{k,m}} \to \xi_{t_k}$ за ймовірністю, а значить існує підпослідовність $\xi_{s_{k,m_n}} \to \xi_{t_k}$ м.н. Позначимо

$$C = \cup_{k \in \mathbb{N}} \left\{\xi_{s_{k,m_n}} \not\to \xi_{t_k}\right\},$$

тоді $\mathsf{P}(C) = 0$, а отже для довільних $\omega \notin C$ та $t \in T$ в.в. $\xi_t(\omega)$ належить до множини часткових границь для ξ_s, $s \in T_*$. $\square$

З подання

$$\mathsf{P}\left\{d\left(\xi_t,\xi_s\right)>\varepsilon\right\}=\int_{(x,y):d(x,y)>\varepsilon}\mathsf{P}\left\{\xi_t\in dx,\xi_s\in dy\right\}$$

випливає, що стохастична неперервність є властивістю двовимірних розподілів.

Теорема 1.5 (про зв'язок між збіжністю за ймовірністю та збіжністю двовимірних розподілів)**.** *В.ф. ξ_t при $t\to t_0\in T$ збігається за ймовірністю тоді і тільки тоді, коли двовимірний розподіл $\mathsf{P}_{s,t}$ слабко збігається при $t,s\to t_0$.*

Доведення. Нехай $\xi_t\xrightarrow{P}\xi_0$, $t\to t_0$, тоді вектор $(\xi_s,\xi_t)\xrightarrow{P}(\xi_0,\xi_0)$, $t,s\to t_0$. Зі збіжності за ймовірністю випливає слабка збіжність розподілів $\mathsf{P}_{s,t}$.

Нехай $\mathsf{P}_{s,t}\xrightarrow{w}\mathsf{P}_0$, $s,t\to t_0$, тоді, зокрема, $\mathsf{P}_{t,t}\xrightarrow{w}\mathsf{P}_0$, якщо $t\to t_0$. Оскільки $\mathsf{P}_{t,t}$ зосереджений на $\{(x,y)\in E\times E: x=y\}$, то і P_0 зосереджена на цій множині. Визначимо неперервну та обмежену функцію $f_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{\varepsilon^2}\mathbb{1}_{\{|x|\le\varepsilon\}}+\mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}$, $\varepsilon>0$, тоді з одного боку

$$\mathsf{E}f_\varepsilon\left(d\left(\xi_s,\xi_t\right)\right)=\int\int_{E\times E}f_\varepsilon\left(d\left(x,y\right)\right)\mathsf{P}_{s,t}\left(dx,dy\right)\to$$
$$\to\int\int_{E\times E}f_\varepsilon\left(d\left(x,y\right)\right)\mathsf{P}_0\left(dx,dy\right)=0,$$

де остання рівність випливає з того, що $f_\varepsilon\left(d\left(x,y\right)\right)=0$ на множині, на якій зосереджена міра P_0. А з іншого, враховуючи означення функції f_ε, одержимо що

$$\mathsf{E}f_\varepsilon\left(d\left(\xi_s,\xi_t\right)\right)=\int_{\{d(\xi_s,\xi_t)>\varepsilon\}}f_\varepsilon\left(d\left(\xi_s,\xi_t\right)\right)\mathsf{P}\left(d\omega\right)+$$
$$+\int_{\{d(\xi_s,\xi_t)\le\varepsilon\}}f_\varepsilon\left(d\left(\xi_s,\xi_t\right)\right)\mathsf{P}\left(d\omega\right)\ge\mathsf{P}\left\{d\left(\xi_s,\xi_t\right)>\varepsilon\right\}.$$

Звідки $d\left(\xi_t,\xi_s\right)\xrightarrow{P}0$, якщо $s,t\to t_0$. □

Визначення. В.ф. $\{\xi_t,t\in T\}$ називають *рівномірно стохастично неперервною* на T, якщо $\forall\varepsilon,\delta>0\ \exists r>0$: для довільної кулі $B_r\subset T$ радіуса r та $\forall t,s\in B_r$ маємо $\mathsf{P}\left\{d\left(\xi_t,\xi_s\right)\ge\varepsilon\right\}\le\delta$.

Теорема 1.6 (про рівномірну стохастичну неперервність на компакті)**.** *Стохастично неперервна в.ф. на компактній множині T є рівномірно стохастично неперервна на T.*

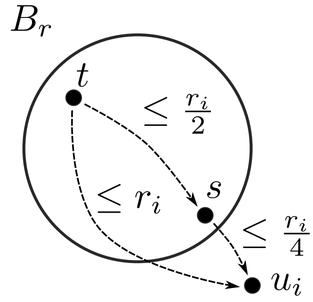


Рис. 1.8. Положення довільних $s, t \in B_r$ відносно центру u_i

Доведення. Зі стохастичної неперервності отримаємо, що $\forall \varepsilon, \delta > 0$ та $\forall u \in T$ існує відкрита куля $B_r(u)$ з центром в точці u радіуса $r = r(u)$ така, що

$$\forall s \in B_r(u) : \mathsf{P}\left\{d(\xi_s, \xi_u) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Тоді $\forall s, t \in B_r(u)$:

$$\mathsf{P}\{d(\xi_s, \xi_t) \geq \varepsilon\} \leq \mathsf{P}\left\{d(\xi_s, \xi_u) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \mathsf{P}\left\{d(\xi_u, \xi_t) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \delta.$$

Множина куль $\left\{B_{\frac{r}{4}}(u)\right\}_{u \in T}$ утворює покриття для T і, оскільки T – компакт, існує скінченне підпокриття $\left\{B_{\frac{r_i}{4}}(u_i)\right\}_{i=1}^{n}$. Для довільної кулі $B_r \subset T$ радіуса $r = \min_{1 \leq i \leq n}\left\{\frac{r_i}{4}\right\}$ та довільного $s \in B_r$:

$$\exists i \leq n : s \in B_{\frac{r_i}{4}}(u_i) \subset B_{r_i}(u_i).$$

Тому $\forall t \in B_r$: $t \in B_{r_i}(u_i)$ (див. рис. 1.8.), а значить $\mathsf{P}\{d(\xi_s, \xi_t) \geq \varepsilon\} \leq \delta$. □

Завдання для самоконтролю

1. Нехай $\{X_t, t \in [a, b]\}$ – стохастично неперервний процес. Довести, що цей процес обмежений за ймовірністю: $\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall t \in [a, b]$: $\mathsf{P}\{|X_t| \geq C\} < \varepsilon$.

2. Показати, дійснний в.п. $\{X_t, t \geq 0\}$ є стохастично неперервний в точці $t > 0$ тоді і тільки тоді, коли $\forall x < y \in \mathbb{R}$ маємо $\mathsf{P}\{X_t \leq x, X_s \geq y\} + \mathsf{P}\{X_t \geq y, X_s \leq x\} \to 0$ за умови $s \to t$.

3. Показати, що дійсний в.п. $\{X_t, t \geq 0\}$ є стохастично неперервний, коли для $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $s_0, t_0 > 0$: $\mathsf{P}\{X_t \leq x, X_s \leq y\} \to \mathsf{P}\{X_{t_0} \leq x, X_{s_0} \leq y\}$ за умови $s \to s_0$, $t \to t_0$.

1.5. Вимірність

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – повний імовірнісний простір, $\{E, \mathcal{E}\}$ – польський простір з відповідною метрикою d, $\{T, \mathcal{B}(T), \nu\}$ – деякий простір з мірою.

Визначення. Відображення $\xi : T \times \Omega \to E$ називають *вимірною* в.ф., якщо відображення є $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірним.

Вправа 1.12. Показати, що в.ф. $\{\xi_t, t \in T\}$ вимірна, якщо T дискретна, а $\mathcal{B}(T)$ містить усі одноточкові множини.

За теоремою про еквівалентне означення в.ф., якщо $\xi_t(\omega)$ – в.ф., то вона є $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірною для кожного $t \in T$. Якщо ж в.ф. вимірна, то внаслідок теореми Фубіні $\xi_t(\omega)$ є $\mathcal{B}(T)/\mathcal{E}$-вимірною м.н. Тобто з імовірністю 1 траєкторії цієї функції є вимірними.

Приклад (невимірний в.п. з вимірними траєкторіями)**.** Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \{[0,1], \mathcal{B}([0,1]), \ell\}$, $T = [0,1]$ та $A \subset [0,1]$ – деяка невимірна множина. Визначимо

$$\xi(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t=\omega\}} \mathbb{1}_{\{\omega \in A\}}.$$

Розглянемо функцію $g : \Omega \to T \times \Omega$, задану як $g(\omega) = (\omega, \omega)$. Припустимо, що ξ – вимірна в.ф., тоді, враховуючи що $g \in \mathcal{F}/\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$, мали б вимірність $\xi \circ g = \mathbb{1}_A$, але це суперечить невимірності A. Проте маємо вимірність за аргументом t: якщо $\omega_0 \in A$, то

$$\{t : \xi(t, \omega_0) = 0\} = T \setminus \{\omega_0\} \in \mathcal{B}(T)$$

та

$$\{t : \xi(t, \omega_0) = 1\} = \{\omega_0\} \in \mathcal{B}(T),$$

якщо ж $\omega_0 \notin A$, то

$$\{t : \xi(t, \omega_0) = 1\} = \emptyset$$

та

$$\{t : \xi(t, \omega_0) = 0\} = T;$$

а також вимірність за аргументом ω: якщо $t \notin A$, $\xi(t, \omega) = 0 \in \mathcal{F}$, якщо ж $t \in A$, $\xi(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega) \in \mathcal{F}$.

Якщо $\{\xi_t, t \in T\}$ – вимірна дійсна в.ф., для якої

$$\int_T \mathsf{E}|\xi_t| \, \nu(dt) < \infty,$$

тоді $\int_T \xi_t \nu(dt)$ є в.в. і для довільної вимірної множини $B \in \mathcal{B}(T)$ маємо, що

$$\int_B \mathsf{E}(\xi_t) \, \nu(dt) = \mathsf{E} \int_B \xi_t \nu(dt).$$

Важливість властивості вимірності демонструє також такий приклад.

Приклад (процес зупинений у випадковий момент)**.** Покажемо, що якщо процес $\{\xi_t, t \geq 0\}$ вимірний та в.в. τ набуває значень на $\mathbb{R}_+$, тоді ξ_τ є в.в.

Запишемо ξ_τ як $\xi \circ g$, де $g(\omega) = (\tau(\omega), \omega)$. Оскільки суперпозиція вимірних відображень є вимірною, достатньо довести, що відображення g є $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-вимірним. Для $C = A \times B$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}$, маємо

$$\{\omega : (\tau(\omega), \omega) \in C\} = \{\omega : \tau(\omega) \in A\} \cap B \in \mathcal{F}.$$

Враховуючи що множини виду $A \times B$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $B \in \mathcal{F}$, породжують $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, встановлюємо вимірність ξ_τ.

Теорема 1.7 (про вимірність стохастично неперервної в.ф.)**.** *Нехай T та E компактні і міра ν скінченна. Якщо для ν-майже усіх t в.ф. $\xi_t(\omega)$ стохастично неперервна, то для неї існує вимірна сепарабельна модифікація.*

Доведення. За теоремою Дуба про сепарабельну модифікацію для ξ існує сепарабельна модифікація з деякою множиною сепарабельності T_0. Теорема про зв'язок між збіжністю за ймовірністю та збіжністю двовимірних розподілів дає стохастичну неперервність цієї модифікації, тому її також позначимо як ξ. Внаслідок компактності T для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує скінченне покриття T відкритими кулями $\{S_{n,k}\}_{k=1}^{l(n)}$ радіуса не більшого за $\frac{1}{n}$. Позначимо

$$B_{n,k} = S_{n,k} \backslash \left(\cup_{j=1}^{k-1} S_{n,j}\right)$$

та виберемо $t_{n,k} \in T_0 \cap B_{n,k}$, $k = \overline{1, l(n)}$. Визначимо

$$\xi_t^n(\omega) = \sum_{k=1}^{l(n)} \xi_{t_{n,k}}(\omega) \mathbb{1}_{B_{n,k}}(t), t \in T, n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ та $G_{n,m}(t) = \mathsf{P}\{d(\xi_t^n, \xi_t^m) > \varepsilon\}$. Для довільного $t \in B_{n,k}$ відстань до $t_{n,k}$ менша за $\frac{1}{n}$ та $\xi_t^n = \xi_{t_{n,k}}$, тобто стохастична неперервність дає $G_{n,m}(t) \to 0$, $n, m \to \infty$.

Позначимо через μ продакт міру $\nu \times \mathsf{P}$ на $T \times \Omega$, тоді $\{\xi_t^n\}$ є послідовністю Коші за мірою μ:

$$\mu\{(t, \omega) : d(\xi_t^n, \xi_t^m) > \varepsilon\} = \int_T G_{n,m}(t) \nu(dt) \to 0, n, m \to \infty.$$

Таким чином, $\{\xi_t^n\}$ є збіжною за мірою μ, і тоді існує збіжна μ-майже усюди підпослідовність до, скажімо, $\tilde{\xi}$. Нехай $C \subset T \times \Omega$ – множина μ міри 0, на якій ця збіжність не має місце, тоді для $(t, \omega) \notin C$:

$$\tilde{\xi}_t(\omega) \in A(t, \omega).$$

Модифікуючи $\tilde{\xi}_t(\omega)$ на C можемо допустити, що це включення має місце для усіх (t,ω). Нехай $C_t = \{\omega : (t,\omega) \in C\}$, $t \in T$ та $D = \{t \in T : \mathsf{P}(C_t) > 0\}$, тоді $\nu(D) = 0$. Визначимо функцію

$$\bar{\xi}_t(\omega) = \begin{cases} \xi_t(\omega), & t \in T_0 \cup D, \\ \tilde{\xi}_t(\omega), & t \notin T_0 \cup D. \end{cases}$$

З її означення випливає сепарабельність і $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірність. Більш того, $\bar{\xi}_t = \xi_t$ для $t \in T_0 \cup D$ та м.н. для $t \notin T_0 \cup D$ (за стохастичною неперервністю). Отже, $\bar{\xi}_t$ – шукана модифікація. □

Відмітимо, що умови теореми можна послабити: достатньо вимагати локальну компактність для E, локальну компактність та сепарабельність для T, а також σ-скінченність міри ν[8].

Приклад (не всі в.ф. мають вимірну модифікацію)**.** Нехай $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$ – сім'я незалежних $Unif\,[-1,1]$ розподілених в.в. Припустимо що ξ має вимірну модифікацію, яку також позначимо через ξ. Визначимо

$$\eta_t(\omega) = \int_0^t \xi_s(\omega)\,ds, t \in [0,1].$$

За припущенням вимірності $\eta_t(\omega)$ є в.ф. з неперервними траєкторіями (вправа). Якщо $\mathsf{P}\{\eta_t \neq 0\} = 0$, $\forall t \in [0,1]$, тоді $\eta_t = 0$ м.н. для усіх раціональних, а значить, внаслідок неперервності, і для всіх $t \in [0,1]$. Але тоді, $\xi_t = 0$ для майже усіх t, а звідси і м.н. для усіх t, що суперечить визначенню ξ. Тобто має існувати $t \in [0,1]$ таке, що $\mathsf{P}\{\eta_t \neq 0\} > 0$, тоді

$$\mathsf{E}\eta_t^2 > 0.$$

Проте,

$$\mathsf{E}\eta_t^2 = \int_\Omega \left(\int_0^t \xi_s(\omega)\,ds\right)^2 \mathsf{P}(d\omega) = \int_\Omega \int_0^t \int_0^t \xi_u(\omega)\,\xi_s(\omega)\,dsdu\mathsf{P}(d\omega) =$$
$$= \int_0^t \int_0^t \int_\Omega \xi_u(\omega)\,\xi_s(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)\,dsdu = \mathsf{E}\xi_1^2 \int_0^t \int_0^t \mathbb{1}_{\{s=u\}}(s)\,dsdu = 0.$$

Отримана суперечність вказує на не можливість побудувати вимірну модифікацію.

Нехай $T = [0,\infty)$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ – потік σ-алгебр, з яким узгоджений дійсний в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$. Можна було б сподіватись, що за умов існування $\int_0^t \xi_s(\omega)\,ds$ є $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-вимірний, проте взагалі-то це не так. Тому інколи виникає необхідність розглядати поняття більш "сильної" вимірності.

[8]Див., например, *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайних процессов. М.: Наука, 1977. С. 227.

Визначення. В.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ називають *прогресивно вимірним*, якщо для довільних $0 \le s \le t$ відображення $\xi_s(\omega)$ є $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t / \mathcal{E}$-вимірним.

Завдання 8. *Показати, що клас*

$$\mathrm{Prog}_\Omega = \{A \subset T \times \Omega : A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_t, \forall t \in T\}$$

утворює σ-алгебру, яку називають прогресивною. Показати, що відображення $X : T \times \Omega \to E$ є прогресивним в.п. тоді і тільки тоді, коли це відображення є $\mathrm{Prog}_\Omega / \mathcal{E}$-вимірне.

Теорема 1.8 (про вимірність прогресивно вимірного процесу)**.** *Якщо в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ прогресивно вимірний, то він є вимірним та узгодженим з фільтрацією.*

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{E}$, тоді

$$\xi^{-1}(B) = \{(s,\omega) \in T \times \Omega : \xi(s,\omega) \in B\} = \\ = \cup_{n=0}^{\infty} \{(s,\omega) \in [0,n] \times \Omega : \xi(s,\omega) \in B\}.$$

Оскільки для довільного $n \ge 0$ за умовою теореми

$$\{(s,\omega) \in [0,n] \times \Omega : \xi(s,\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{[0,n]} \otimes \mathcal{F}_n,$$

отримуємо що $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$. □

Завдання 9. *Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \{[0,1], \mathcal{B}([0,1]), \ell\}$. Показати, що клас множин*

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A) = 0 \text{ або } 1\}$$

утворює σ-алгебру. Визначимо фільтрацію як $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$, $t \ge 0$, і позначимо

$$A = \left\{(t,\omega) \in T \times \Omega : t = \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}.$$

Показати, що $A \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$, проте для будь-якого $t > 0$:

$$A \cap ([0,t] \times \Omega) \notin \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

(тоді б проекція перетину на Ω мала б належати $\mathcal{F}$, що не можливо). А також показати, що $\mathbb{1}_A$ є вимірним та узгодженим в.п., проте не прогресивно вимірним.

Відмітимо, що хоча дійсний вимірний узгоджений з фільтрацію в.п. в загальному випадку не є прогресивно вимірний, проте для нього існує прогресивно вимірна модифікація[9]. Встановимо цей результат за більш сильних обмежень.

[9] Див. Т.42 в *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1977. 324 с.

Теорема 1.9 (прогресивна вимірність стохастично неперервних процесів). *Нехай* $\{\xi_t, t \geq 0\}$ *– дійсний стохастично неперервний узгоджений з фільтрацією* $\{\mathcal{F}_t\}$ *в.п., тоді для нього існує сепарабельна та прогресивно вимірна модифікація.*

Доведення. Згідно з теоремою про рівномірну стохастичну неперервність на компакті в.п. ξ_t рівномірно неперервний на $[0, T]$ для довільного $T \in \mathbb{R}$, і, враховуючи що збіжність за ймовірністю еквівалентна збіжності відносно метрики

$$\rho(\xi, \eta) = \mathsf{E}(|\xi - \eta| \wedge 1),$$

маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \delta_n$: $\forall t, t' \in [0, n]$, $|t - t'| \leq \delta_n$: $\rho(\xi_t, \xi_{t'}) \leq 2^{-n}$. Побудуємо розбиття $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{a_n}^{(n)} = n$ таке, що $\max_{0 \leq j \leq a_n - 1} \left| t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)} \right| \leq \delta_n$ і $\left\{ t_j^{(n+1)} \right\}$ визначає підрозбиття.

Розглянемо процес

$$\xi_n(t) = \xi_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^{a_n} \xi\left(t_{j-1}^{(n)}, \omega\right) \mathbb{1}_{\left[t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right) \times \Omega} + \xi(n, \omega) \mathbb{1}_{[n, \infty) \times \Omega}.$$

Для фіксованого $t > 0$, достатньо великого $n \in \mathbb{N}$ та довільного $0 \leq s \leq t$ внаслідок узгодженості з фільтрацією усі доданки $\xi\left(t_{j-1}^{(n)}, \omega\right) \mathbb{1}_{\left[t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right) \times \Omega}(s, \omega)$ вимірні по ω відносно $\mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}} \subset \mathcal{F}_t$, $j = \overline{1, a_n}$. Тобто, для достатньо великого n відображення $(s, \omega) \to \xi_n(s, \omega)$ є $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-вимірне.

Покажемо, що $\xi_n(t)$ є збіжним м.н. $\forall t \geq 0$. Позначимо через

$$A_n = \left\{ |\xi_n(t) - \xi_{n+1}(t)| \geq n^{-2} \right\},$$

тоді для достатньо великого n з використанням нерівності Чебишева маємо

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}\left\{ 1 \wedge |\xi_n(t) - \xi_{n+1}(t)| \geq n^{-2} \right\} \leq n^2 \rho(\xi_n(t), \xi_{n+1}(t)).$$

Якщо $t < n$, тоді для деяких j та k маємо $t_{j-1}^{(n)} \leq t < t_j^{(n)}$ та $t_{k-1}^{(n+1)} \leq t < t_k^{(n+1)}$, а значить, $\left| t_{j-1}^{(n)} - t_{k-1}^{(n+1)} \right| \leq \delta_n$, звідки

$$\rho(\xi_n(t), \xi_{n+1}(t)) \leq 2^{-n}, \forall t < n.$$

Отже, $\mathsf{P}(A_n) \leq n^2 2^{-n}$ і лема Бореля- Кантеллі дає збіжність м.н. для $\xi_n(t)$.

Визначимо

$$\eta_t(\omega) = \overline{\lim}_{n \to \infty} \xi_n(t, \omega), \omega \in \Omega, t \geq 0.$$

Враховуючи, що η_t є верхньою границею $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-вимірних функцій, одержуємо прогресивну вимірність для η. Для фіксованого t та n достатньо великого $\xi_n(t) = \xi\left(t_{j-1}^{(n)}\right)$ для деякого $j = j(n)$ та $t_{j-1}^{(n)} \le t < t_j^{(n)}$, тоді $t_{j-1}^{(n)} \to t$ і $\xi_n(t) = \xi\left(t_{j-1}^{(n)}\right) \to \xi_t$ за ймовірністю. Враховуючи м.н. збіжність $\xi_n(t)$ та єдиність границі, отримаємо що $\xi_t = \eta_t$ м.н.

Залишилось показати, що $\{\eta_t, t \ge 0\}$ сепарабельний. Визначимо

$$T_0 = \left\{t_j^{(n)}, j = \overline{1, a_n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

тоді за означенням $\eta_t(\omega)$ існує підпослідовність $\left\{t_{j(n_k)-1}^{(n_k)}\right\}$ така, що

$$\xi\left(t_{j(n_k)-1}^{(n_k)}, \omega\right) \to \eta(t, \omega).$$

Більш того, для $s \in T_0$ та достатньо великого n маємо $\xi_n(s) = \xi_s$, а значить $\xi_s = \eta_s$. Звідки $\eta_t \in A(t, \omega)$, і за лемою про альтернативне означення сепарабельності η_t сепарабельний. □

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що процес $\{\xi_t, t \ge 0\}$ є вимірний, якщо він має траєкторії неперервні справа (зліва).

2. Показати, що в.п. з траєкторіями неперервними зліва або неперервними справа не обов'язково є вимірний.

3. Навести приклад в.п. $\{\xi_t, t \in [a, b]\}$ та в.в. τ, для яких ξ_τ не є в.в.

4. Побудувати процес, який би був вимірний, проте не прогресивно вимірний.

5. Нехай $\{\xi_t, t \ge 0\}$ – в.п., узгоджений з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}$, який для м.у. ω має траєкторії неперервні справа. Показати, що процес є прогресивно вимірний.

1.6. Неперервність майже напевно

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – повний імовірнісний простір, $\{E, \mathcal{E}\}$ – польський простір з відповідною метрикою d, $T \subset \mathbb{R}$. Розглянемо за яких умов для в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ зі значеннями в E існує модифікація м.н. неперервна за t.

Для $\delta > 0$ та відображення $f : T \to E$ визначимо модуль неперервності f на $D \subset T$ як

$$\varpi_D(f, \delta) = \sup\left\{d(f_t, f_s), t, s \in D : |t - s| < \delta\right\}.$$

Завдання 10. *Показати, що $\varpi_D(f,\delta)$ не зростає по δ. Нехай D – зліченна усюди щільна в T множина, T – компакт, показати що будь-яке відображення $f : D \to E$ має неперервне довизначення $\tilde{f} : T \to E$ тоді і тільки тоді, коли $\varpi_D(f,\delta) \to 0$ для $\delta \to 0$.*

Теорема 1.10 (про неперервність в термінах модуля неперервності)**.** *Нехай D – зліченна усюди щільна в компактній множині T. Процес $\{\xi_t, t \in T\}$ має неперервну м.н. модифікацію тоді і тільки тоді, коли цей процес стохастично неперервний та $\varpi_D(\xi,\delta) \xrightarrow{P} 0$, $\delta \to 0$.*

Доведення. Припустимо, що $\tilde{\xi}$ визначає м.н. неперервну модифікацію, тоді

$$\forall t \in T : \tilde{\xi}_s \xrightarrow{P1} \tilde{\xi}_t, s \to t,$$

а значить, маємо збіжність і за ймовірністю. Оскільки скінченновимірні розподіли ξ та $\tilde{\xi}$ збігаються, а збіжність за ймовірністю залежить лише від збіжності двовимірних розподілів, маємо що ξ_t стохастично неперервний. Крім того, $\varpi_D\left(\tilde{\xi},\delta\right) \to 0$ м.н. Оскільки м.н. $\tilde{\xi}_t = \xi_t$ для $t \in D$, маємо $\varpi_D(\xi,\delta) \to 0$ м.н. і значить за ймовірністю.

Навпаки, нехай процес ξ стохастично неперервний та $\varpi_D(\xi,\delta) \xrightarrow{P} 0$, $\delta \to 0$. Оскільки $\varpi_D(\xi,\delta)$ монотонно спадає по δ, то $\varpi_D(\xi,\delta) \xrightarrow{P1} 0$, якщо $\delta \to 0$. Для усіх

$$\omega \in \tilde{\Omega} = \{\varpi_D(\xi,\delta) \to 0, \delta \to 0\}$$

позначимо через $\tilde{\xi}$ неперервне довизначення $\xi : D \to E$ на T, для $\omega \notin \tilde{\Omega}$ покладемо $\tilde{\xi}_t(\omega) = 0$, $t \in T$. Тоді траєкторії $\tilde{\xi}$ неперервні для всіх ω. Також $\tilde{\xi}_t = \xi_t$ м.н. для $t \in D$. Для $t \notin D$ виберемо послідовність $\{t_n\} \subset D$: $t_n \to t$, тоді $\tilde{\xi}_{t_n} \to \tilde{\xi}_t$ та $\tilde{\xi}_{t_n} = \xi_{t_n}$ м.н. разом дають, що $\xi_{t_n} \to \tilde{\xi}_t$ м.н. Оскільки $\xi_{t_n} \to \xi_t$ за ймовірністю, то $\xi_t = \tilde{\xi}_t$ м.н. Таким чином, $\tilde{\xi}$ – шукана модифікація. □

Відмітимо що умову, щодо збіжності модуля неперервності до нуля, в багатьох випадках встановити непросто. Більш простою для перевірки є достатня умова Колмогорова.

Теорема 1.11 (про достатню умову Колмогорова неперервності м.н.)**.** *Нехай T – компакт, для довільних $t,s \in T$ та деяких $a,b,c > 0$ в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ задовольняє умову*

$$\mathsf{E}d^a(\xi_t,\xi_s) \le b\,|t-s|^{1+c},$$

тоді ξ_t має неперервну модифікацію.

Доведення. За нерівністю Чебишева та із застосуванням умови теореми одержимо, що

$$\mathsf{P}\{d(\xi_t,\xi_s) \ge \varepsilon\} \le \mathsf{E}d^a(\xi_t,\xi_s)/\varepsilon^a \le b\,|t-s|^{1+c}/\varepsilon^a$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Звідки виводимо стохастичну неперервність ξ_t і за теоремою про неперервність в термінах модуля неперервності достатньо встановити збіжність до нуля модуля неперервності на деякій зліченній та усюди щільній множині в T.

Для простоти позначень припустимо що $T = [0,1]$. Визначимо множину

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n}, k = \overline{0, 2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

та розглянемо $\varpi_D\left(\xi, 2^{-n}\right)$ для $n \in \mathbb{N}$. Якщо $t, s \in T$: $|t-s| < 2^{-n}$, то існує $k \le 2^n$: $\left|t - \frac{k}{2^n}\right| < 2^{-n}$ та $\left|s - \frac{k}{2^n}\right| < 2^{-n}$. Якщо додатково $t \in D$, то t можна подати як

$$t = \frac{k}{2^n} \pm \sum_{j=1}^{m} a_j 2^{-(n+j)},$$

де $a_j = 0$ або 1, $1 \le j \le m$, $m \in \mathbb{N}$. Визначимо

$$Z_n(\omega) = \sup_{0 \le k \le 2^n - 1} d\left(\xi_{\frac{k+1}{2^n}}, \xi_{\frac{k}{2^n}}\right),$$

тоді

$$d\left(\xi_t, \xi_{\frac{k}{2^n}}\right) \le \sum_{j=n+1}^{n+m} Z_j \le \sum_{j=n+1}^{\infty} Z_j.$$

Аналогічно, $d\left(\xi_s, \xi_{\frac{k}{2^n}}\right) \le \sum_{j=n+1}^{\infty} Z_j$. Отже,

$$\varpi_D\left(\xi, 2^{-n}\right) \le 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} Z_j.$$

Виберемо γ так, щоб $0 < \gamma < c/a$, тоді $\beta = c - a\gamma > 0$ та, застосовуючи нерівність отриману на початку доведення, виводимо що

$$\mathsf{P}\left\{Z_n \ge 2^{-n\gamma}\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{0 \le k \le 2^n - 1} d\left(\xi_{\frac{k+1}{2^n}}, \xi_{\frac{k}{2^n}}\right) \ge 2^{-n\gamma}\right\} \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathsf{P}\left\{d\left(\xi_{\frac{k+1}{2^n}}, \xi_{\frac{k}{2^n}}\right) \ge 2^{-n\gamma}\right\} \le 2^n b 2^{-n(1+\beta)} = b 2^{-n\beta}.$$

Оскільки ряд $\sum_n 2^{-n\beta}$ збіжний, робимо висновок, що ряд $\sum_n \mathsf{P}\left\{Z_n \ge 2^{-n\gamma}\right\}$ також збіжний. За лемою Бореля-Кантеллі подія $\left\{Z_n \ge 2^{-n\gamma}\right\}$ має місце лише для скінченної кількості n і $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} Z_m = 0$ м.н., а значить $\varpi_D\left(\xi, 2^{-n}\right) \to 0$ м.н. Оскільки $\varpi_D(\xi, \delta)$ незростаюча по δ, то $\varpi_D(\xi, \delta) \xrightarrow{P1} 0$, $\delta \to 0$. $\square$

Приклад (неперервність броунівського руху)**.** Нехай $\{W_t, t \in [0, T]\}$ – процес Вінера. Покажемо, що процес

$$B_t(\omega) = at + \sigma W_t(\omega), t \in [0, T],$$

має м.н. неперервні траєкторії.

Застосуємо такий результат для $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$:

$$\mathsf{E}\xi^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k},\ \mathsf{E}\xi^{2k-1} = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $s < t$, тоді

$$B_t - B_s = a(t-s) + \sigma(W_t - W_s)$$

і, враховуючи означення процесу Вінера, $B_t - B_s = a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\zeta$, $\zeta \sim N(0,1)$. Розглянемо

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|B_t - B_s|^4 = a^4\Delta^4 + 6a^2\Delta^3\sigma^2 + \sigma^4 3\Delta^2 = \\ = \Delta^2\left(a^4\Delta^2 + 6a^2\sigma^2\Delta + 3\sigma^4\right) \le C\Delta^2 = C(t-s)^2.\end{aligned}$$

Тобто виконана умова теореми про достатню умову Колмогорова неперервності м.н.

Вправа 1.13. Показати, що для процесу Пуассона умова теореми про достатню умову Колмогорова неперервності м.н. не виконана.

Відмітимо, що якщо виконана достатня умова Колмогорова, то існує модифікація з траєкторіями, які задовольняють більш сильну умову, ніж неперервність.

Визначення. Відображення $f : T \to E$ називають *γ-Гельдер неперервним*, якщо $\exists 0 < C < \infty$:

$$\varpi_T(f, \delta) \le C\delta^\gamma.$$

Говорять, що f є локально γ-Гельдер неперервною, якщо для довільної обмеженої множини $A \subset T$ існує $0 < C < \infty$, що

$$\varpi_A(f, \delta) \le C\delta^\gamma.$$

Завдання 11. *Показати, що: 1) γ-Гельдер неперервна функція для $\gamma > 1$ є сталою;*

2) локально γ_1-Гельдер неперервна функція є локально γ_2-Гельдер неперервною, якщо $0 < \gamma_2 \le \gamma_1 \le 1$;

3) якщо T – компакт, то локально γ-Гельдер неперервна функція є γ-Гельдер неперервною, яка є в свою чергу рівномірно неперервною.

Під час доведення теореми про достатню умову Колмогорова неперервності м.н. одержали, що м.н. починаючи з деякого n_0 для $0 < \gamma < \frac{c}{a}$ має місце нерівність $Z_n < 2^{-\gamma n}$. Звідки можемо вивести існування модифікації $\tilde{\xi}$, що $\forall t \in [0, T]$ $\exists \varepsilon > 0, C < \infty : \forall u, v \in [0, T]$: $|u - t|, |v - t| < \varepsilon$ маємо

$$d\left(\tilde{\xi}_u, \tilde{\xi}_v\right) \le C\,|u - v|^{\gamma}.$$

Тобто $\forall T \in \mathbb{R}_+$ існує модифікація $\tilde{\xi}_t = \tilde{\xi}_t(T)$, яка є локально γ-Гельдер неперервною.

За теоремою про стохастичну еквівалентність $\forall T_1, T_2 \in \mathbb{R}_+$ в.п. $\tilde{\xi}_t(T_1)$ та $\tilde{\xi}_t(T_2)$ нерозрізненні на $[0, T_1 \wedge T_2]$. Позначимо через $\tilde{\Omega}(T_1, T_2)$ множину тих ω, для яких $\exists t \in [0, T_1 \wedge T_2]$: $\tilde{\xi}_t(T_1) \ne \tilde{\xi}_t(T_2)$, тоді $\bar{\Omega} = \cup_{T_1, T_2 \in \mathbb{N}} \tilde{\Omega}(T_1, T_2)$: $\mathsf{P}\left(\bar{\Omega}\right) = 0$. Визначимо

$$\bar{\xi}_t(\omega) = \begin{cases} \tilde{\xi}_t(T), & \omega \in \Omega \backslash \bar{\Omega}, \\ 0, & \omega \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

За побудовою $\bar{\xi}_t$ є модифікацією ξ та локально γ-Гельдер неперервною на $\mathbb{R}_+$.

Наслідок 1.1. *Нехай для в.п.* $\{\xi_t, t \ge 0\}$ *існують* $a, c > 0$ *такі, що на* $[0, T]$, $\forall T \ge 0$, *для деякого* $0 < b < \infty$ *виконана достатня умова Колмогорова, тоді існує модифікація* $\left\{\bar{\xi}_t, t \ge 0\right\}$ *м.н. локально* γ*-Гельдер неперервна на* $\mathbb{R}_+$ *для* $0 < \gamma < \frac{c}{a}$.

Приклад (неперервність процесів Оренштейна-Уленбека та дробового броунівського руху)**.** Нехай $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$ – в.п. Гаусса з середнім 0 та коваріаційною функцією, яка дорівнює а) $e^{-|t-s|}$; б) $\frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right)$, $H \in (0, 1]$. Визначимо за яких значень γ ці процеси мають модифікації з траєкторіями, які м.н. γ-Гельдер неперервні.

Для процесу Гаусса з нульовим середнім та коваріаційною функцією $\gamma_{s,t}$ різниця $\xi_t - \xi_s$ має нормальний розподіл з середнім 0 та дисперсією

$$\sigma_{s,t}^2 = \gamma_{t,t} + \gamma_{s,s} - \gamma_{s,t} - \gamma_{t,s},$$

тому

$$\mathsf{E}\,|\xi_t - \xi_s|^{2k} = (2k - 1)!!\,\sigma_{s,t}^{2k}.$$

Значить, для випадку а)

$$\mathsf{E}\,|\xi_t - \xi_s|^{2k} = (2k - 1)!!\,2^k \left(1 - e^{-|t-s|}\right)^k \le C_k\,|t - s|^k,$$

та для б) $\mathsf{E}\,|\xi_t - \xi_s|^{2k} = |t - s|^{2Hk}$. Оскільки k довільне натуральне число, ξ_t є γ-Гельдер неперервною для а) $\gamma < 1/2$ та для б) $\gamma < H$.

Вправа 1.14. Показати, що достатня умова Колмогорова не є необхідною.

Вправа 1.15. Нехай $\{X_t, t \in T\}$ – стохастично неперервний в.п. Показати, що якщо ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ дискретний, то процес неперервний м.н.

Процеси без розривів II роду.

Визначення. Говорять, що в.п. $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$ не має розривів II роду, якщо $\forall t \in [0, T)$ існує границя

$$\xi_{t+}(\omega) = \lim_{s \downarrow t} \xi_s(\omega)$$

і $\forall t \in (0, T]$ існує границя

$$\xi_{t-}(\omega) = \lim_{s \uparrow t} \xi_s(\omega).$$

Якщо процес не має розривів II роду і неперервний справа (зліва), то його називають cadlag (caglad) процесом.

Умову відсутності розривів II роду деякої функції зручно формулювати в термінах числа ε-коливань. Говорять, що число ε-коливань функції $x_t : T \to E$ дорівнює n, якщо існують такі точки $t_0 < \ldots < t_n$ в T:

$$d(x_{t_{i+1}}, x_{t_i}) \geq \varepsilon, i = \overline{0, n-1},$$

і не існують точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, для яких має місце дана нерівність.

Лема 1.4 (про збіжність в термінах ε-коливань)**.** *Нехай функція x_t визначена на множині T зі значеннями в E. Для того, щоб для кожної монотонної послідовності $\{t_n\} \in T$ існувала $\lim_{n\to\infty} x_{t_n}$ необхідно і достатньо, щоб x_t мала скінченне число ε-коливань для довільного $\varepsilon > 0$.*

Доведення. Для простоти аргументації розглянемо лише випадок $E = \mathbb{R}$ та $d(x, y) = |x - y|$. Припустимо, що x_t має скінченну кількість ε-коливань, проте $\{x_{t_n}\}$ незбіжна. Якщо $\{x_{t_n}\}$ необмежена, то існує підпослідовність $\{t_{n_k}\}$:

$$\left| x_{t_{n_k}} - x_{t_{n_{k-1}}} \right| \geq 1,$$

але тоді x_t матиме 1-коливань нескінченну кількість. Далі, якщо $\{x_{t_n}\}$ обмежена і

$$a = \underline{\lim} x_{t_n} < \overline{\lim} x_{t_n} = b,$$

то існує підпослідовність $\{t_{n_k}\}$:

$$x_{t_{n_{2k}}} < a + \frac{b-a}{3} \text{ та } x_{t_{n_{2k+1}}} > b - \frac{b-a}{3},$$

і значить, x_t матиме нескінченне число $\frac{b-a}{3}$-коливань. Тобто, якщо x_{t_n} не має границі, то x_t матиме нескінченне число ε-коливань для деякого $\varepsilon > 0$.

Якщо x_t має для деякого $\varepsilon > 0$ нескінченне число ε-коливань, тобто існують такі точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$ в T, що

$$\left|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}\right| \geq \varepsilon,$$

то для послідовності $\{x_{t_n}\}$ не може існувати $\lim x_{t_n}$. □

Теорема 1.12 (про cadlag модифікацію для процесів зі скінченним числом ε-коливань)**.** *Нехай в.п. $\{\xi_t(\omega), t \in [0,T]\}$ стохастично неперервний, D – зліченна усюди щільна множина в $[0,T]$, $A(D,\varepsilon)$ – множина функцій, які на D мають скінченне число ε-коливань. Якщо*

$$\mathsf{P}\{\xi \in A(D,\varepsilon)\} = 1, \forall \varepsilon > 0,$$

то існує cadlag модифікація процесу ξ_t.

Доведення. Множина $A(D,\varepsilon)$ є множиною σ-алгебри циліндричних множин. Тоді такою буде також множина

$$A(D) = \cap_k A\left(D, \frac{1}{k}\right).$$

Якщо функція $x(\cdot) \in A(D)$, то для всіх $t \in [0,T]$ існують $\lim_{s\in D, s\downarrow t} x_s$. Нехай $\Omega_0 = \{\xi \in A(D)\}$, тоді за умовою $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$. Для всіх $\omega \in \Omega_0$ визначимо процес $\tilde{\xi}$ як

$$\tilde{\xi}_t(\omega) = \lim_{s\in D, s\downarrow t} \xi_s(\omega),$$

а для $\omega \in \Omega \backslash \Omega_0$ як $\tilde{\xi}_t(\omega) = 0$. Зі стохастичної неперервності ξ_s випливає, що $\tilde{\xi}_t$ є модифікацією ξ_t, крім того за побудовою $\tilde{\xi}$ є cadlag процесом. □

Теорема 1.13 (про cadlag модифікацію в термінах $\alpha_\varepsilon(h)$)**.** *Нехай маємо деякий числовий в.п. $\{\xi_t, t \in [0,T]\}$, визначимо $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s, s \leq t\}$. Якщо*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon(h) : \alpha_\varepsilon(h) \downarrow 0, h \downarrow 0$$

та м.н.

$$\mathsf{P}\{|\xi_{t+h} - \xi_t| > \varepsilon | \mathcal{F}_t\} \leq \alpha_\varepsilon(h), 0 \leq t < t+h < T,$$

тоді ξ_t має cadlag модифікацію.[10]

Теорема 1.14 (про cadlag модифікацію для стохастично неперервного процесу з незалежними приростами)**.** *Стохастично неперервний процес з незалежними приростами зі значеннями у сепарабельному банаховому просторі має cadlag модифікацію.*

[10] Див., наприклад, Теорема 9.2 в *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. К.: Либідь, 1990.

Доведення. З теореми про рівномірну стохастичну неперервність на компакті маємо $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$, де

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup_{|t-s| \le h} \mathsf{P}\{\|\xi_t - \xi_s\| > \varepsilon\}.$$

З незалежності приростів випливає незалежність $\xi_u - \xi_t$ від $\mathcal{F}_t$, $u > t$, тому м.н.

$$\mathsf{P}\{\|\xi_{t+h} - \xi_t\| > \varepsilon | \mathcal{F}_t\} = \mathsf{P}\{\|\xi_{t+h} - \xi_t\| > \varepsilon\} \le \alpha_\varepsilon(h)$$

і теорема безпосередньо випливає з теореми про cadlag модифікацію в термінах $\alpha_\varepsilon(h)$. $\square$

Приклад (процес Леві)**.** Нехай $\varphi(\alpha)$ – деяка безмежно подільна х.ф. Розглянемо сім'ю функцій

$$\left\{\phi_{st}(\alpha) = \varphi^{t-s}(\alpha), 0 \le s \le t, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

і покажемо, що вона задає деякий процес Леві, який починається з нуля.

З властивостей безмежно подільних х.ф. випливає, що $\phi_{st}(\alpha)$ є х.ф. Оскільки для довільних $0 \le s < u < t < \infty$:

$$\phi_{st}(\alpha) = \varphi^{t-s}(\alpha) = \varphi^{t-u}(\alpha)\,\varphi^{u-s}(\alpha) = \phi_{su}(\alpha)\,\phi_{ut}(\alpha),$$

за теоремою про існування процесу з незалежними приростами за заданого розподілу приросту існує в.п. з незалежними приростами $\{\xi_t, t \ge 0\}$, такий що $\xi_0 = 0$ м.н., причому $\phi_{st}(\alpha) = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_s)}$. Враховуючи, що для довільних $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, $h > 0$ та $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{E}e^{\sum_{k=1}^m \imath\alpha_k\left(\xi_{t_k+h} - \xi_{t_{k-1}+h}\right)} = \prod_{k=1}^m \varphi^{(t_k+h)-(t_{k-1}+h)}(\alpha) = \mathsf{E}e^{\sum_{k=1}^m \imath\alpha_k\left(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}\right)},$$

отримаємо стаціонарність у вузькому сенсі приростів процесу, тобто в.п. ξ однорідний. Зазначимо, що $\mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_s)} = \varphi^{t-s}(\alpha) \to 1$, якщо $s \to t$, тому за теоремою Леві неперервності різниця $\xi_t - \xi_s$ за розподілом збігається до 0. Позначимо через $F_0(x)$ функцію атомічного розподілу, зосередженого в точці 0, тоді $\forall \varepsilon > 0$, якщо $s \to t$:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{|\xi_t - \xi_s| \ge \varepsilon\} &= \mathsf{P}\{\xi_t - \xi_s \le -\varepsilon\} + \mathsf{P}\{\xi_t - \xi_s \ge \varepsilon\} \le \\ &\le \mathsf{P}\left\{\xi_t - \xi_s < -\frac{\varepsilon}{2}\right\} + (1 - \mathsf{P}\{\xi_t - \xi_s < \varepsilon\}) \to F_0\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1 - F_0(\varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

Отже, процес ξ є стохастично неперервний і за теоремою про cadlag модифікацію для стохастично неперервного процесу з незалежними приростами існує модифікація з траєкторіями без розривів другого роду. Отримана модифікація є процесом Леві.

Відмітимо, що має місце і зворотній результат. Якщо $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – процес Леві, що починається з нуля, тоді внаслідок незалежності та стаціонарності приростів для кожного $m \in \mathbb{N}$ справедливе подання

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{m} X_k,$$

де $X_k = X_k(n,t) = \xi_{kt/m} - \xi_{(k-1)t/m}$ – незалежні однаково розподілені в.в. Тобто х.ф. $\phi_t(\alpha) = \mathsf{E}e^{\imath\alpha\xi_t}$ є безмежно подільною і за теоремою про зображення Леві-Хінчина безмежно подільної х.ф. може бути подана як $e^{\psi(\alpha,t)}$, де $\psi(\alpha,t)$ – відповідна кумулянта. Безмежна подільність $\phi_t(\alpha)$ дає $\forall k, m \in \mathbb{N}$:

$$k\psi(\alpha,1) = \psi(\alpha,k) = m\psi(\alpha,k/m),$$

тобто для довільного раціонального $s > 0$:

$$\psi(\alpha,s) = s\psi(\alpha,1).$$

Для довільного $t > 0$ існує послідовність раціональних $s_n \downarrow t$, $n \to \infty$, тоді неперервність справа ξ із застосуванням теореми Лебега про мажоровану збіжність дає $\phi_{s_n}(\alpha) \to \phi_t(\alpha)$ та

$$\psi(\alpha,s_n) = \ln\phi_{s_n}(\alpha) \to \psi(\alpha,t), n \to \infty.$$

Отже, $\forall t \geq 0$:

$$\psi(\alpha,t) = t\psi(\alpha,1),$$

і значить,

$$\mathsf{E}e^{\imath\alpha(\xi_t - \xi_s)} = \left(e^{\psi(\alpha)}\right)^{(t-s)},$$

де $\psi(\alpha)$ – кумулянта ξ_1. Відповідно для того, щоб задати процес Леві достатньо задати так звану трійку Леві: сталі $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ та міру Π на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\int_{0<|x|\leq 1} x^2\Pi(dx) < \infty$.

Наприклад, $\xi_t = at$, $a \in \mathbb{R}^1$, є процесом Леві з кумулянтою $\psi(\alpha) = \imath\alpha a$. Якщо $\sigma^2 = 0$ та $\int_{-1}^{1}|x|\Pi(dx) < \infty$, то відповідний процес Леві має скінченну варіацію[11]. Процес Леві називають субординатором, якщо він має неспадні траєкторії. Для субординатора кумулянта має зображення

$$\psi(\alpha) = \imath a_1\alpha + \int_0^\infty \left(e^{\imath\alpha x} - 1\right)\Pi(dx),$$

де $a_1 \in \mathbb{R}^1$, $\int_0^\infty (y \wedge 1)\Pi(dy) < \infty$. Субординатор з кумулянтою $\psi(\alpha) = \lambda\left(e^{\imath\alpha} - 1\right)$ є простим процесом Пуассона.

[11] Див., наприклад, Теорема 17.3 в *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.

Вправа 1.16. Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – процес Леві з трійкою $\left\{a, \sigma^2, \Pi\right\}$. Показати, що $\eta_t = -\xi_t$ також є процесом Леві. Знайти відповідну трійку Леві.

На практиці для перевірки наявності модифікації без розривів II роду корисним може виявитись такий результат.

Теорема 1.15 (про достатню умову Ченцова існування cadlag модифікації)**.** *Нехай $\{\xi_t, t \in [0,T]\}$ – стохастично неперервний в.п., для якого виконана така умова: існують числа $a, b, c > 0$ такі, що для всіх $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$:*

$$\mathsf{E}\left(d\left(\xi_t, \xi_u\right) d\left(\xi_u, \xi_s\right)\right)^a \leq b\left|t-s\right|^{1+c}.$$

Тоді для цього процесу існує cadlag модифікація.[12]

Відмітимо, що достатня умова Ченцова є "слабшою" за достатню умову Колмогорова. Дійсно, якщо

$$\mathsf{E}\left|\xi_t - \xi_s\right|^a \leq b\left|t-s\right|^{1+c},$$

то за нерівністю Коші-Буняковського для всіх $0 \leq s \leq u \leq t$ маємо

$$\mathsf{E}\left|\xi_t - \xi_u\right|^{\frac{a}{2}}\left|\xi_u - \xi_s\right|^{\frac{a}{2}} \leq \sqrt{\mathsf{E}\left|\xi_t - \xi_u\right|^a \mathsf{E}\left|\xi_u - \xi_s\right|^a} \leq$$
$$\leq b\sqrt{\left|t-u\right|^{1+c}\left|u-s\right|^{1+c}} \leq b\left|t-s\right|^{1+c}.$$

Приклад (телеграфний процес)**.** Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ процес з незалежними приростами, такий що

$$\mathsf{P}\left\{\xi_t = 1\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_t = -1\right\}$$

та розподіл приростів визначений як

$$\mathsf{P}\left\{\xi_t - \xi_s = 0\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-|t-s|}\right),$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi_t - \xi_s = -2\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_t - \xi_s = 2\right\} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-|t-s|}\right).$$

Покажемо, що цей процес має cadlag модифікацію.

Для довільних $0 \leq s \leq u \leq t$ розглянемо $\mathsf{E}\left|\xi_t - \xi_u\right|\left|\xi_u - \xi_s\right|$. Внаслідок незалежності приростів маємо, що цей вираз дорівнює

$$\mathsf{E}\left|\xi_t - \xi_u\right| \mathsf{E}\left|\xi_u - \xi_s\right| = \left(1 - e^{-|t-u|}\right)\left(1 - e^{-|s-u|}\right) \leq \frac{1}{4}\left|t-s\right|^2.$$

Тобто достатня умова Ченцова виконана з $a = c = 1$ та $b = \frac{1}{4}$.

[12] Див., наприклад, Теорема 9.5 в *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай в.в. τ приймає невід'ємні значення, визначимо в.п. $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t>\tau\}}(\omega)$, $t \geq 0$. Навести необхідну і достатню умову на розподіл τ, за якої X мав би cadlag модифікацію.

2. Нехай $\{\xi_t, t > 0\}$ – однорідний процес з незалежними приростами. Показати що процес ξ_t стохастично неперервний тоді і тільки тоді, коли $\phi_t(\alpha) = \mathsf{E}e^{i\alpha\xi_t}$, $t > 0$, є неперервною по t функцією.

3. Нехай перерізи випадкового процесу $\{\xi_t, t \geq 0\}$ незалежні та рівномірно розподілені на $[a, b]$. Показати, що цей процес не має cadlag модифікацію.

1.7. Стохастичний аналіз в середньому квадратичному

Позначимо через $L_2 = L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ простір комплексних випадкових векторів $\xi = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_d(\omega))^\top$, для яких виконана умова

$$\sum_{i=1}^{d} \mathsf{E}|\xi_i|^2 < \infty.$$

Вважатимемо, що випадкові вектори ξ та η з L_2 рівні між собою, якщо $\xi = \eta$ м.н. Зі стандартними операціями простір L_2 є лінійний (векторний).

Визначимо відображення $(\cdot, \cdot) : L_2 \times L_2 \to \mathbb{C}$ як

$$(\xi, \eta) = \mathsf{E}\left(\xi^\top \bar{\eta}\right).$$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що це відображення лінійне за першим аргументом, для нього має місце властивість ермітовості (для дійних випадкових векторів – симетричності) та додатної напіввизначенності. Тобто відображення $(\cdot, \cdot)$ визначає скалярний добуток в L_2 (з яким L_2 є унітарним простором).

Задамо на L_2 функціонал $\|\cdot\| : L_2 \to \mathbb{R}_+$ як

$$\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}.$$

Для цього функціоналу виконана тотожність паралелограма:

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2$$

і значить цей функціонал визначає норму в L_2.

Визначення. Будемо говорити, що послідовність $\{\xi_n\} \in L_2$ збігається до випадкового вектора ξ в середньому квадратичному (в с.кв.) і позначати як $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$ або $\text{l.i.m.}\xi_n = \xi$, якщо

$$\|\xi - \xi_n\| \to 0, n \to \infty.$$

Застосовуючи напівадитивність норми, маємо що

$$|\|\xi\| - \|\xi_n\|| \leq \|\xi - \xi_n\|,$$

звідки з $\xi_n \overset{L_2}{\to} \xi$ випливає, що $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$. Тобто, $\|\cdot\|$ – неперервний функціонал.

З нерівності Шварца:

$$|(\xi, \eta)| \leq \|\xi\| \times \|\eta\|,$$

виводимо

$$\begin{aligned} |(\xi_n, \eta_m) - (\xi, \eta)| &\leq |(\xi_n, \eta_m) \pm (\xi, \eta_m) - (\xi, \eta)| \leq \\ &\leq |(\xi_n - \xi, \eta_m)| + |(\xi, \eta_m - \eta)| \leq \|\xi_n - \xi\| \times \|\eta_m\| + \|\xi\| \|\eta_m - \eta\|. \end{aligned}$$

Отже, якщо $\xi_n \overset{L_2}{\to} \xi$ та $\eta_m \overset{L_2}{\to} \eta$, то $(\xi_n, \eta_m) \to (\xi, \eta)$, тобто скалярний добуток – неперервне відображення відносно обох аргументів. Відмітимо також, що будь-яка послідовність Коші:

$$\|\xi_n - \xi_m\| \to 0, n, m \to \infty,$$

є збіжною в с.кв., тобто відносно метрики, породженої нормою,

$$r(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|,$$

простір L_2 повний. А значить, L_2 є гільбертовим простором.

Визначення. Процес $\{\xi_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, зі значеннями в просторі $\mathbb{C}^d$ називають процесом II порядку, якщо $\forall t \in T$: $\xi_t \in L_2$.

Для дослідження властивостей траєкторій процесу II порядку важливе значення мають його основні характеристики:

- функція середніх
$$m_t = \mathsf{E}\xi_t$$
- коваріаційна функція
$$\gamma_{s,t} = \mathsf{E}(\xi_s - m_s)\overline{(\xi_t - m_t)^\top}.$$

Збіжність

Розглянемо спочатку твердження, яке дозволить в подальшому зосередитись лише на випадку $d = 1$.

Теорема 1.16 (про по-компонентну збіжність в с.кв.). *Для того, щоб процес II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ збігався до випадкового вектора η в с.кв. за $t \to t_0$ необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall k = \overline{1, d} : \mathsf{E} \left|\xi_k(t) - \eta_k\right|^2 \to 0, t \to t_0.$$

Доведення. Нехай $\xi_t \xrightarrow{L_2} \eta$, $t \to t_0$, тоді

$$\mathsf{E} \left|\xi_k(t) - \eta_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{d} \mathsf{E} \left|\xi_k(t) - \eta_k\right|^2 = \|\xi_t - \eta\| \to 0.$$

Якщо $\mathsf{E} \left|\xi_k(t) - \eta_k\right|^2 \to 0$ для усіх $k = \overline{1, d}$, тоді

$$\|\xi_t - \eta\| = \sum_{k=1}^{d} \mathsf{E} \left|\xi_k(t) - \eta_k\right|^2 \to 0, t \to t_0.$$

□

Теорема 1.17 (про критерій збіжності в с.кв.). *Для процесу II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ наведені нижче твердження еквівалентні:*

1) ξ_t збігається в с.кв. за $t \to t_0$;

2) (ξ_t, ξ_s) збігається за $t, s \to t_0$;

3) існують скінченні границі для m_t та $\gamma_{s,t}$ за $s, t \to t_0$.

Доведення. (1) ⇒ 2)) Випливає з неперервності скалярного добутку за обома аргументами.

(2) ⇒ 1)) Нехай (ξ_t, ξ_s) збігається до деякого $c \in \mathbb{C}$ за умови $t, s \to t_0$, тоді

$$\begin{aligned} \|\xi_t - \xi_s\|^2 = (\xi_t - \xi_s, \xi_t - \xi_s) = (\xi_t, \xi_t) - (\xi_t, \xi_s) - \\ - (\xi_s, \xi_t) + (\xi_s, \xi_s) \to c - c - c + c = 0. \end{aligned}$$

Внаслідок повноти L_2 маємо, що ξ_t збігається в с.кв. за $t \to t_0$.

(2) ⇒ 3)) Збіжність в с.кв. та неперервність скалярного добутку дає збіжність для

$$m_t = (\xi_t, 1)$$

при $t \to t_0$. Збіжність коваріаційної функції випливає з такого подання

$$\gamma_{s,t} = (\xi_s, \xi_t) - m_s \bar{m}_t = (\xi_s, \xi_t) - (\xi_s, 1)(1, \xi_t).$$

(3) ⇒ 2)) Із зображення коваріаційної функції $\gamma_{s,t} = (\xi_s, \xi_t) - m_s \bar{m}_t$ маємо таке подання скалярного добутку

$$(\xi_s, \xi_t) = \gamma_{s,t} + m_s \bar{m}_t.$$

Якщо доданки справа від рівності збігаються, то збігається і вираз зліва. □

Неперервність

Визначення. Процес II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ називають *неперервним в с.кв.* в точці $t_0 \in T$, якщо

$$\|\xi_t - \xi_{t_0}\| \to 0, t \to t_0.$$

Вправа 1.17. Показати, що процес Вінера неперервний в с.кв.

Теорема 1.18 (про критерій неперервності в с.кв.). *Для процесу II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ наведені нижче твердження еквівалентні:*

1) ξ_t неперервний в с.кв. в точці $t_0 \in T$;

2) $(\xi_t, \xi_s) \to (\xi_{t_0}, \xi_{t_0})$, $s, t \to t_0$;

3) $m_t \to m_{t_0}$, $t \to t_0$, та $\gamma_{s,t} \to \gamma_{t_0,t_0}$, $s, t \to t_0$.

Доведення. Ця теорема є безпосередній наслідок з теореми про критерій збіжності в с.кв. □

Приклад (неперервність в с.кв. процесу Пуассона). Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з параметром λ. Покажемо, що він є неперервний в с.кв.

Розглянемо скалярний добуток значень процесу в точках $t, s \geq 0$. Спочатку припустимо, що $t > s$, тоді

$$\begin{aligned}(N_t, N_s) &= \mathsf{E}N_tN_s = \mathsf{E}\left(N_t \pm N_s\right)N_s = \\ &= \mathsf{E}\left(N_t - N_s\right)N_s + \mathsf{E}N_s^2 = \mathsf{E}\left(N_t - N_s\right)\mathsf{E}N_s + \mathsf{E}N_s^2 = \\ &= \lambda\left(t-s\right)\lambda s + \left(\lambda s\right)^2 + \lambda s = \lambda^2 ts + \lambda s.\end{aligned}$$

Якщо $t = s$, то $(N_t, N_s) = (\lambda s)^2 + \lambda s$. Отже, $(N_t, N_s) = \lambda\left(s \wedge t\right) + \lambda^2 st$ – неперервна функція по t, s і за теоремою про критерій неперервності в с.кв. маємо, що процес Пуассона неперервний в с.кв.

Відмітимо, що за умови неперервності m_t неперервність в с.кв. процесу II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ еквівалентна неперервності відповідного центрованого процесу $\mathring{\xi}_t = \xi_t - m_t$. Дійсно, якщо $\xi_t \xrightarrow{L_2} \xi_{t_0}$, то $m_t \to m_{t_0}$, $t \to t_0$, та

$$\|\mathring{\xi}_t - \mathring{\xi}_{t_0}\| = \|\xi_t - m_t - \xi_{t_0} - m_{t_0}\| \leq \|\xi_t - \xi_{t_0}\| + |m_t - m_{t_0}| \to 0, t \to t_0.$$

Якщо ж маємо $\mathring{\xi}_t \xrightarrow{L_2} \mathring{\xi}_{t_0}$, тоді

$$\mathring{\gamma}_{s,t} = \gamma_{s,t} \to \gamma_{t_0,t_0} = \mathring{\gamma}_{t_0,t_0}, s, t \to t_0,$$

та, враховуючи неперервність m_t, за теоремою про критерій неперервності в с.кв. виводимо $\xi_t \xrightarrow{L_2} \xi_{t_0}$.

Для стаціонарного процесу

$$m_t = m$$

та
$$\gamma_{t+h,t} = \gamma_{h,0},$$
тому для встановлення неперервності в с.кв. достатньо проаналізувати неперервність $\gamma_t = \gamma_{t,0}$.

Теорема 1.19 (про неперервність в с.кв. стаціонарного процесу). *Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – стаціонарний у широкому сенсі в.п. з коваріаційною функцією γ_t. Тоді*

1) якщо ξ_t неперервний в с.кв. в точці $t_0 \geq 0$, то γ_t неперервна в нулі;

2) якщо γ_t неперервна в нулі, то γ_t неперервна та процес ξ_t неперервний в с.кв.

Доведення. 1) Нехай $\xi_{t_0+h} \overset{L_2}{\to} \xi_{t_0}$, $h \to 0$, тоді за теоремою про критерій неперервності в с.кв.
$$\gamma_h = \gamma_{t_0+h,t_0} \to \gamma_{t_0,t_0} = \gamma_0.$$

2) Оскільки
$$\|\xi_t - \xi_{t_0}\|^2 = \gamma_{t,t} - \gamma_{t,t_0} - \gamma_{t_0,t} + \gamma_{t_0,t_0} = \\ = \gamma_0 - \gamma_{t-t_0} - \gamma_{t_0-t} + \gamma_0 \to 0, t \to t_0 \in T,$$
маємо неперервість в с.кв. ξ_t, а за теоремою про критерій неперервності в с.кв. і неперервність γ_t на T. □

Вправа 1.18. В.п. визначений як
$$\xi_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) f_k(t), t \in T,$$
де $\xi_k \in L_2(\Omega)$ та $f_k(t)$ неперервні на T детерміновані функції. Дослідити неперервність процесу.

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що ряд некорельованих в.в. $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ збігається в с.кв. тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{D}\xi_k$.

2. Нехай в.п. $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$ визначений так: $\xi_t = \eta_1 \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} + \eta_2 \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}$, де в.в. $\eta_{1,2} \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ та $\tau \sim U[0,1]$ незалежні. Дослідити неперервність ξ_t.

3. Проаналізувати неперервність процесу $Y_t = \phi(t) X_t + \psi(t)$, якщо $\phi(t)$ та $\psi(t)$ – неперервні детерміновані функції, а X_t – неперервний в с.кв. в.п.

4. Нехай в.п. X_t неперервний в с.кв. на $[a,b]$. Показати, що існує таке C, що $\forall t \in [a,b]$: $E|X_t|^2 \leq C$.

Диференційовність

Визначення. Процес II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ називають диференційовним в с.кв. в точці $t_0 \in T$, якщо існує в.в. $\dot{\xi}_{t_0}$ (яку називають похідною процесу ξ_t в точці t_0) така, що

$$\text{l.i.m.}_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\xi_{t_0+h} - \xi_{t_0}\right) = \dot{\xi}_{t_0}.$$

Процес називають диференційовним на $T_0 \subset T$, якщо він диференційовний в усіх точках з T_0.

Теорема 1.20 (про неперервність диференційовного в с.кв. процесу)**.** *Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – процес II порядку диференційовний в с.кв. на T, то він є також неперервний в с.кв.*

Доведення. З умови теореми випливає, що

$$\|\frac{1}{h} \left(\xi_{t+h} - \xi_t\right) - \dot{\xi}_t\| \to 0, h \to 0.$$

Оскільки $\frac{1}{h} \left(\xi_{t+h} - \xi_t\right)$ є процесом II порядку, а простір L_2 повний, то $\dot{\xi}_t$ також є процесом II порядку: $\|\dot{\xi}_t\| < \infty$. Тоді,

$$\|\xi_{t+h} - \xi_t\| = |h| \, \|\frac{1}{h} \left(\xi_{t+h} - \xi_t\right) \pm \dot{\xi}_t\| \le$$
$$\le |h| \, \|\frac{1}{h} \left(\xi_{t+h} - \xi_t\right) - \dot{\xi}_t\| + |h| \, \|\dot{\xi}_t\| \to 0, h \to 0.$$

Звідки випливає неперервність в с.кв. □

Приклад (недиференційовність в с.кв. процесу Пуассона)**.** Доведемо, що процес Пуассона не є диференційовний в с.кв.

Покажемо, що похідна в сенсі збіжності за ймовірністю дорівнює нулю. Для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{h} \left(N_{t+h} - N_t\right)\right| \ge \varepsilon\right\} = \mathsf{P}\left\{\left|N_{t+h} - N_t\right| \ge \varepsilon \left|h\right|\right\} =$$
$$= 1 - \mathsf{P}\left\{\left|N_{t+h} - N_t\right| < \varepsilon \left|h\right|\right\} =$$
$$= 1 - \sum_{k : k < \varepsilon |h|} \frac{\left(\lambda \left|h\right|\right)^k}{k!} e^{-\lambda |h|} \simeq 1 - e^{-\lambda |h|} \to 0, h \to 0.$$

Якщо б існувала похідна в сенсі збіжності в с.кв., то вона також мала б дорівнювати 0, проте

$$\|\frac{1}{h} \left(N_{t+h} - N_t\right)\| = \frac{1}{|h|} \|N_{t+h} - N_t\| = \frac{1}{|h|} \sqrt{\left(\lambda h\right)^2 + \lambda \left|h\right|} \not\to 0, h \to 0.$$

Тобто траєкторії не є диференційовними в с.кв.

Даний приклад демонструє, що з неперервності в с.кв. взагалі-то не випливає диференційовність в с.кв. Оскільки простір L_2 банаховий, то з $\dot{\xi}_t = 0$ випливає, що $\xi_t = \xi_0$ м.н. Відмітимо, що для похідної в сенсі збіжності за ймовірністю гарантувати це не можемо, похідна не визначає в.ф. з точністю до константи.

Як і у випадку неперервності в с.кв. диференційовність повністю визначена відповідними аналітичними властивостями функції середніх та коваріаційної функції.

Теорема 1.21 (про критерій диференційовності в с.кв.). *Для того, щоб процес II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ був диференційовний в с.кв. на $T_0 \subset T$ необхідно, щоб існували похідні*

$$\frac{d}{dt}m_t, \frac{\partial}{\partial t}\gamma_{s,t}, \frac{\partial}{\partial s}\gamma_{s,t}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\gamma_{s,t} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\gamma_{s,t}, s, t \in T_0$$

і достатньо, щоб існували

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{1}{h_1 h_2} \left(\gamma_{t+h_1, t+h_2} - \gamma_{t, t+h_2} - \gamma_{t+h_1, t} + \gamma_{t,t}\right)$$

(узагальнена мішана похідна $\gamma_{s,t}$ для $t = s$) та $\frac{d}{dt}m_t$ для $t \in T_0$.

Доведення. Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ диференційовний в с.кв. на T_0 і $\left\{\dot{\xi}_t, t \in T_0\right\}$ – його похідна. Внаслідок неперервності скалярного добутку на T_0 маємо

$$\mathsf{E}\dot{\xi}_t = \left(\dot{\xi}_t, 1\right) = \left(\text{l.i.m.}_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\xi_{t+h} - \xi_t\right), 1\right) =$$
$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{h}\left(\xi_{t+h} - \xi_t\right), 1\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(m_{t+h} - m_t\right).$$

Тобто існує $\frac{d}{dt}m_t$ і центрований процес $\xi_0(t) = \xi_t - m_t$ також є диференційовний в с.кв. на T_0. Звідки маємо

$$\left(\xi_0(t), \dot{\xi}_0(s)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\xi_0(t), \left(\xi_0(s+h) - \xi_0(s)\right)\right) =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\gamma_{t,s+h} - \gamma_{t,s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_{t,s},$$

аналогічно

$$\left(\dot{\xi}_0(t), \xi_0(s)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma_{t,s}$$

та

$$\left(\dot{\xi}_0(t), \dot{\xi}_0(s)\right) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\gamma_{t,s} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\gamma_{t,s}.$$

Нехай тепер існують похідна $\frac{d}{dt}m_t$ та узагальнена мішана похідна $\gamma_{s,t}$ для $t = s$. Достатньо показати, що відповідний центрований процес $\xi_0(t) = \xi_t - m_t$ диференційовний в с.кв., а для цього за теоремою про критерій збіжності в с.кв. достатньо щоб за умови $h_1, h_2 \to 0$ збігався скалярний добуток

$$\left(\frac{\xi_0(t+h_1) - \xi_0(t)}{h_1}, \frac{\xi_0(t+h_2) - \xi_0(t)}{h_2}\right) =$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2}\Big(\left(\xi_0(t+h_1), \xi_0(t+h_2)\right) - \left(\xi_0(t), \xi_0(t+h_2)\right) -$$
$$- \left(\xi_0(t+h_1), \xi_0(t)\right) + \left(\xi_0(t), \xi_0(t)\right)\Big),$$

що відповідає існуванню узагальненої мішаної похідної для $t = s$. □

Наслідок 1.2 (про характеристики похідної в с.кв.). *Якщо процес II порядку $\{\xi_t, t \in T\}$ диференційовний в с.кв. і $\left\{\dot{\xi}_t, t \in T\right\}$ – його похідна, тоді*

$$m_{\dot{\xi}}(t) = \frac{d}{dt} m_\xi(t)$$

та

$$\gamma_{\dot{\xi}}(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \gamma_\xi(t,s).$$

Більш того, якщо ξ_t стаціонарний у широкому сенсі, то $\dot{\xi}_t$ також стаціонарний і $m_{\dot{\xi}} = 0$ та $\gamma_{\dot{\xi}}(t) = -\gamma''_\xi(t)$.

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що $\operatorname{cov}\left(\xi_t, \dot{\xi}_s\right) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_{t,s}$, де $\gamma_{t,s}$ – коваріаційна функція в.п. ξ_t.

2. Знайти похідну в с.кв. в.п. $\xi_t(\omega) = \eta_1(\omega)\cos(\lambda t) + \eta_2(\omega)\sin(\lambda t)$, $t \geq 0$, де $\eta_{1,2}$ – незалежні в.в. з середніми $m_{1,2}$ та однаковими дисперсіями σ^2, λ – деяка константа. Знайти функцію середніх та коваріаційну функцію для похідної.

3. Показати, що стаціонарний у широкому сенсі в.п. $\{\xi_t, t \geq 0\}$ з коваріаційною функцією $\gamma_t = \sigma^2 \exp\left\{-\alpha^2 |t|\right\}$ диференційований в с.кв.

4. Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – процес Гаусса з середнім $m_t = t^3$ та коваріаційною функцією $\gamma_{s,t} = 6ts$. Обчислити $\mathsf{P}\left\{\dot{\xi}_4 > 1\right\}$.

5. Нехай для в.п. $\{\xi_t, t \in [0,T]\}$ існує похідна в с.кв. $\dot{\xi}_t$, яка з ймовірністю 1 дорівнює нулю на $[0,T]$. Показати, що $\xi_t = \xi_0$ м.н. на $[0,T]$.

Інтегровність

Нехай $\{\xi_t, t \in T\}$ – процес II порядку, $[a,b] \subset T$. Позначимо послідовні розбиття відрізку $[a,b]$ через

$$P_n = \{t_i^n : a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = b\}$$

і окремі точки з відповідних відрізків розбиття через

$$Y_n = \left\{y_i^n : y_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n), i = \overline{0, n-1}\right\}.$$

Будемо припускати, що розбиття побудовані так, що $\max_{0 \le i \le n-1} \Delta t_i^n \to 0$, $n \to \infty$, де $\Delta t_i^n = t_{i+1}^n - t_i^n$.

Визначення. Якщо інтегральна сума

$$S_n = S_n(P, Y) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{y_i} \Delta t_i^n$$

збігається в с.кв. незалежно від вибору послідовностей P_n та Y_n, то процес ξ_t називають інтегровним в с.кв., а відповідну границю позначають як

$$\int_a^b \xi_t dt$$

і називають інтегралом процесу на $[a,b]$.

Застосовуючи властивості збіжності в с.кв., маємо що інтеграл в с.кв. є лінійне перетворення: якщо процеси $\xi_k(t), t \in [a,b]$, $k = \overline{1,m}$, інтегровні на $[a,b]$ та α_k – деякі детерміновані константи, тоді $\sum_{k=1}^m \alpha_k \xi_k(t)$ – також інтегровний на $[a,b]$ в.п., більш того,

$$\int_a^b \sum_{k=1}^m \alpha_k \xi_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_a^b \xi_k(t)\, dt.$$

Як і у випадку неперервності та диференційовності для інтегровності визначальними є властивості функції середніх та коваріаційної функції.

Теорема 1.22 (про критерій інтегровності в с.кв.)**.** *Процес II порядку* $\{\xi_t, t \in T\}$ *інтегровний в с.кв. на* $[a,b] \subset T$ *тоді і тільки тоді, коли існують інтеграли Рімана* $\int_a^b m_t dt$ *та* $\int_a^b \int_a^b \gamma_{t,s} dt ds$.

Доведення. За теоремою про критерій збіжності в с.кв. для того, щоб інтегральна сума була збіжною в с.кв. необхідно і достатньо, щоб збігався скалярний добуток

$$\left(S_n,\tilde{S}_m\right)=\left(S_n\left(P,Y\right),S_m\left(\tilde{P},\tilde{Y}\right)\right)=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\xi_{y_i}\Delta t_i^n,\sum_{j=0}^{m-1}\xi_{\tilde{y}_j}\Delta\tilde{t}_j^m\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{y_i,\tilde{y}_j}\Delta t_i^n\Delta\tilde{t}_j^m+\left(\sum_{i=0}^{n-1}m_{y_i}\Delta t_i^n\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{m-1}m_{\tilde{y}_j}\Delta\tilde{t}_j^m\right)}.$$

Якщо існують інтеграли Рімана $\int_a^b m_t dt$ та $\int_a^b\int_a^b\gamma_{t,s}dtds$, то існує границя для скалярного добутку $\left(S_n,\tilde{S}_m\right)$, і значить процес ξ_t інтегровний на $[a,b]$.

Якщо процес ξ_t інтегровний в с.кв., тоді існує

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}m_{y_i}\Delta t_i^n=\lim_{n\to\infty}(S_n,1)=\left(\int_a^b\xi_t dt,1\right)=\mathsf{E}\int_a^b\xi_t dt<\infty.$$

Крім того, з інтегровності процесу випливає існування границі для $\left(S_n,\tilde{S}_m\right)$, а значить, тоді існує

$$\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{y_i,\tilde{y}_j}\Delta t_i^n\Delta\tilde{t}_j^m=\int_a^b\int_a^b\gamma_{t,s}dtds.$$

$\square$

З цього твердження безпосередньо отримаємо, що з неперервності в с.кв. на $[a,b]$ випливає інтегровність в с.кв. на $[a,b]$ (як наслідок відповідних властивостей для детермінованих функцій).

Наслідок 1.3 (про характеристики інтегралу в с.кв.). *Нехай в.п. $\{\xi_t,t\in T\}$ інтегровний в с.кв. на $[a,b]\subset T$, тоді маємо що*

$$\mathsf{E}\int_a^b\xi_t dt=\int_a^b m_t dt,$$

$$\operatorname{cov}\left(\int_a^b\xi_t dt,\xi_s\right)=\int_a^b\gamma_{t,s}dt,\operatorname{cov}\left(\xi_t,\int_a^b\xi_s ds\right)=\int_a^b\gamma_{t,s}ds$$

та для довільних $c<d$ з $[a,b]$:

$$\operatorname{cov}\left(\int_a^b\xi_t dt,\int_c^d\xi_s ds\right)=\int_d^c\int_a^b\gamma_{t,s}dtds.$$

Вправа 1.19. Нехай $\{\xi_t,t\ge 0\}$ – в.п. з $m_t=at$, $\gamma_{t,s}=\sigma^2 ts$. Обчислити функцію середніх та коваріаційну функцію для $\eta_t=\int_0^t\xi_s ds$, $t\ge 0$.

Нехай A – лінійний інтегральний оператор:

$$Af(t) = \int_a^b A(t,s) f(s) \, ds,$$

де $A(t,s)$ – ядро оператора. Якщо $\{\xi_t, t \in T\}$ інтегровний в с.кв. на $[a,b] \subset T$, то $\{\eta_t = A\xi_t, t \in [a,b]\}$ є процесом II порядку:

$$m_\eta(t) = \int_a^b A(t,s) m_\xi(s) \, ds$$

та

$$\gamma_\eta(t,s) = \int_a^b \int_a^b A(t,u) \overline{A(s,v)} \gamma_\xi(u,v) \, dudv.$$

Теорема 1.23 (про диференціювання інтегралу за змінною верхньою границею)**.** *Нехай в.п. $\{\xi_t, t \in T\}$ неперервний в с.кв. на $[a,b] \subset T$, A – лінійний інтегральний оператор:*

$$Af(t) = \int_a^t f(s) \, ds,$$

тоді в.п. $\{\eta_t = A\xi_t, t \in [a,b]\}$ є диференційовний в с.кв., більш того, $\dot{\eta}_t = \xi_t$ м.н.

Доведення. Нехай $h > 0$ і припустимо, що $m_t = 0$. Розглянемо норму

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\eta_{t+h} - \eta_t}{h} - \xi_t\right\|^2 = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \xi_s ds - \xi_t\right\|^2 = \\ = \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \xi_s ds - \xi_t, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \xi_s ds - \xi_t\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\int_t^{t+h} \xi_s ds, \int_t^{t+h} \xi_s ds\right) - \frac{1}{h}\left(\xi_t, \int_t^{t+h} \xi_s ds\right) - \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} \xi_s ds, \xi_t\right) - (\xi_t, \xi_t).$$

Враховуючи що $m_t = 0$, за наслідком про характеристики інтегралу в с.кв. маємо

$$\left\|\frac{\eta_{t+h} - \eta_t}{h} - \xi_t\right\|^2 = \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h} \gamma_{u,v} dudv - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma_{t,s} ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma_{s,t} ds - \gamma_{t,t}.$$

Оскільки процес ξ_t неперервний в с.кв., то $\gamma_{t,s}$ – неперервна функція своїх аргументів і за теоремою про середнє отримаємо, що вираз справа від рівності прямує до 0.

Якщо $m_t \neq 0$, тоді з доведеного вище випливає, що для центрованого процесу $\xi_0(t) = \xi_t - m_t$ маємо

$$\dot{\eta}_0(t) = \xi_0(t).$$

Оскільки $\eta_t = A\xi_0(t) + Am_t$, виводимо $\dot{\eta}_t = \dot{\eta}_0(t) + m_t = \xi_0(t) + m_t = \xi_t$. $\square$

Вправа 1.20. Нехай процес $\{\xi_t, t \in [a, b]\}$ диференційовний в с.кв. та його похідна $\dot{\xi}_t$ неперервна в с.кв. Показати, що

$$\int_a^t \dot{\xi}_s ds = \xi_t - \xi_a, t \in [a, b] .$$

Відмітимо, що як і теорема про критерій диференційовності в с.кв. теорема про критерій інтегровності в с.кв. дозволяє лише визначити характеристики інтегралу, а не явно його знайти. Проте якщо траєкторії $\xi_t(\omega)$ м.н. інтегровні за Ріманом, тобто

$$\mathsf{P}\left\{\exists \int_a^b \xi_t(\omega)\, dt = \eta(\omega)\right\} = 1,$$

тоді $\eta(\omega)$ – деяка в.в. і, якщо існує інтеграл в с.кв. $\int_a^b \xi_t dt$, то $\int_a^b \xi_t dt = \eta$ м.н. Більш того, якщо процес $\{\xi_t, t \in [a, b]\}$ вимірний та неперервний в с.кв., тоді

$$\left(\int_a^b \xi_t dt\right)(\omega) = \int_{[a,b]} \xi_t(\omega)\, dt \text{ м.н.}$$

Приклад (знаходження інтеграла в с.кв. в явному вигляді). Нехай

$$\xi_t(\omega) = \alpha(\omega)\sin\lambda t + \beta(\omega)\cos\lambda t, \lambda > 0, t \geq 0,$$

α, β – незалежні $N\left(0, \sigma^2\right)$-розподілені в.в. Визначимо процес $\int_0^t \xi_s ds$, $t \geq 0$, та знайдемо його одновимірні розподіли.

Раніше було встановлено неперервність в с.кв. процесу ξ_t, крім того, він є неперервний м.н., а значить є інтегровний в і с.кв., і м.н. Розглянемо по-траєкторний інтеграл Рімана:

$$\int_0^t \xi_s(\omega)\, ds = \frac{\alpha(\omega)}{\lambda}(1 - \cos\lambda t) + \frac{\beta(\omega)}{\lambda}\sin\lambda t, t \geq 0.$$

Отже, м.н.

$$\left(\int_0^t \xi_s ds\right)(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{\lambda}(1 - \cos\lambda t) + \frac{\beta(\omega)}{\lambda}\sin\lambda t.$$

Більш того, $\int_0^t \xi_s ds$ як границя сум нормально розподілених в.в. має нормальний розподіл з середнім $\int_0^t m_s ds = 0$ та дисперсією

$$\mathsf{D}\left(\int_0^t \xi_s ds\right) = \frac{2\sigma^2}{\lambda^2}(1 - \cos\lambda t).$$

Приклад (інтеграл в с.кв. від процесу Вінера)**.** Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – стандартний процес Вінера. Знайти спільну щільність для W_t та $\int_0^t W_s ds$.

Для стандартного процесу Вінера $m_t = 0$ та $\gamma_{s,t} = s \wedge t$, тобто виконані умови теореми про критерій інтегровності в с.кв. і існує $\int_0^t W_s ds$. Оскільки траєкторії процесу Вінера неперервні м.н., то цей інтеграл м.н. дорівнює потраєкторному інтегралу: $\left(\int_0^t W_s ds\right)(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_{k+1}}(\omega)\,\Delta t_k$ – площа під деякою траєкторією W на $[0, t]$. Враховуючи що $W_{t_0} = W_0 = 0$ м.н., доданки суми $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t_{k+1}}(\omega)\,\Delta t_k$ можна подати як

$$W_{t_1}\Delta t_0 = \Delta W_{t_0}\Delta t_0,$$

$$W_{t_2}\Delta t_1 = \Delta W_{t_0}\Delta t_1 + \Delta W_{t_1}\Delta t_1,$$

$$\vdots$$

$$W_{t_n}\Delta t_{n-1} = \Delta W_{t_0}\Delta t_{n-1} + \ldots + \Delta W_{t_{n-1}}\Delta t_{n-1}.$$

А значить, якщо $\Delta t_k = \frac{t}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, то саму суму можемо переписати як

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{t_{k+1}}\Delta t_k = \frac{t}{n}\left(n\Delta W_{t_0} + (n-1)\,\Delta W_{t_1} + \ldots + \Delta W_{t_{n-1}}\right).$$

Звідки випливає, що ця сума має нормальний розподіл з середнім 0 та дисперсією

$$\left(\frac{t}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{t^3}{6n^3} n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

Оскільки дисперсія прямує до $\frac{t^3}{3}$, коли $n \to \infty$, робимо висновок, що $\int_0^t W_s ds$ як границя суми нормально розподілених в.в. має розподіл $N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$.

Застосовуючи наслідок про характеристики інтегралу в с.кв.,

$$\operatorname{cov}\left(W_t, \int_0^t W_s ds\right) = \int_0^t \gamma_{t,s} ds = \int_0^t (t \wedge s)\, ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

Звідки виводимо, що коваріаційна матриця вектора $\left(W_t, \int_0^t W_s ds\right)$ має вигляд

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

і спільна щільність визначена таким співвідношенням

$$f\,(x, y) = \left((2\pi)^2 \det{(\Sigma)}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(x, y)\,\Sigma^{-1}\,(x, y)^\top\right\},$$

де $\det(\Sigma) = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}$ та

$$\Sigma^{-1} = \frac{12}{t^4} \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & -\frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & t \end{pmatrix}.$$

Значить,

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{12}}{2\pi t^2} \exp\left\{-\frac{2x^2}{t} + 6\frac{xy}{t^2} - \frac{6y^2}{t^3}\right\}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Довести, що $\operatorname{cov}\left(\int_a^b \xi_t dt, \int_c^d \xi_s ds\right) = \int_c^d \int_a^b \gamma_{t,s} dt ds$.

2. Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – в.п. з $m_t = 0$ та $\gamma_{t,s} = \sigma^2 ts$. Знайти значення $\mathsf{E}\left(\int_0^T \xi_t \sin(\pi t/T)\, dt\right)^2$.

3. Нехай ξ_1 та ξ_2 – незалежні однаково розподілені в.в. з середнім m та дисперсією $0 < \sigma^2 < \infty$. Показати, що в.п. $X_t(\omega) = \xi_1(\omega)\, \mathbb{1}_{[0,0.5)}(t) + \xi_2(\omega)\, \mathbb{1}_{[0.5,1]}(t), t \in [0,1]$, є інтегрованим в с.кв. Знайти функцію середніх та коваріаційну функцію для інтегралу.

4. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з параметром $\lambda = 1$ та $\tilde{N}_t = N_t - t, t \geq 0$, – відповідний компенсований процес. Визначити $\mathsf{E}\left(\int_0^1 \tilde{N}_t dt \times \int_1^2 \tilde{N}_t dt \times \int_2^3 \tilde{N}_t dt\right)$.

2. ПРОЦЕС ПУАССОНА

Розглянемо стохастичний експеримент, який полягає у реєструванні певних однорідних подій протягом відрізку часу $[0, t]$ (наприклад, дзвінків до АТС, нещасних випадків на перехресті). Розіб'ємо відрізок $[0, t]$ на n проміжків однакової довжини. Припустивши що на кожному проміжку події відбуваються незалежним чином одна від одної і з однаковою інтенсивністю, отримаємо схему Бернуллі. Збільшуючи n, імовірність настання події на кожному проміжку зменшується і для загальної кількості подій на $[0, t]$ можна застосувати модель Пуассона.

2.1. Означення та поведінка траєкторій

Визначення. (Перше визначення процесу Пуассона: процес Пуассона як процес Леві). Процес з незалежними приростами $\{N_t, t \geq 0\}$ називають (*простим*) *процесом Пуассона* з інтенсивністю λ, якщо $N_0 = 0$ м.н. та для довільних $0 \leq s < t$ приріст $N_t - N_s$ має розподіл $Pois\left(\lambda\left(t - s\right)\right)$.

Зокрема, з означення маємо, що

$$\mathsf{P}\left\{N_t = k\right\} = \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \mathsf{E} N_t = \lambda t \text{ та } \gamma_{st} = \lambda\left(s \wedge t\right).$$

Крім того, за законом великих чисел

$$\frac{1}{m} N_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(N_k - N_{k-1}\right) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \mathsf{E} N_1 = \lambda \text{ м.н.},$$

тобто інтенсивність визначає середню частоту появи події за одиницю часу.

Вправа 2.1. Знайти $\mathsf{P}\left\{N_1 = 3, N_2 = 5\right\}$.

З подання функції середніх та коваріаційної функції випливає неперервність в с.кв. процесу Пуассона, а значить і стохастична неперервність. З теореми про cadlag модифікацію для стохастично неперервного процесу з незалежними приростами одержуємо існування модифікації процесу з неперервними справа траєкторіями. Саме цю модифікацію будемо розглядати в подальшому.

Визначення. (Друге визначення процесу Пуассона: процес Пуассона як процес чистого народження). Процес з незалежними приростами $\{N_t, t \geq 0\}$ зі значеннями в $\mathbb{Z}_+$ та неспадними траєкторіями називають процесом Пуассона з інтенсивністю λ, якщо справедливі такі умови:

1. $N_0 = 0$ м.н.;

2. $\mathsf{P}\left\{N_{t+h} - N_t = 1\right\} = \lambda h + o\left(h\right)$,

3. $\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t > 1\} = o(h)$, $h \to 0$.

Теорема 2.1 (про еквівалентність першого та другого визначень процесу Пуассона)**.** *Перше та друге визначення процесу Пуассона еквівалентні.*

Доведення. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона за першим визначенням, тоді для $h > 0$:

$$\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h \left(1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \dots\right) = \lambda h + o(h),$$

а також для достатньо малого h такого, що $\lambda h < \frac{1}{2}$, виводимо, що

$$\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t > 1\} = \sum_{k>1} e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!} \leq \frac{1}{2} e^{-\lambda h} \sum_{k>1} (\lambda h)^k \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \frac{(\lambda h)^2}{1 - \lambda h} \leq (\lambda h)^2 = o(h), h \to 0.$$

Оскільки $\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t \in \mathbb{Z}_+\} = 1$ для довільного $h > 0$, маємо що усі траєкторії є невід'ємними та цілочисельними.

Нехай тепер $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона за другим визначенням. Позначимо

$$p_n(t) = \mathsf{P}\{N_t = n\}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для $n = 0$ та $h > 0$ маємо, що

$$p_0(t+h) = \mathsf{P}\{N_{t+h} = 0\} = \mathsf{P}\{N_t = 0\} \mathsf{P}\{N_{t+h} = 0 | N_t = 0\}.$$

Враховуючи незалежність приростів, отримаємо

$$p_0(t+h) = \mathsf{P}\{N_t = 0\} \mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\} = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)).$$

Звідки

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + o(1),$$

тобто для $p_0(t)$ маємо таке диференційне рівняння $\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t)$ або

$$d \ln p_0(t) = -\lambda dt.$$

Враховуючи початкову умову $p_0(0) = \mathsf{P}\{N_0 = 0\} = 1$, виводимо що

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Нехай тепер $n \geq 1$. Запишемо подію $\{N_{t+h} = n\}$ як об'єднання несумісних подій $\{N_{t+h} = n, N_t = n\}$, $\{N_{t+h} = n, N_t = n-1\}$ та $\{N_{t+h} = n, N_t < n-1\}$, тоді маємо

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h).$$

Звідки одержимо таке диференційне рівняння

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

з початковою умовою $p_n(0) = 0$. Відмітимо, що це диференційне рівняння отримане для правих похідних, проте аналогічні судження для приростів $N_t - N_{t-h}$ вказують, що ці рівняння мають місце і для лівих похідних.

Для $n = 1$ маємо, що

$$p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}, p_1(0) = 0.$$

Позначимо $q_1(t) = e^{\lambda t}p_1(t)$, тоді

$$q_1'(t) = \lambda e^{\lambda t}p_1(t) + p_1'(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda p_1(t) + p_1'(t)) = \\ = e^{\lambda t}\left(\lambda e^{-\lambda t}\right) = \lambda, q_1(0) = 0.$$

Значить,

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Загальний результат доведемо за індукцією. Для $n = 1$ потрібне співвідношення вже встановлено і припустимо, що $p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$. Покажемо, що відповідна формула має місце і для $n + 1$. Дійсно, з диференційних рівнянь для $p_n(t)$ маємо

$$p_{n+1}'(t) + \lambda p_{n+1}(t) = \lambda p_n(t) = \frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!}e^{-\lambda t}, p_{n+1}(0) = 0.$$

Звідки

$$p_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda t}.$$

Отже, $N_t \sim Pois(\lambda t)$.

Позначимо

$$Y_t = N_{t+s} - N_s, t \geq 0, s > 0.$$

Для так визначеного процесу маємо, що $Y_0 = 0$ м.н., Y_t має незалежні прирости та

$$\mathsf{P}\{Y_{t+h} - Y_t = 1\} = \mathsf{P}\{N_{t+s+h} - N_{t+s} = 1\} = \lambda h + o(h)$$

і

$$\mathsf{P}\{Y_{t+h} - Y_t > 1\} = o(h), h \to 0.$$

Значить за доведеним вище $Y_t \sim Pois(\lambda t)$, а отже

$$N_{t+h} - N_t \sim Pois(\lambda h).$$

Звідки робимо висновок, що усі умови першого визначення виконані. □

Вправа 2.2. Нехай $Q_t(z)$ – твірна функція розподілу N_t. Застосовуючи метод твірних функцій, показати що з диференційних рівнянь для $p_n(t)$, отриманих під час доведення теореми про еквівалентність першого та другого визначень процесу Пуассона, можемо одержати таке рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t(z) = \lambda (z-1) Q_t(z).$$

Знайти розв'язок цього диференційного рівняння і показати, що N_t має розподіл Пуассона з параметром λt.

Приклад (умова ординарності)**.** З доведеної теореми випливає, що для процесу Пуассона м.н. траєкторії кусково-сталі з цілочисельними стрибками. Покажемо, що величини стрибків можна вважати рівними 1. Тобто, що ймовірність того, що траєкторія має хоча б один стрибок більший за 1, дорівнює 0. Для цього достатньо показати, що на будь-якому заданому скінченному інтервалі $(0, T)$ імовірність стрибка більшого за 1 дорівнює 0. Розглянемо

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0<j<n}\left\{N_{\frac{j+1}{n}T} - N_{\frac{j-1}{n}T}\right\} > 1\right\} \le \sum_{j=1}^{n-1} \mathsf{P}\left\{N_{\frac{j+1}{n}T} - N_{\frac{j-1}{n}T} > 1\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \mathsf{P}\left\{N_{\frac{j+1}{n}T} - N_{\frac{j-1}{n}T} = 0\right\} - \mathsf{P}\left\{N_{\frac{j+1}{n}T} - N_{\frac{j-1}{n}T} = 1\right\}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - e^{-\lambda\frac{2T}{n}} - \lambda\left(\frac{2T}{n}\right)e^{-\lambda\frac{2T}{n}}\right) =$$

$$= (n-1)\left(1 - e^{-\lambda\frac{2T}{n}} - \lambda\left(\frac{2T}{n}\right)e^{-\lambda\frac{2T}{n}}\right) \to 0, n \to \infty.$$

Якщо б траєкторії мали на $(0, T)$ стрибок більший за 1, то цей максимум був би більший за 1 для довільного n м.н. Умову відсутності стрибків більших за 1 можна проінтерпретувати як неможливість появи більш ніж однієї події в певний момент часу (цю умову ще називають *умовою ординарності*).

Теорема 2.2 (про ординарний однорідний процес з незалежними приростами)**.** *Однорідний процес з незалежними приростами* $\{N_t, t \ge 0\}$*, який м.н. починається з нуля, має неспадні кусково-сталі неперервні справа та з одиничними стрибками траєкторії, є процесом Пуассона.*

Доведення. Раніше було доведено, що для $p_0(t) = \mathsf{P}\{N_t = 0\}$ має місце рівність

$$p_0(t+s) = p_0(t)\,\mathsf{P}\{N_{t+s} - N_t = 0\}.$$

Внаслідок однорідності процесу

$$p_0(t+s) = p_0(t)\,p_0(s),$$

тобто $p_0(t)$ – мультиплікативна функція. Неперервність справа траєкторій дає неперервність справа цієї функції.

Якщо $p_0(t_0) = 0$ для деякої точки $t_0 > 0$, тоді

$$0 = p_0(t_0) = p_0\left(\frac{t_0}{2}\right) p_0\left(\frac{t_0}{2}\right) = p_0^3\left(\frac{t_0}{3}\right) = \ldots.$$

Тобто $p_0(t) = 0$ для всіх точок як завгодно близьких до $t = 0$. Звідки, для усіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $\mathsf{P}\left\{N_{\frac{t_0}{n}} \geq 1\right\} = 1$ або з урахуванням однорідності та незалежності приростів $\mathsf{P}\{N_{t_0} \geq n\} = 1$, а це суперечить тому, що процес скінченний. Отже, $p_0(t)$ ніде не дорівнює 0 і єдиний ненульовий розв'язок рівняння $p_0(t+s) = p_0(t)\, p_0(s)$ має вигляд

$$p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

де $\lambda \geq 0$ деяка стала[13]. Оскільки $\lambda = 0$ визначає тривіальний випадок, надалі розглянемо лише випадок $\lambda > 0$.

Внаслідок однорідності одержуємо, що

$$\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\} = p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$$

і для доведення теореми залишилось показати, що

$$\mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t > 1\} = o(h).$$

Для цього подамо N_h як суму незалежних однаково розподілених в.в.

$$N_{\frac{k+1}{2^n}h} - N_{\frac{k}{2^n}h}, k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

За умовою теореми, починаючи з деякого номера n, усі доданки не більші за 1, і за умови $\{N_h > 1\}$ маємо, що принаймні два з цих доданків більше нуля. Тому,

$$\mathsf{P}\{N_h > 1\} \leq \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\cup_{i<j}^{2^n}\left\{N_{\frac{i+1}{2^n}h} - N_{\frac{i}{2^n}h} > 0, N_{\frac{j+1}{2^n}h} - N_{\frac{j}{2^n}h} > 0\right\}\right) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i<j}^{2^n} \mathsf{P}\left\{N_{\frac{i+1}{2^n}h} - N_{\frac{i}{2^n}h} > 0, N_{\frac{j+1}{2^n}h} - N_{\frac{j}{2^n}h} > 0\right\}.$$

В сумі по $i, j : 0 \leq i < j \leq 2^n - 1$ усього $C_{2^n}^2 = 2^{n-1}(2^n - 1)$ доданків, причому внаслідок однорідності усі доданки однакові, тоді

$$\mathsf{P}\{N_h > 1\} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}(2^n - 1)\left(\mathsf{P}\left\{N_{\frac{h}{2^n}} > 0\right\}\right)^2.$$

[13] Див., наприклад, *Reem D.* Remarks on the Cauchy functional equation and variations of it. Aequat. Math. 2017. Vol. 9. P. 237–264.

Оскільки
$$\mathsf{P}\{N_h > 0\} = 1 - p_0(h) = 1 - e^{-\lambda h} \le \lambda h$$
для достатньо малого h, зі встановленої раніше нерівності отримаємо, що
$$\mathsf{P}\{N_h > 1\} \le \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}(2^n - 1)\left(\frac{\lambda h}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2}(\lambda h)^2 = o(h), h \to 0.$$
Отже, процес $\{N_t, t \ge 0\}$ відповідає другому визначенню процесу Пуассона.
$\square$

Зауважимо, що твердження теореми має місце також і у випадку, коли траєкторії неперервні зліва. Така модифікація є передбачуваним процесом.

Для уточнення властивостей траєкторій процесу N_t використаємо таке узагальнення теореми Пуассона.

Теорема 2.3 (Пуассона для схеми серій)**.** *Нехай маємо серію незалежних в.в.* $\left\{\xi_{kn}, k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *зі значеннями в* $\mathbb{Z}_+$ *та нехай*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{kn}.$$
Позначимо $p_{kn} = \mathsf{P}\{\xi_{kn} = 1\}$ *та* $q_{kn} = \mathsf{P}\{\xi_{kn} > 1\}$ *і припустимо, що для* $n \to \infty$ *маємо*
$$\max_{1\le k\le n} p_{kn} \to 0, \sum_{k=1}^{n} p_{kn} \to \lambda > 0, \sum_{k=1}^{n} q_{kn} \to 0,$$
тоді
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{S_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведення. За умов теореми
$$\xi_{kn} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ 1 - p_{kn} - q_{kn} & p_{kn} & u_2 & \dots \end{pmatrix},$$
де $u_m \ge 0$, $m = \overline{2, \infty}$, та $\sum_{m=2}^{\infty} u_m = q_{kn}$. Тоді їх х.ф. має зображення
$$\varphi_{kn}(\alpha) = \mathsf{E} e^{\imath\alpha\xi_{kn}} = (1 - p_{kn} - q_{kn}) + e^{\imath\alpha} p_{kn} + q_{kn} \sum_{m=2}^{\infty} e^{\imath\alpha m} \frac{u_m}{q_{kn}}.$$
Оскільки $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{u_m}{q_{kn}} = 1$, функція $\phi_{kn}(\alpha) = \sum_{m=2}^{\infty} e^{\imath\alpha m} \frac{u_m}{q_{kn}}$ визначає х.ф. деякого розподілу. Тобто,
$$\varphi_{kn}(\alpha) = 1 + (e^{\imath\alpha} - 1) p_{kn} + q_{kn}(\phi_{kn}(\alpha) - 1)$$

і, внаслідок незалежності ξ_{kn}, $k=\overline{1,n}$, для х.ф. суми S_n отримаємо

$$\ln \varphi_{S_n}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \ln \varphi_{kn}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + (\varphi_{kn}(\alpha) - 1)\right).$$

Позначимо $r(z) = \ln(1+z) - z$, тоді $\ln(1+z) = z + r(z)$ та $|r(z)| = |\ln(1+z) - z| \le |z|^2$ в околі 0. Зображення для логарифма х.ф. S_n можемо переписати як

$$\ln \varphi_{S_n}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{kn}(\alpha) - 1) + \sum_{k=1}^{n} r(\varphi_{kn}(\alpha) - 1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_{kn}\left(e^{i\alpha} - 1\right) + \sum_{k=1}^{n} q_{kn}(\phi_{kn}(\alpha) - 1) + \sum_{k=1}^{n} r_{kn}(\alpha),$$

де $r_{kn}(\alpha) = r(\varphi_{kn}(\alpha) - 1)$. Враховуючи умови теореми, розглянемо асимптотику за $n \to \infty$ кожного доданку окремо. Для першого маємо

$$\left(e^{i\alpha} - 1\right) \sum_{k=1}^{n} p_{kn} \to \lambda\left(e^{i\alpha} - 1\right),$$

для другого

$$\left|\sum_{k=1}^{n} q_{kn}(\phi_{kn}(\alpha) - 1)\right| \le 2 \sum_{k=1}^{n} q_{kn} \to 0$$

та для третього

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r_{kn}(\alpha)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |r_{kn}(\alpha)| \le \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{kn}(\alpha) - 1|^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{kn}(\alpha) - 1|\, |\varphi_{kn}(\alpha) - 1| \le \max_{1\le k\le n} |\varphi_{kn}(\alpha) - 1| \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{kn}(\alpha) - 1|,$$

де

$$|\varphi_{kn}(\alpha) - 1| \le \left|e^{i\alpha} - 1\right| p_{kn} + q_{kn} |\phi_{kn}(\alpha) - 1| \le 2(p_{kn} + q_{kn}).$$

Тобто, маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r_{kn}(\alpha)\right| \le 4\left(\max_{1\le k\le n} p_{kn} + \max_{1\le k\le n} q_{kn}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kn} + \sum_{k=1}^{n} q_{kn}\right) \to 0,$$

оскільки перший множник прямує до нуля, а другий обмежений, і значить

$$\ln \varphi_{S_n}(\alpha) \to \lambda\left(e^{i\alpha} - 1\right)$$

та $\varphi_{S_n}(\alpha) \to e^{\lambda\left(e^{i\alpha}-1\right)}$ – х.ф. розподілу Пуассона з параметром λ. □

Теорема 2.4 (про властивості траєкторій процесу Пуассона). *Для процесу Пуассона $\{N_t, t \geq 0\}$ з параметром λ для довільного $t \in \mathbb{R}_+$ та майже усіх $\omega \in \Omega$ існує скінчене число точок $x_0, \ldots, x_\nu$, де $\nu = \nu(t, \omega) \sim Pois(\lambda t)$, таких що $N_s = k - 1$, якщо $s \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, \nu$.*

Доведення. Визначимо такі в.в.

$$\xi_{kn} = \mathbb{1}_{\left\{N_{\frac{k+1}{2^n}t} - N_{\frac{k}{2^n}t} > 0\right\}}$$

і позначимо

$$p_{kn} = \mathsf{P}\{\xi_{kn} = 1\} \text{ та } q_{kn} = \mathsf{P}\{\xi_{kn} > 1\}.$$

Покажемо, що $\left\{\xi_{kn}, k = \overline{0, 2^n - 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ задовольняє умови теореми Пуассона для схеми серій. Оскільки ξ_{kn} визначені приростами N_t на несумісних інтервалах, маємо що ξ_{kn} незалежні. Враховуючи що максимальне значення індикатора дорівнює 1, маємо $q_{kn} = 0$, а значить $\sum_{k=0}^{2^n-1} q_{kn} = 0$. Для ймовірностей p_{kn} отримаємо таке зображення

$$p_{kn} = \mathsf{P}\left\{N_{\frac{k+1}{2^n}t} - N_{\frac{k}{2^n}t} > 0\right\} = \mathsf{P}\left\{N_{\frac{t}{2^n}} > 0\right\} = 1 - \mathsf{P}\left\{N_{\frac{t}{2^n}} = 0\right\} = 1 - e^{-\lambda\frac{t}{2^n}}.$$

Значить

$$\max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} p_{kn} = \left(1 - e^{-\lambda\frac{t}{2^n}}\right) \to 0$$

та

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} p_{kn} = 2^n\left(1 - e^{-\lambda\frac{t}{2^n}}\right) = 2^n\left(\frac{\lambda t}{2^n} + o\left(\frac{t^2}{2^{2n}}\right)\right) \to \lambda t,$$

якщо $n \to \infty$. Тобто, за теоремою Пуассона для схеми серій

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{kn} \xrightarrow{d} \nu \sim Pois(\lambda t).$$

Отже, кількість проміжків розбиття ν_n, на яких процес має ненульові прирости, збігається за розподілом до в.в., яка має розподіл Пуассона.

Для кожного розбиття існує скінченна кількість проміжків ν_n, причому їх сумарна довжина

$$\frac{\nu_n t}{2^n} \to 0, \forall \omega \in \Omega.$$

Тобто, на $[0, t]$ існує скінчена кількість точок $x_0, \ldots, x_\nu$ таких, що на інтервалах $[x_0, x_1)$, $\ldots$, $[x_{\nu-1}, x_\nu)$ значення процесу N_s є сталим. Як було встановлено раніше стрибки з імовірністю 1 не більші за 1 та траєкторії є неспадними та цілозначними. Значить траєкторії процесу N_s на $[x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1, \nu}$, приймають значення $k - 1$ і в точках x_k зростають на 1 одиницю. □

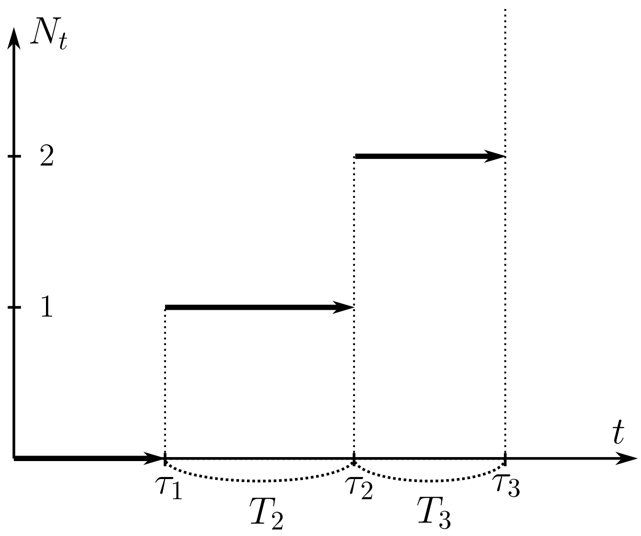


Рис. 2.1. Траєкторія процесу Пуассона

Типова траєкторія процесу Пуассона має вигляд кусково-сталої функції, яка починається з нуля, і через певний проміжок часу відбувається стрибок величиною 1, потім знов залишається сталою певний період часу, і так далі. Кількість точок розривів на $[0, t]$ має розподіл Пуассона з параметром λt.

Позначимо через $\{\tau_k\}$ моменти, в яких відбуваються стрибки, їх можна інтерпретувати як моменти реєстрації настання деякої події (наприклад, надходження запиту на сервер), тоді

$$T_k = \tau_k - \tau_{k-1}, k \geq 2,$$

(див. рис. 2.1.) визначають час між послідовними стрибками (реєстраціями подій). Для $t > 0$ з рівності

$$\{\tau_1 > t\} = \{N_t = 0\}$$

одержуємо, що

$$\mathsf{P}\{\tau_1 > t\} = \mathsf{P}\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t},$$

тобто $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$. Важливою властивістю експоненційного розподілу є властивість відсутності післядії:

$$\mathsf{P}\{\tau_1 > s + t | \tau_1 > s\} = \mathsf{P}\{\tau_1 > t\}.$$

Вправа 2.3. Споживачі заходять до крамниці у відповідності до процесу Пуассона з інтенсивністю 2 споживача за хвилину. Касир відкрив крамницю, але згадав, що йому потрібно відлучитись на 1 хвилину, і обмірковує два варіанта поведінки: піти зразу або зачекати півхвилини, щоб пересвідчитись, що нікого немає, і потім піти. Яка ймовірність того, що він встигне повернутись до появи першого споживача?

Вправа 2.4. Час життя лампи прожектора має розподіл $Exp\,(5)$. Протягом звичайного тижня прожектор працює $Pois\,(10)$-розподілену кількість годин. Прожектор пропрацював тиждень, яка ймовірність того, що наступний тиждень не виникне необхідності замінювати лампу?

Вправа 2.5. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ, θ – деяка в.в. Показати, що N_θ є в.в. та визначити її розподіл, якщо:

1. $\theta = \min\{t : N_t = k\}$;

2. $\theta \sim Exp\,(s)$, незалежна від N_t.

Лема 2.1 (про щільність функціонального перетворення випадкового вектора)**.** *Нехай випадковий вектор X має спільну щільність $f_X\,(x)$ з носієм $S_X \subset \mathbb{R}^n$, відображення $g : S_X \to S_Y$, $S_Y \subset \mathbb{R}^n$ бієктивне неперервно диференційовне, причому g^{-1} також неперервно диференційовне, тоді випадковий вектор $Y = g\,(X)$ має спільну щільність*

$$f_Y\,(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}\,(y)\right)\left|\det\left(\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right)\right|, & y \in S_Y, \\ 0, & y \notin S_Y. \end{cases}$$

Доведення. Для довільної $B \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathsf{P}\,\{Y \in B\} = \mathsf{P}\left\{X \in g^{-1}\,(B)\right\} = \int_{g^{-1}(B)} f_X\,(x)\,dx.$$

Зробивши заміну $x = g^{-1}\,(y)$ під знаком інтеграла, маємо

$$\mathsf{P}\,\{Y \in B\} = \int_B f_X\left(g^{-1}\,(y)\right)\left|\det\left(\frac{\partial g^{-1}\,(y)}{\partial y}\right)\right| dy.$$

Звідки отримаємо формулу для щільності Y. □

Вправа 2.6. Нехай ξ та η – незалежні в.в., що мають розподіл $Exp\,(\lambda)$. Знайти спільний розподіл $\xi - \eta$ та $\xi + \eta$.

Теорема 2.5 (про розподіл часу між появою подій для простого процесу Пуассона)**.** *Нехай $\{\tau_k\}$ – моменти стрибків процесу Пуассона $\{N_t, t \geq 0\}$ та $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k \geq 2$, $T_1 = \tau_1$. Тоді*

1. *$\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – послідовність незалежних $Exp\,(\lambda)$-розподілених в.в.;*

2. *$\tau_k \sim Erlang\,(k, \lambda)$.*

Доведення. Раніше було встановлено що

$$T_1 = \tau_1 \sim Exp\,(\lambda) = Erlang\,(1, \lambda)\,.$$

Нехай $k \geq 2$ і розглянемо

$$F\,(t_1, \ldots, t_k) = \mathsf{P}\,\{\tau_1 \leq t_1, \ldots, \tau_k \leq t_k\}$$

за умови $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$. Подію $\{\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2\}$, якщо $t_1 \leq t_2$, можна подати як об'єднання несумісних подій $\{\tau_1 \leq t_1 \leq \tau_2 \leq t_2\}$ та $\{\tau_2 \leq t_1\}$. Тоді

$$\begin{aligned} F\,(t_1, \ldots, t_k) = \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \tau_2 \leq t_2, \ldots, \tau_k \leq t_k\} +{} \\ + \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_2 \leq t_1, \tau_3 \leq t_3, \ldots, \tau_k \leq t_k\}\,. \end{aligned}$$

Застосовуючи послідовно аналогічні міркування, одержимо таке подання

$$\begin{aligned} F\,(t_1, \ldots, t_k) &= \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \tau_2 \leq t_2 \leq \tau_3, \ldots, \tau_k \leq t_k\} +{} \\ &+ \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 < \tau_2 < \tau_3 \leq t_2, \ldots, \tau_k \leq t_k\} +{} \\ &+ \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_2 \leq t_1, \tau_3 \leq t_2, \ldots, \tau_k \leq t_k\} = \cdots = \\ &= \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}, \tau_k \leq t_k\} +{} \\ &+ \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_2 \leq t_1, \tau_3 \leq t_3, \ldots, \tau_k \leq t_k\} + \ldots +{} \\ &+ \mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-2}, \tau_k \leq t_k\}\,. \end{aligned}$$

Оскільки подію

$$\{t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}, \tau_k \leq t_k\}$$

можна подати як різницю

$$\{t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}\} \setminus \{t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}, \tau_k > t_k\}\,,$$

одержуємо

$$F\,(t_1, \ldots, t_k) = -\mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}, \tau_k > t_k\} + \sum_{i=1}^{k-1} g_i,$$

де функції $g_i = g_i\,(t_1, \ldots, t_k)$, причому кожна не залежить хоча б від одного t_j, $j = \overline{1,k}$. Розпишемо окремо перший доданок, застосовуючи незалежність та пуассоновість приростів,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\,\{t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq \tau_{k-1} \leq t_{k-1}, \tau_k > t_k\} = \\ &\quad = \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = 1, \ldots, N_{t_{k-1}} - N_{t_{k-2}} = 1, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = 0\right\} = \\ &\quad = \prod_{i=1}^{k-1} \mathsf{P}\left\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = 1\right\} \times \mathsf{P}\left\{N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = 0\right\} = \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\lambda \left(t_i - t_{i-1}\right) e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \right) =$$

$$= \lambda^{k-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})} \prod_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_{i-1}\right) = \lambda^{k-1} e^{-\lambda t_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Тобто, маємо

$$F\left(t_1, \ldots, t_k\right) = -\lambda^{k-1} e^{-\lambda t_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{k-1} g_i.$$

Якщо аргументи F не формують впорядковану послідовність, то вираз, що визначатиме цю функцію, не буде явно залежати від одного чи декілька аргументів. Отже, спільна щільність для $\{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$ має зображення

$$f_{\tau_1, \ldots, \tau_k}\left(t_1, \ldots, t_k\right) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} F\left(t_1, \ldots, t_k\right) = \lambda^k e^{-\lambda t_k} \mathbb{1}_{\{0 \le t_1 \le \ldots \le t_k\}}.$$

Для знаходження спільного розподілу для $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1$, $\ldots$, $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ застосуємо лему про щільність функціонального перетворення випадкового вектора. Оскільки

$$g_1(x) = x_1, g_2(x) = x_2 - x_1, \ldots, g_k(x) = x_k - x_{k-1},$$

маємо $g_i^{-1}(y) = \sum_{j=1}^{i} y_j$ та

$$\left| \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Звідки,

$$f_{T_1, \ldots, T_k}\left(y_1, \ldots, y_k\right) = f_{\tau_1, \ldots, \tau_k}\left(y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + \ldots + y_k\right) =$$
$$= \lambda^k e^{-\lambda(y_1 + \ldots + y_k)} \mathbb{1}_{\{y_1, \ldots, y_k \ge 0\}} = \lambda e^{-\lambda y_1} \mathbb{1}_{\{y_1 \ge 0\}} \times \ldots \times \lambda e^{-\lambda y_k} \mathbb{1}_{\{y_k \ge 0\}}.$$

Тобто, $\{T_i\}$ – незалежні $Exp(\lambda)$-розподілені, а значить $\tau_k = T_1 + \ldots + T_k$ має розподіл $Erlang(k, \lambda)$. □

Вправа 2.7. Показати, що пункт 2) доведеної теореми можна обґрунтувати, відштовхуючись від того, що $\{\tau_k > t\} = \{N_t < k\}$.

Вправа 2.8. Показати, що для $1 < m < k$ спільна щільність для моментів $\{\tau_m, \ldots, \tau_k\}$ може бути подана як

$$f_{\tau_m, \ldots, \tau_k}\left(y_m, \ldots, y_k\right) = \lambda^k \frac{\left(y_m\right)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda y_k}, 0 \le y_m \le \ldots \le y_k,$$

а для $\{\tau_m, \tau_k\}$:

$$f_{\tau_m,\tau_k}(y_m, y_k) = \frac{y_m^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(y_k - y_m)^{k-m-1}}{(k-m-1)!}\lambda^k e^{-\lambda y_k}, 0 < y_m < y_k.$$

Для визначення процесу Пуассона можемо відштовхуватись від моментів $\{\tau_k\}$. Як і раніше розглянемо стохастичний експеримент, який полягає у реєструванні настання деяких однотипних подій (наприклад, страхових випадків за певним типом страхування). Позначимо через τ_k момент настання k-ої події.

Визначення. Якщо м.н. $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$ і $\lim_n \tau_n = \infty$, то послідовність $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ називають *стохастичним потоком подій* (*точковим процесом на прямій*).

Зі стохастичним потоком можемо пов'язати так званий *лічильний* процес $\{N_t, t \geq 0\}$:

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq t\}}.$$

Так визначений процес характеризує кількість подій, які відбулись на момент часу t. Умова того, що усі τ_k м.н. різні, забезпечує ординарність лічильного процесу. Відмітимо, що деякий лічильний процес задає певний стохастичний потік подій. Якщо процес $\{N_t, t \geq 0\}$ починається з нуля, має неспадні кусково-сталі неперервні справа траєкторії з одиничними приростами, тоді

$$\tau_n = \inf\{t > 0 : N_t = n\}, n \in \mathbb{N},$$

визначає деякий стохастичний потік подій.

Для стохастичного потоку подій, пов'язаних з процесом Пуассона, час між стрибками $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k \geq 2$, $T_1 = \tau_1$ є незалежними та $Exp(\lambda)$-розподіленими в.в. Такий потік називають *простим*.

Вправа 2.9. Визначити одновимірний розподіл для лічильного процесу, що відповідає простому стохастичному потоку. Припускаючи, що інтенсивність потоку $\lambda = \frac{1}{10}$, визначити очікуваний час досягнення лічильним процесом рівня $n = 11$.

Теорема 2.6 (про третє визначення процесу Пуассона). *Якщо лічильний процес $\{N_t, t \geq 0\}$ відповідає простому стохастичному потоку подій, тоді він є процесом Пуассона.*

Доведення. Покажемо, що лічильний процес N_t відповідає першому визначенню процесу Пуассона. За означенням $N_0 = 0$ м.н. Покажемо, що прирости $\left\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}, i = \overline{1,k}\right\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, незалежні та пуассоново розподілені. Розглянемо лише випадок $k = 2$, для $k > 2$ доведення можна провести за аналогічною схемою (див. рис. 2.2.):

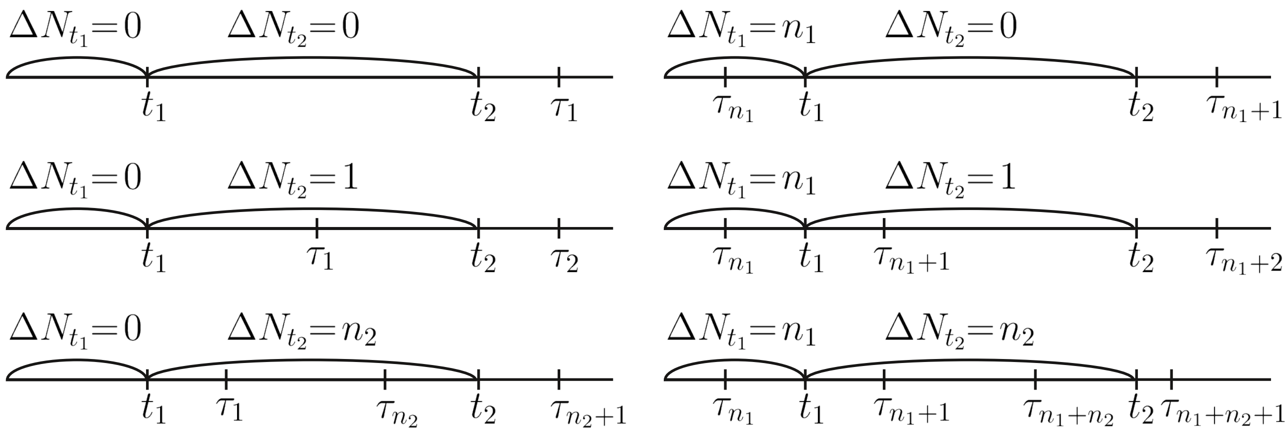


Рис. 2.2. Прирости та моменти стрибків процесу Пуассона

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = 0, N_{t_2} - N_{t_1} = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{N_{t_2} = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_1 > t_2\right\} = e^{-\lambda t_2} = \\ = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda t_1}$$

та

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = 0, N_{t_2} - N_{t_1} = 1\right\} = \mathsf{P}\left\{N_{t_1} = 0, N_{t_2} = 1\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{t_1 < \tau_1 \le t_2 < \tau_2\right\} = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} f_{\tau_1,\tau_2}\left(y_1, y_2\right) dy_1 dy_2 = \\ = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} \lambda^2 e^{-\lambda y_2} dy_1 dy_2 = \lambda\left(t_2 - t_1\right) e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda t_1}.$$

Для $n_2 \ge 2$

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = 0, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2\right\} = \mathsf{P}\left\{t_1 < \tau_1 < \tau_{n_2} \le t_2 < \tau_{n_2+1}\right\} = \\ = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{y_{n_2}} f_{\tau_1,\tau_{n_2},\tau_{n_2+1}}\left(y_1, y_{n_2}, y_{n_2+1}\right) dy_1 dy_{n_2} dy_{n_2+1} = \\ = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{y_{n_2}} \ldots \int_{t_1}^{y_2} f_{\tau_1,\ldots,\tau_{n_2+1}}\left(y_1, \ldots, y_{n_2+1}\right) dy_1 \ldots dy_{n_2-1} dy_{n_2} dy_{n_2+1} = \\ = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{y_{n_2}} \frac{\lambda^{n_2+1}}{(n_2-2)!}\left(y_{n_2} - y_{n_2-1}\right)^{n_2-2} e^{-\lambda y_{n_2+1}} dy_{n_2-1} dy_{n_2} dy_{n_2+1} = \\ = \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!}\left(t_2 - t_1\right)^{n_2} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda t_1}.$$

Розглянемо тепер випадки, коли приріст на першому проміжку ненульовий. Нехай $n_1 \ge 1$, тоді

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_{n_1} \le t_1, t_2 < \tau_{n_1+1}\right\} = \\ = \int_{t_2}^{\infty}\int_{0}^{t_1} f_{\tau_{n_1},\tau_{n_1+1}}\left(y_{n_1}, y_{n_1+1}\right) dy_{n_1} dy_{n_1+1} =$$

$$= \int_{t_2}^{\infty} \int_{0}^{t_1} \lambda^{n_1+1} \frac{(y_{n_1})^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\lambda y_{n_1+1}} dy_{n_1} dy_{n_1+1} =$$
$$= \int_{t_2}^{\infty} \lambda^{n_1+1} e^{-\lambda y_{n_1+1}} dy_{n_1+1} \int_{0}^{t_1} \frac{(y_{n_1})^{n_1-1}}{(n_1-1)!} dy_{n_1} =$$
$$= \lambda^{n_1} e^{-\lambda t_2} \frac{t_1^{n_1}}{n_1!} = \frac{\lambda^{n_1} t_1^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

та

$$\mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = 1\} = \mathsf{P}\{\tau_{n_1} \le t_1 < \tau_{n_1+1} < t_2 < \tau_{n_1+2}\} =$$
$$= \int_{t_2}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{t_1} \lambda^{n_1+2} \frac{(y_{n_1})^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\lambda y_{n_1+2}} dy_{n_1} dy_{n_1+1} dy_{n_1+2} =$$
$$= \lambda^{n_1} \frac{t_1^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda t_1} \lambda (t_2 - t_1) e^{-\lambda(t_2-t_1)},$$

і для $n_2 \ge 2$ матимемо

$$\mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2\} = \mathsf{P}\{N_{t_1} = n_1, N_{t_2} = n_2 + n_1\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\tau_{n_1} \le t_1 < \tau_{n_1+1} < \tau_{n_1+n_2} \le t_2 < \tau_{n_1+n_2+1}\} =$$
$$= \int_{t_2}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{y_3} \int_{0}^{t_1} f_{\tau_{n_1}, \tau_{n_1+1}, \tau_{n_1+n_2}, \tau_{n_1+n_2+1}} (y_1, \ldots, y_4) \, dy_1 \ldots dy_4.$$

За теоремою про розподіл часу між появою подій для простого процесу Пуассона

$$\tau_{n_1} \sim Erlang\,(n_1, \lambda)\,, \tau_{n_1+1} - \tau_{n_1} = T_{n_1+1} \sim Exp\,(\lambda)\,,$$

$$\tau_{n_1+n_2} - \tau_{n_1+1} \sim Erlang\,(n_2 - 1, \lambda) \text{ та } \tau_{n_1+n_2+1} - \tau_{n_1+n_2} \sim Exp\,(\lambda)\,,$$

і ці в.в. незалежні, тому

$$f_{\tau_{n_1}, \tau_{n_1+1}-\tau_{n_1}, \tau_{n_1+n_2}-\tau_{n_1+1}, \tau_{n_1+n_2+1}-\tau_{n_1+n_2}} (x_1, \ldots, x_4) =$$
$$= \frac{\lambda^{n_1} x_1^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} \frac{\lambda^{(n_2-1)} x_3^{n_2-2}}{(n_2-2)!} e^{-\lambda x_3} \lambda e^{-\lambda x_4}.$$

Застосуємо лему про щільність функціонального перетворення випадкового вектора з $g_1(x_1, \ldots, x_4) = x_1$, ..., $g_4(x_1, \ldots, x_4) = x_1 + \ldots + x_4$. Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_1 + x_2, \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 - y_1, \\ x_3 = y_3 - y_2, \\ x_4 = y_4 - y_3, \end{cases}$$

звідки

$$\left| \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & f_{\tau_{n_1}, \tau_{n_1+1}, \tau_{n_1+n_2}, \tau_{n_1+n_2+1}} (y_1, \ldots, y_4) = \\ & \quad = f_{\tau_{n_1}, \tau_{n_1+1} - \tau_{n_1}, \tau_{n_1+n_2} - \tau_{n_1+1}, \tau_{n_1+n_2+1} - \tau_{n_1+n_2}} (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, y_4 - y_3) = \\ & \quad\quad = \frac{\lambda^{n_1} y_1^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\lambda y_1} \lambda e^{-\lambda(y_2-y_1)} \frac{\lambda^{(n_2-1)} (y_3-y_2)^{n_2-2}}{(n_2-2)!} e^{-\lambda(y_3-y_2)} \lambda e^{-\lambda(y_4-y_3)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи отримане співвідношення для спільної щільності, маємо

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2\} = \\ & = \int_{t_2}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{y_3} \int_0^{t_1} \frac{\lambda^{n_1+n_2+1}}{(n_1-1)!\,(n_2-2)!} y_1^{n_1-1} (y_3-y_2)^{n_2-2} e^{-\lambda y_4} dy_1 \ldots dy_4 = \\ & = \frac{\lambda^{n_1+n_2}}{(n_1-1)!\,(n_2-2)!} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^{y_3} \left(\int_0^{t_1} y_1^{n_1-1} dy_1 \right) (y_3-y_2)^{n_2-2} dy_2 \right) dy_3 e^{-\lambda t_2} = \\ & \quad = \frac{\lambda^{n_1+n_2}}{(n_1-1)!\,(n_2-2)!} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^{y_3} (y_3-y_2)^{n_2-2} dy_2 \right) dy_3 \frac{t_1^{n_1}}{n_1} e^{-\lambda t_2} = \\ & \quad\quad = \frac{\lambda^{n_1+n_2}}{n_1!\,(n_2-1)!} \int_{t_1}^{t_2} (y_3-t_1)^{n_2-1} dy_3 t_1^{n_1} e^{-\lambda t_2} = \\ & \quad\quad = \frac{\lambda^{n_1+n_2}}{n_1! n_2!} (t_2-t_1)^{n_2} t_1^{n_1} e^{-\lambda t_2} = \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} (t_2-t_1)^{n_2} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} t_1^{n_1} e^{-\lambda t_1}. \end{aligned}$$

Об'єднуючи результати, виводимо що

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2\} = \\ & \quad = \frac{(\lambda(t_1-t_0))^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda(t_1-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^{n_2}}{n_2!} e^{-\lambda(t_2-t_1)}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Звідки робимо висновок, що прирости незалежні та мають розподіл $Pois(\lambda(t_i - t_{i-1}))$. □

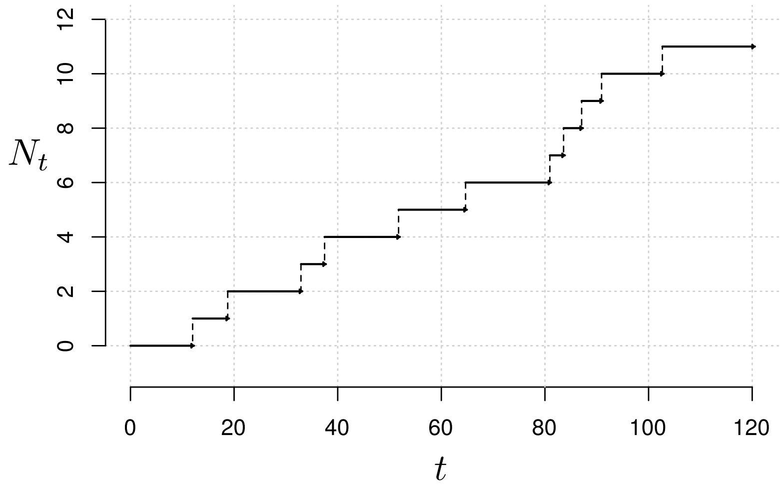


Рис. 2.3. Змодельована траєкторія N_t

Алгоритм 3 Моделювання траєкторії процесу N_t з $\lambda = 1/10$

```
set.seed(112)
require(shape)
l<-0.1
n<-11
T_i<-rexp(n+1,l)
tau_i<-c(0,cumsum(T_i))
Nt<-0:n plot(tau_i,c(Nt,n),type="s",xlim=c(0,tau_i[n+2]),
      ylim=c(-1,n+1),xlab="t",ylab="N_t",lty=2)
Arrows(x0=tau_i[-(n+2)],y0=Nt,x1=tau_i[-1],y1=Nt,
        arr.length = 0.05, arr.width=0.05, lwd=1.5)
grid()
```

Доведений результат вказує, що для моделювання траєкторій процесу Пуассона із заданою інтенсивністю λ, достатньо згенерувати послідовність незалежних $Exp\,(\lambda)$-розподілених в.в., які визначають час між стрибками (див. рис. 2.3. та алгоритм 3).

Приклад (Статистичне моделювання. Час досягнення рівня процесом Пуассона)**.** Нехай маємо простий стохастичний потік з інтенсивністю $\lambda = \frac{1}{10}$. Оцінимо за допомогою методу Монте Карло очікуваний час досягнення лічильним процесом рівня $n = 11$. Для цього згенеруємо $N = 100$ траєкторій та знайдемо середнє значення моментів досягнення рівня n (див. рис. 2.4. та алгоритм 4), а також проведемо серію з 200 таких генерацій та проаналізуємо розподіл середнього часу досягнення рівня для кожної генерації (див. рис. 2.5. та алгоритм 5).

Вправа 2.10. Проаналізувати в умовах попереднього прикладу поведінку емпіричних характеристик залежно від кількості генерувань N та кількості серій цих генерувань.

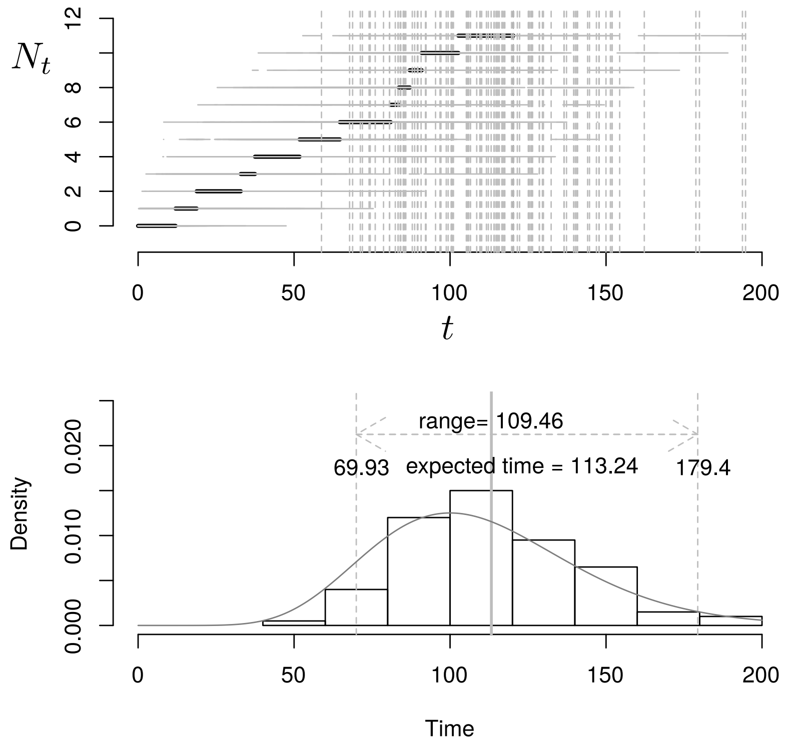


Рис. 2.4. Траєкторії N_t та відповідний час досягнення рівня

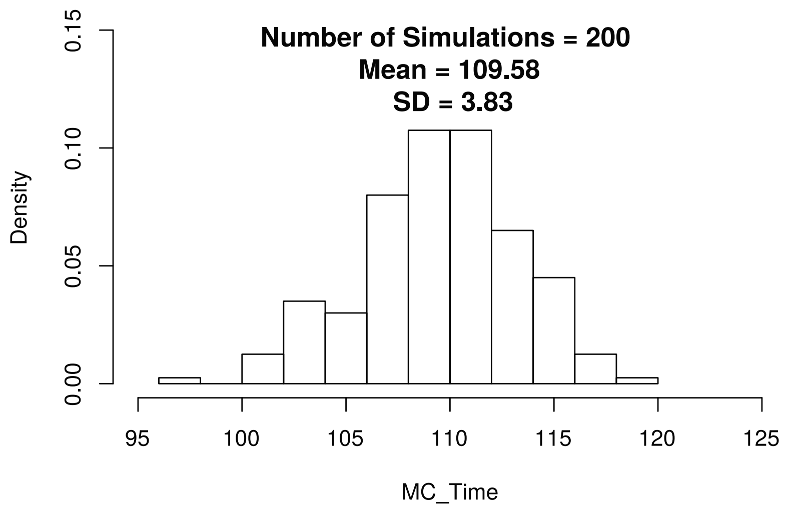


Рис. 2.5. Гістограма середнього час досягнення рівня для серії генерувань

Алгоритм 4 Моделювання траєкторій процесу N_t з $\lambda = 1/10$ та емпіричні характеристики розподілу моменту досягнення рівня $n = 11$

```
par(mfrow=c(2,1))
set.seed(112)

T_i<-rexp(n+1,l);
tau_i<-c(0,cumsum(T_i));
Time<-tau_i[n+2];
Nt<-0:n;

plot(1:1,type="l",xlim=c(0,200),
     ylim=c(-1,n+1), xlab="t",
     ylab="N_t")
segments(x0=tau_i[(n+2)],y0=Nt,x1=tau_i[-1],
        y1=Nt,lwd=3)
abline(v=Time,lty=2)

N<-99
for(i in 1:N){T_i<-rexp(n+1,l);
tau_i<-c(0,cumsum(T_i))
Time<-c(Time,tau_i[n+2])
segments(x0=tau_i[-(n+2)],y0=Nt,x1=tau_i[-1],
         y1=Nt,col="gray")
abline(v=tau_i[n+2],lty=2,col="gray")}

ymax<-0.025
hist(Time,main="",ylim=c(0,ymax),
      xlim=c(0,200),freq=F)
Expected_Time=mean(Time)

abline(v=Expected_Time,col="grey",lwd=2)
text(Expected_Time+10,ymax*0.7,
paste("expected␣time␣=",round(Expected_Time,2)))

Conf_Inerval<-quantile(Time,c(0.025,0.975))
abline(v=Conf_Inerval,col="grey",lty=2)
text(Conf_Inerval[1]+2,ymax*0.7,
     round(Conf_Inerval[1],2))
text(Conf_Inerval[2]+2,ymax*0.7,
     round(Conf_Inerval[2],2))
arrows(x0=Conf_Inerval[1],x1=Conf_Inerval[2],
       y0=ymax*0.85,col="grey",lty=2)
arrows(x1=Conf_Inerval[1],x0=Conf_Inerval[2],
       y0=ymax*0.85,col="grey",lty=2)
text(Expected_Time,ymax*0.9,
     paste("range=",
     round(Conf_Inerval[2]-Conf_Inerval[1],2)))

points(0:200,dgamma(0:200,shape=n,
       scale = 1/l),type="l",col="grey50")
```

Алгоритм 5 Серія з 200 генерувань середнього часу досягнення рівня

```
set.seed(112)
l<-0.1; n<-11;
N_sim<-200; N<-100
MC_Time<-c()
for(j in 1:N_sim){
    Time<-c()
    for(i in 1:N) Time<-c(Time,sum(rexp(n,l)))
    MC_Time<-c(MC_Time,mean(Time))}
hist_name<-paste("Number of Simulations =",N_sim,"\n",
           "Mean =",round(mean(MC_Time),2),"\n",
           "SD =",round(sd(MC_Time),2))
hist(MC_Time,freq=F,ylim = c(0,0.15),
     main = hist_name, xlim = c(95,125))
```

Умови на кількість стрибків

Розглянемо розподіл моментів стрибків в залежності від кількості стрибків процесу Пуассона на деякому фіксованому інтервалі. Для простоти запису будемо розглядати інтервал $(0,1]$.

Теорема 2.7 (про розподіл моментів стрибків за фіксованих значень N_t). *Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона, $\{\tau_k\}$ – відповідний стохастичний потік подій, тоді*

1) $f_{\tau_k|N_1=n}(t) = \begin{cases} kC_n^k t^{k-1}(1-t)^{n-k}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \textit{в ін. випадку}; \end{cases}$

2) $f_{\tau_1,\ldots,\tau_n|N_1=n}(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} n!, & 0 < t_1 < \ldots < t_n < 1, \\ 0, & \textit{в ін. випадку}. \end{cases}$

Доведення. 1) Для $0 \leq t \leq 1$ маємо

$$\mathsf{P}\{\tau_k \leq t | N_1 = n\} = \frac{\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t, N_1 = n\}}}{\mathsf{P}\{N_1 = n\}} = \frac{\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}}\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N_1=n\}}|\tau_k\right)\right)}{\mathsf{P}\{N_1 = n\}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right)^{-1}\int_0^t \mathsf{P}\{N_1 = n | \tau_k = s\} f_{\tau_k}(s)\,ds =$$

$$= \left(\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right)^{-1}\int_0^t \mathsf{P}\{N_1 - N_s = n-k\} f_{\tau_k}(s)\,ds =$$

$$= \left(\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right)^{-1}\int_0^t \frac{(\lambda(1-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(1-s)}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}s^{k-1}e^{-\lambda s}ds =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\int_0^t (1-s)^{n-k}s^{k-1}ds = kC_n^k\int_0^t (1-s)^{n-k}s^{k-1}ds.$$

Звідки формулу для $f_{\tau_k|N_1=n}(t)$ одержуємо шляхом диференціювання по t.

2) Застосовуючи формулу для спільної щільності $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, маємо

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{\tau_1 \le t_1, \ldots, \tau_n \le t_n | N_1 = n\} = \\
&\qquad = \frac{1}{\mathsf{P}\{N_1 = n\}} \mathsf{P}\{\tau_1 \le t_1, \ldots, \tau_n \le t_n, N_1 = n\} = \\
&= \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right)^{-1} \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} \mathsf{P}\{N_1 - N_{x_n} = 0\} f_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1 = \\
&\qquad = \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right)^{-1} \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} e^{-\lambda(1-x_n)} \lambda^n e^{-\lambda x_n} \mathbb{1}_{\{0 \le x_1 < \ldots < x_n\}} dx_n \ldots dx_1.
\end{aligned}$$

Диференціювання по t_1, …, t_n дає умовну щільність для $\tau_1, \ldots, \tau_n$ за умови $N_1 = n$. □

Вправа 2.11. Враховуючи той факт, що для в.в. $\eta \sim Exp(\lambda)$ та константи $t > 0$ маємо $t\eta \sim Exp\left(\frac{\lambda}{t}\right)$, отримати умовні щільності для τ_k та для $\tau_1, \ldots, \tau_n$ за умови, що $N_t = n$.

Відмітимо, що

$$kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-k)},$$

тоді з пункту 1) теореми про розподіл моментів стрибків за фіксованих значень N_t виводимо, що

$$\tau_k | N_1 = n \sim Beta(k, n-k+1).$$

Завдання 12. *Показати, що спільний розподіл моментів стрибків на $(0,1]$ за умови, що кількість стрибків на $(0,1]$ відома, відповідає розподілу порядкових статистик для вибірки з розподілу $Unif\,[0,1]$: вектор $(\tau_1, \ldots, , \tau_n)$ за умови $N_1 = n$ має такий розподіл як і $\left(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}\right)$, де $U_i \sim Unif\,[0,1]$.*

Розглянемо далі задачу визначення розподілу значень процесу Пуассона за фіксованого майбутнього значення. Для $k = \overline{0,n}$, $0 \le s \le t$, маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{N_s = k | N_t = n\} &= \frac{1}{\mathsf{P}\{N_t = n\}} \mathsf{P}\{N_s = k, N_t = n\} = \\
&= \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right)^{-1} \mathsf{P}\{N_t = n | N_s = k\}\, \mathsf{P}\{N_s = k\} = \\
&= \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right)^{-1} \mathsf{P}\{N_t - N_s = n-k\}\, \mathsf{P}\{N_s = k\} =
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\right)^{-1} \frac{(\lambda (t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

Тобто, $N_s|N_t = n$ має розподіл $Binomial\left(n, \frac{s}{t}\right)$, якщо $0 \le s \le t$, і більш того,

$$\mathsf{P}\left\{\tau_k \le s | N_t = n\right\} = \mathsf{P}\left\{N_s \ge k | N_t = n\right\} = \sum_{j=k}^{n} C_n^j \left(\frac{s}{t}\right)^j \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-j}.$$

Цей результат можна узагальнити так: для довільних $0 = t_0 \le t_1 < < \ldots < t_k = 1$ в.в. $\left\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\right\}_{i=1}^k$ за умови $N_1 = n$ мають розподіл $Multinomial\left(n; (t_1 - t_0, \ldots, t_k - t_{k-1})\right)$.

Приклад (генерування траєкторій процесу Пуассона). Нехай $\nu \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$, $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – незалежні $Unif\,[0,1]$-розподілені і незалежні від в.в. ν. Доведемо, що в.п. $\{N_t, t \in [0,1]\}$ визначений як

$$N_t = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{1}_{(0,t]}(\xi_j), N_0 = 0,$$

є процесом Пуассона на $[0,1]$.

Покажемо, що прирости $\left\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}, i = \overline{1,k}\right\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < < t_{k+1} = 1$, незалежні та пуассоново розподілені. За побудовою, якщо $\nu = n$, то

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = \sum_{j=1}^{n} I_{(t_{i-1}, t_i]}(\xi_j),$$

тобто маємо поліноміальну схему незалежних випробувань, в кожному з яких фіксуємо потрапляння навмання поставленої точки на $[0,1]$ у відповідний проміжок розбиття. А значить, вектор приростів за умови $\nu = = n$ має розподіл $Multinomial\left(n; (t_1 - t_0, \ldots, t_k - t_{k-1}, t_{k+1} - t_k)\right)$. Звідки для довільних $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+, m = \sum_{i=1}^k n_i$:

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k\right\} =$$

$$= \sum_{n \ge 0} \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k | \nu = n\right\} \mathsf{P}\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n \ge m} \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k | \nu = n\right\} \mathsf{P}\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n \ge m} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k! (n-m)!} (t_1 - t_0)^{n_1} \ldots (t_k - t_{k-1})^{n_k} (t_{k+1} - t_k)^{n-m} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

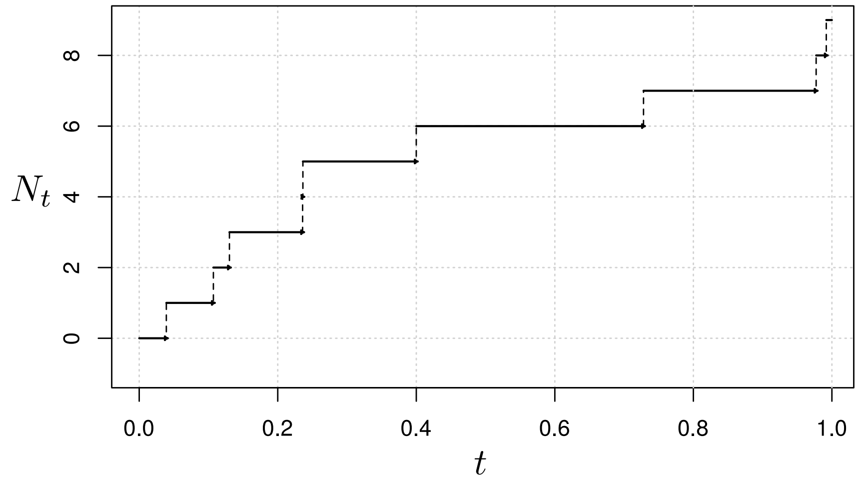


Рис. 2.6. Згенерована траєкторія N_t з $\lambda = 10$ на $[0, 1]$

Алгоритм 6 Моделювання траєкторій процесу N_t з $\lambda = 10$ на відрізку $[0, 1]$, застосовуючи рівномірно розподілені в.в.

```
set.seed(112)
require(shape)
l<-10;nu<-rpois(1,l);xi<-runif(nu);
tau_i<-c(0,sort(xi)); Nt<-0:nu;
plot(tau_i,Nt,type="s",xlim=c(0,tau_i[nu+1]),
ylim=c(-1,nu),xlab="t",ylab="N_t",lty=2)
Arrows(x0=tau_i[1:nu],y0=Nt[-(nu+1)],
       x1=tau_i[2:(nu+1)],y1=Nt[-(nu+1)],
       arr.length=0.05,arr.width=0.05,lwd=1.5)
segments(x0=tau_i[nu+1],y0=nu,x1=1,y1=nu,lwd=1.5)
grid()
```

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{(\lambda (t_i - t_{i-1}))^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}.$$

Відповідно алгоритм моделювання траєкторій передбачає генерування в.в. $\nu \sim Pois(\lambda)$ та рівномірно розподілених на $[0, 1]$ в.в. $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$. Впорядковані за зростанням $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(\nu)}$ визначатимуть моменти стрибків для N_t (див. рис. 2.5. та алгоритм 5).

Завдання 13. *Нехай $\{\nu_n, \xi_k^n\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ – незалежні в.в. такі, що*

$$\nu_n \sim Pois(\lambda), \xi_n^k \sim Unif(n-1, n].$$

Визначимо

$$N_t = \# \left\{ (k, n) \in \mathbb{N}^2 : k \le \nu_n, \xi_k^n \le t \right\}.$$

Показати, що $\{N_t, t \ge 0\}$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ.

Умови на моменти стрибків

Розглянемо умовні розподіли одних моментів стрибків в залежності від значень наступних.

Теорема 2.8 (про умовний розподіл моментів стрибків). *Нехай* $\{N_t, t \geq 0\}$ *– процес Пуассона,* $\{\tau_k\}$ *– відповідний стохастичний потік подій, тоді для* $k = 1, \ldots, n-1$ *маємо, що*

1) в.в. $\tau_k | \tau_n = 1 \sim Beta\,(k, n-k)$*;*

2) в.в. $\frac{\tau_k}{\tau_n} \sim Beta\,(k, n-k)$ *і не залежить від* τ_n*.*

Доведення. 1) Для $0 < u < 1$ маємо

$$f_{\tau_k|\tau_n=1}(u) = \frac{f_{\tau_k,\tau_n}(u,1)}{f_{\tau_n}(1)} = \frac{f_{\tau_k,\tau_n-\tau_k}(u,1-u)}{f_{\tau_n}(1)} = \frac{f_{\tau_k}(u)\, f_{\tau_n-\tau_k}(1-u)}{f_{\tau_n}(1)} =$$
$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k-1)!} (1-u)^{n-k-1} e^{-\lambda(1-u)} \left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} u^{k-1} (1-u)^{n-k-1} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k)} u^{k-1} (1-u)^{(n-k)-1}.$$

2) Визначимо випадкові вектори

$$Y = \left(\frac{\tau_k}{\tau_n}, \tau_n\right) \text{ та } X = (\tau_k, \tau_n - \tau_k),$$

для яких маємо таку рівність $Y = g(X)$, де $g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1+x_2}$ та $g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. З системи

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_1+x_2} = y_1, \\ x_1 + x_2 = y_2, \end{cases}$$

отримаємо, що

$$\begin{cases} x_1 = y_1 y_2, \\ x_2 = y_2(1-y_1), \end{cases}$$

тоді

$$\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{vmatrix} = y_2(1-y_1) + y_2 y_1 = y_2$$

та за лемою про щільність функціонального перетворення випадкового вектора матимемо для $0 < y_1 < 1$, $y_2 > 0$,

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(y_1 y_2, y_2(1-y_1))\, y_2 = f_{\tau_k}(y_1 y_2)\, f_{\tau_n-\tau_k}(y_2(1-y_1))\, y_2 =$$
$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} (y_1 y_2)^{k-1} e^{-\lambda y_1 y_2} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k-1)!} (y_2(1-y_1))^{n-k-1} y_2 e^{-\lambda(y_2(1-y_1))} =$$
$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y_2^{n-1} e^{-\lambda y_2} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} y_1^{k-1} (1-y_1)^{n-k-1} =$$

$$= f_{\tau_n}(y_2)\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}y_1^{k-1}(1-y_1)^{n-k-1}.$$

Проінтегрувавши праву та ліву частину рівності по y_2 маємо, що

$$f_{\frac{\tau_k}{\tau_n}}(y_1) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}y_1^{k-1}(1-y_1)^{n-k-1}.$$

Більш того, зі співвідношення

$$f_Y(y_1, y_2) = f_{\frac{\tau_k}{\tau_n}}(y_1)\, f_{\tau_n}(y_2)$$

отримаємо незалежність $\frac{\tau_k}{\tau_n}$ та τ_n. □

2.2. Перезапуск процесу Пуассона

Розглянемо важливу властивість процесу Пуассона, яка полягає в тому, що можна перенести початок спостереження за процесом при цьому в новій системі координат отриманий процес також буде процесом Пуассона.

Теорема 2.9 (про перезапуск N_t у фіксований момент). *Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ, тоді для довільного $s > 0$ процес $\left\{\tilde{N}_t^s = N_{t+s} - N_s, t \geq 0\right\}$ також є процесом Пуассона з інтенсивністю λ.*

Доведення. Процес $\tilde{N}_t^s$ має незалежні прирости, причому приріст на $(t, t+h]$, $h > 0$, відповідає приросту N_t на $(t+s, t+s+h]$, тобто виконані умови другого визначення, і значить $\tilde{N}_t^s$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ. □

Теорема 2.10 (про перезапуск N_t у моменти τ_k). *Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ, тоді для довільного $k = 1, 2, \ldots$ в.п. $\left\{\tilde{N}_t^k = N_{t+\tau_k} - N_{\tau_k}, t \geq 0\right\}$ також є процесом Пуассона з інтенсивністю λ.*

Доведення. Згідно з третім визначенням процесу Пуассона існує стохастичний потік подій $\{\tau_k\}$, для якого відстані між сусідніми подіями є незалежні $Exp(\lambda)$-розподілені в.в. Поява першої події для $\tilde{N}_t^k$ відповідає появі $(k+1)$-ої події для N_t і т.д. Оскільки в.в. $\tau_{k+m} - \tau_{k+m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$, незалежні та $Exp(\lambda)$-розподілені, то за третім визначенням $\tilde{N}_t^k$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ. □

Відмітимо, що доведення можна провести, відштовхуючись від першого визначення. Дійсно, нехай $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, $n_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, m}$, тоді

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{N}_{t_1}^k - \tilde{N}_{t_0}^k = n_1, \ldots, \tilde{N}_{t_m}^k - \tilde{N}_{t_{m-1}}^k = n_m\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{N_{\tau_k+t_1} - N_{\tau_k+t_0} = n_1, \ldots, N_{\tau_k+t_m} - N_{\tau_k+t_{m-1}} = n_m\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{N_{t+t_1} - N_{t+t_0} = n_1, \ldots, N_{t+t_m} - N_{t+t_{m-1}} = n_m | \tau_k = t\right\} f_{\tau_k}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{N_{t+t_1} - N_{t+t_0} = n_1, \ldots, N_{t+t_m} - N_{t+t_{m-1}} = n_m\right\} f_{\tau_k}(t)\, dt =$$

$$= \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = n_1\right\} \times \ldots \times \mathsf{P}\left\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = n_m\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(\lambda\left(t_i - t_{i-1}\right)\right)^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}.$$

Тобто, процес $\tilde{N_t^k}$ має незалежні прирости, більш того, $\mathsf{P}\left\{\tilde{N_{t+s}^k} - \tilde{N_s^k} = n\right\} = = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$. А значить, процес $\tilde{N_t^k}$ відповідає першому визначенню процесу Пуассона. Ключову роль, в цих міркування відіграє незалежність подій $\left\{N_{t+t_i} - N_{t+t_{i-1}} = n\right\}$ та $\{\tau_k = t\}$, оскільки перша подія залежить лише від значень N_u, $t + t_{i-1} < u \le t + t_i$, а друга від $N_s, 0 < s < t$, і проміжки $(0, t]$ та $(t + t_{i-1}, t + t_i]$, $i = \overline{1, m}$, несумісні.

Вправа 2.12. Показати, що якщо $\{N_t, t \ge 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ та θ – в.в. незалежна від N_t, тоді процес перезапущений у момент θ: $\left\{\tilde{N}_t = N_{t+\theta} - N_\theta, t \ge 0\right\}$ також є процесом Пуассона з інтенсивністю λ.

Вправа 2.13. Нехай $\{N_t, t \ge 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ,

$$\tau = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : N_n = 0\}$$

– останній цілий момент до першого стрибка. Застосовуючи третє визначення показати, що процес $\left\{\tilde{N}_t = N_{t+\tau} - N_\tau, t \ge 0\right\}$ не є процесом Пуассона.

Приклад (застосування теореми про перезапуск N_t у моменти τ_k)**.** Том стоїть на перехресті. Він оцінює, що йому необхідно рівно 6 секунд, щоб перейти дорогу. Машини проїжджають у відповідності до процесу Пуассона з інтенсивністю 15 машин за хвилину. Том вирішує перейти дорогу тільки, якщо побачить, що відстань до наступної машини більше ніж, 6 секунд. Нехай ν – кількість машин, які проїдуть повз нього поки потрібний проміжок між машинами не з'явиться.

Визначимо розподіл ν та $\mathsf{E}\nu$. Внаслідок властивості перезапуску та відсутності післядії для часу між послідовними машинами, виводимо що ν має розподіл $Geom\,(p)$, де $p = \mathsf{P}\{\nu = 0\} = \mathsf{P}\left\{\tau_1 > \frac{6}{60}\right\} = e^{-1.5}$. Звідки,

$$\mathsf{E}\nu = \frac{1-p}{p} = e^{1.5} - 1.$$

Знайдемо очікуваний час, поки Том зможе перетнути дорогу. Нехай τ_k – час проїзду k-ої машини, а $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ – час між проїздом k-ої та $(k-1)$-ої машин, тоді в.в. T_k є незалежні та $Exp\,(15)$ розподілені. Нехай θ – час, поки Том зможе перетнути дорогу, тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\theta|\nu = k\right)\mathsf{P}\left\{\nu = k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\tau_k|\nu = k\right)\mathsf{P}\left\{\nu = k\right\} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left(T_i|\nu = k\right)\mathsf{P}\left\{\nu = k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left(T_i|T_i \le 0.1\right)\mathsf{P}\left\{\nu = k\right\} = \\ = \mathsf{E}\left(T_1|T_1 \le 0.1\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}\left\{\nu = k\right\} = \mathsf{E}\left(T_1|T_1 \le 0.1\right)\mathsf{E}\nu,\end{aligned}$$

де, враховуючи означення умовної ймовірності,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(T_1|T_1 \le 0.1\right) = \mathsf{E}\left(T_1 1\!\!1_{\{T_1 \le 0.1\}}\right)/\mathsf{P}\left\{T_1 \le 0.1\right\} = \\ = \frac{\int_0^{0.1} x \cdot 15e^{-15x}dx}{\int_0^{0.1} 15e^{-15x}dx} = \frac{-0.1 - \left(1 - e^{1.5}\right)/15}{e^{1.5} - 1}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\mathsf{E}\theta = -0.1 - \frac{\left(1 - e^{1.5}\right)}{15} = \left(e^{1.5} - 2.5\right)/15.$$

Вправа 2.14.

1. Припустимо, що Том хоче зразу повернутись. Визначити очікувану кількість машин, які проїдуть повз нього поки він зможе повернутись. Знайти очікуваний час повернення.

2. Припустимо, що Том після переходу йде вздовж вулиці купити морозива, що вимагає $Exp\,(2)$-розподілену кількість часу. Після чого він повертається у початкове положення. Визначити очікуваний час повернення.

3. Припустимо, що Том переходить разом з Ерікою. Після переходу Еріка вирішує повернутись, а Том хоче продовжити йти купувати морозиво. Після 30 секунд обговорення, вони вирішують, що Еріка повертається зразу, а Том йде купувати морозиво, а потім повертається, де його чекатиме Еріка. Визначити очікуваний час чекання Ерікою Тома.

2.3. Сума процесів Пуассона

Вправа 2.15. Нехай ξ, η – незалежні в.в. Знайти розподіл

1. $\xi + \eta$, якщо $\xi \sim Pois\,(\lambda_1)$ та $\eta \sim Pois\,(\lambda_2)$;

2. $\min\{\xi, \eta\}$, якщо $\xi \sim Exp\,(\lambda_1)$ та $\eta \sim Exp\,(\lambda_2)$.

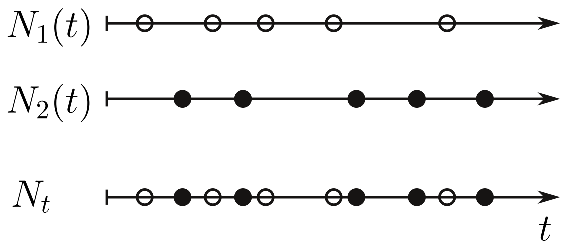


Рис. 2.7. Сума процесів Пуассона

Вправа 2.16. Майк та Лінда домовляються про побачення. Вони приходять до місця зустрічі після 17:00 через незалежні $Exp\,(1)$-розподілені моменти часу.

1. Визначити очікуваний час приходу першої особи.

2. Визначити очікуваний час чекання зустрічі для першої особи.

3. Припустимо, що вони домовились чекати один одного протягом 30 хвилин, до того як піти. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

Теорема 2.11 (про суму процесів Пуассона). *Нехай маємо сім'ю незалежних процесів Пуассона* $\{N_k\,(t)\,, t \geq 0\}_{k=1}^{m}$ *з інтенсивностями* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{m}$, *тоді*

$$\left\{ N_t = \sum_{k=1}^{m} N_k\,(t)\,, t \geq 0 \right\}$$

– процес Пуассона з інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$.

Доведення. Для довільних $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ прирости $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$, $i = \overline{1,k}$, можна подати як

$$\sum_{j=1}^{m} \left(N_j\,(t_i) - N_j\,(t_{i-1})\right).$$

Внаслідок незалежності доданків між собою та доданками для інших приростів матимемо незалежність приростів для N_t. Приріст

$$N_{t+s} - N_s = \sum_{k=1}^{m} \left(N_k\,(t+s) - N_k\,(s)\right)$$

має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 t + \ldots + \lambda_m t$ як сума незалежних пуассоново розподілених в.в. з параметрами $\lambda_1 t$, ..., $\lambda_m t$ відповідно. $\square$

Вправа 2.17. Довести теорему відштовхуючись від другого визначення процесу Пуассона.

Вправа 2.18. (за умови прикладу застосування теореми про перезапуск N_t у моменти τ_k). Нехай Том переходить перехрестя, причому кількість машин, які рухаються зліва направо відповідає процесу Пуассона з інтенсивністю 10 машин за хвилину, справа наліво з інтенсивністю 5 машин за хвилину. Нехай ν та θ такі як визначено раніше. Знайти розподіл ν та розрахувати $\mathsf{E}\nu$ і $\mathsf{E}\theta$.

Вправа 2.19. Нехай $\{N_i(t), t \geq 0\}_{i \in \mathbb{N}}$ –незалежні процеси Пуассона з інтенсивностями λ_i. Показати, що якщо $\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i < \infty$, то сумарний процес $N_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} N_i(t)$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ, а якщо $\lambda = \infty$, то $\mathsf{P}\{N_t = \infty\} = 1$.

Розглянемо далі задачу визначення ймовірності того, що подія для N_t зумовлена саме процесом $N_k(t)$. Нехай $T^{(k)}$ – момент настання першої події для $N_k(t)$ та

$$\tilde{T}^{(k)} = \min\left\{T^{(i)}, i \neq k\right\},$$

тоді момент першого стрибка для N_t визначений як

$$\tau_1 = \min\left\{T^{(k)}, \tilde{T}^{(k)}\right\}$$

і розглядувана подія може бути записана так $\left\{T^{(k)} < \tilde{T}^{(k)}\right\}$. За властивостями експоненційного розподілу

$$\tilde{T}^{(k)} \sim Exp\left(\sum_{i \neq k} \lambda_k\right),$$

тоді враховуючи незалежність $T^{(k)}$ та $\tilde{T}^{(k)}$ маємо, що

$$\mathsf{P}\left\{T^{(k)} < \tilde{T}^{(k)}\right\} = \int_0^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k x} \int_x^\infty \left(\sum_{i \neq k} \lambda_i\right) e^{-\sum_{i \neq k} \lambda_i y} dy dx =$$

$$= \int_0^\infty \lambda_k e^{-\lambda_k x} e^{-\sum_{i \neq k} \lambda_i x} dx = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}.$$

Тобто, $\mathsf{P}\left\{\min\left\{T^{(1)}, \ldots, T^{(m)}\right\} = T^{(k)}\right\} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}$.

Безпосереднім узагальненням розглянутої задачі є таке питання: яка ймовірність того, що відбудеться рівно n подій, відповідних до $N_k(t)$, між подіями відповідними до інших $N_i(t)$, $i \neq k$?

Для простоти розрахунків припустимо, що $m = 2$ і позначимо через ν кількість подій, пов'язаних з $N_1(t)$ до появи першої події, пов'язаної з $N_2(t)$. Якщо T_* – час реєстрації першої події, пов'язаної з $N_2(t)$, тоді $T_* \sim Exp(\lambda_2)$ та

$$\mathsf{P}\{\nu = n | T_* = t\} = \mathsf{P}\{N_1(t) = n\} = \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} e^{-\lambda_1 t}, n \in \mathbb{Z}_+, t \geq 0.$$

А значить,

$$\mathsf{P}\{\nu = n\} = \int_0^\infty \mathsf{P}\{\nu = n | T_* = t\} f_{T_*}(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt =$$
$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n+1}}{n!} t^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt \frac{\lambda_1^n \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{\lambda_1^n \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n+1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n.$$

Тобто, $\nu \sim Geom\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$. Застосовуючи теорему про перезапуск N_t у моменти τ_k, маємо що кількість подій, пов'язаних з $N_1(t)$, між двома подіями, пов'язаними з $N_2(t)$, має також розподіл $Geom\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$. Проводячи аналогічні судження для $m \geq 2$, можемо отримати таке твердження.

Теорема 2.12 (про появу подій певного типу для суми процесів Пуассона)**.** *Нехай маємо сім'ю незалежних процесів Пуассона $\{N_k(t), t \geq 0\}_{k=1}^m$ з інтенсивностями $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ та $N_t = \sum_{k=1}^m N_k(t)$. Позначимо $p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1+\ldots+\lambda_m}$, $k = 1, \ldots, m$, тоді*

- *імовірність того, що перші n подій для N_t відповідають $N_k(t)$, дорівнює p_k^n;*
- *кількість подій до настання першої події відповідної до $N_k(t)$ має розподіл $Geom(p_k)$;*
- *кількість подій, що відповідають $N_k(t)$, до настання події, відповідної до іншої компоненти, має розподіл $Geom(1 - p_k)$.*

Вправа 2.20. Радіоактивна речовина випромінює α, β, γ та δ частинки у відповідності до процесів Пуассона з інтенсивностями λ_α, λ_β, λ_γ та λ_δ відповідно. Лічильник частинок фіксує усі з перерахованих типів. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – кількість реєстрацій частинок на $(0, t]$.

1. Знайти очікуваний час реєстрації першої частинки.
2. Знайти ймовірність того, що перша зареєстрована частинка є β-частинкою.
3. Знайти ймовірність того, що буде зареєстровано дві β-частинки до появи частинки іншого типу.
4. Знайти ймовірність того, що буде зареєстровано β-частинок не менше, ніж k, до реєстрації j частинок іншого типу.
5. Знайти очікуваний час реєстрації першої β-частинки.

Декомпозиція процесу Пуассона

Нехай маємо стохастичний потік подій $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, що характеризує моменти надходження запитів на сервер. Припустимо, що на сервері маємо реєстратор, який з імовірністю $0 < p < 1$ незалежним чином від інших реєструє запит. Позначимо через $\left\{\tau_k^I\right\}_{k=1}^{\infty}$ моменти реєстрації запитів і через $\left\{N_t^I, t \geq 0\right\}$ відповідний лічильний процес.

Покажемо, що якщо лічильний процес $\{N_t, t \geq 0\}$, який відповідає початковому потоку, є процесом Пуассона, то і "просіяний" процес N_t^I також.

Вправа 2.21. Показати, що момент першого стрибка для N_t^I має розподіл $Exp\,(\lambda p)$.

Оскільки N_t має незалежні прирости та реєстрацію кожного запиту сервер проводить незалежним чином, N_t^I має також незалежні прирости, крім того, за побудовою $N_0^I = 0$ м.н. Позначимо

$$A_k = \{N_{t+h} - N_t = k\} \text{ та } B_k = \left\{N_{t+h}^I - N_t^I = k\right\}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\,(B_1) = \mathsf{P}\,(B_1 \cap (\cup_{k=0}^{\infty} A_k)) = \mathsf{P}\,(B_1 \cap A_1) + \mathsf{P}\,(B_1 \cap (\cup_{k=2}^{\infty} A_k)) = \\ = \mathsf{P}\,(B_1 | A_1)\, \mathsf{P}\,(A_1) + \mathsf{P}\,(B_1 \cap (\cup_{k=2}^{\infty} A_k)) \,.\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\mathsf{P}\,(B_1 | A_1) = p \text{ та } \mathsf{P}\,(A_1) = \lambda h + o\,(h)\,,$$

крім того, що

$$\mathsf{P}\,(B_1 \cap (\cup_{k=2}^{\infty} A_k)) \leq \mathsf{P}\,(\cup_{k=2}^{\infty} A_k) = o\,(h)\,,$$

виводимо

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h}^I - N_t^I = 1\right\} = \lambda p h + o\,(h)\,.$$

Більш того,

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h}^I - N_t^I > 1\right\} = \mathsf{P}\,(\cup_{k=2}^{\infty} B_k) \leq \mathsf{P}\,(\cup_{k=2}^{\infty} A_k) = o\,(h)\,.$$

Отже усі умови другого визначення виконані. Аналогічно можна показати, що процес N_t^{II}, який характеризує кількість незареєстрованих запитів, також є процесом Пуассона з інтенсивністю $\lambda\,(1-p)$.

Вправа 2.22. Показати, що N_t^{II} є процесом Пуассона, застосовуючи перше визначення.

Теорема 2.13 (про декомпозицію процесу Пуассона)**.** *Процеси* $\left\{N_t^I, t \geq 0\right\}$ *та* $\left\{N_t^{II}, t \geq 0\right\}$ *є незалежними процесами Пуассона з інтенсивностями* λp *та* $\lambda\,(1-p)$ *відповідно.*

Доведення. Те, що процеси N_t^I, N_t^{II} є процесами Пуассона з відповідними інтенсивностями зазначено вище. Для того, щоб встановити незалежність процесів необхідно показати, що $\forall 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ в.в. $\left\{N_{t_i}^I, i = \overline{1,n}\right\}$ та $\left\{N_{t_j}^{II}, j = \overline{1,n}\right\}$ незалежні. Для цього достатньо показати, що незалежними є $\left\{\Delta N_{t_i}^I = N_{t_i}^I - N_{t_{i-1}}^I, i = \overline{1,n}\right\}$ та $\left\{\Delta N_{t_i}^{II} = N_{t_j}^{II} - N_{t_{j-1}}^{II}, j = \overline{1,n}\right\}$. Якщо $i \neq j$, то незалежність випливає з незалежності приростів процесу N_t. Покажемо, що прирости незалежні також і на однакових проміжках:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\Delta N_{t_i}^I = k_1, \Delta N_{t_i}^{II} = k_2\right\} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\Delta N_{t_i}^I = k_1, \Delta N_{t_i}^{II} = k_2 | \Delta N_{t_i} = k\right\} \mathsf{P}\left\{\Delta N_{t_i} = k\right\} = \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\Delta N_{t_i}^I = k_1, \Delta N_{t_i}^{II} = k_2 | \Delta N_{t_i} = k_1 + k_2\right\} \mathsf{P}\left\{\Delta N_{t_i} = k_1 + k_2\right\} = \\
&\quad = C_{k_1+k_2}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k_2} \frac{(\lambda \Delta t_i)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!} e^{-\lambda \Delta t_i} = \\
&\quad = \frac{(\lambda p \Delta t_i)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda p \Delta t_i} \frac{(\lambda (1-p) \Delta t_i)^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda (1-p) \Delta t_i}.
\end{aligned}
$$

□

З даного твердження випливає, що декомпозицію процесу Пуассона можна розглядати як зворотню процедуру до знаходження суми (див. рис. 2.7.). Довільні незалежні процеси Пуассона з інтенсивностями λ_1 та λ_2 можна розглядати як результат поділу незалежним чином на "фракції" окремих подій стохастичного потоку, що відповідає деякому процесу Пуассона з інтенсивністю $\lambda_1 + \lambda_2$, з імовірностями $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ та $1 - p = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ попасти у відповідну фракцію.

Вправа 2.23. Кількість відвідувань місцевого супермаркету Бобом відповідає процесу Пуассона з інтенсивністю $\lambda = 1$. Кожного разу Боб купує пакет із вівсянкою, який містить іграшку одну з m можливих типів, кожен тип зустрічається з однаковою частотою. Знайти очікуваний час, через який Боб збере повну колекцію іграшок (як мінімум по одній кожного типу).

Вправа 2.24. (Продовження вправи 2.23). Нехай колекція іграшок складається з $m = 2n$ різних типів, серед яких половина – іграшкові автомобілі, а інша половина – іграшкові звірі. Знайти розподіл та математичне сподівання моменту збору однієї з цих половин колекції.

Вправа 2.25. (Пуассонові квоти). Нехай $\left\{N_i(t), t \geq 0, i = \overline{1,m}\right\}$ – незалежні процеси Пуассона з інтенсивностями $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, $\{N_t, t \geq 0\}$ – сумарний процес. Припустимо, що $\{k_i \in \mathbb{Z}_+\}_{i=1}^m$ визначають "квоти" для відповідної компоненти

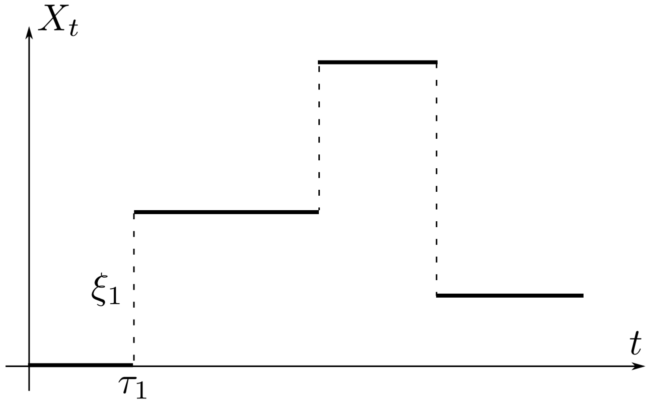


Рис. 2.8. Траєкторія складного процесу Пуассона

(як тільки відбулось k_i подій, пов'язаних з i-ою компонентою вважаємо, що ця компонента задовольняє квотні умови). Позначимо через T момент, в який $r \leq m$ компонент досягли квотних умов. Визначити щільність в.в. T.

2.4. Складний процес Пуассона

Нехай $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – незалежні однаково розподілені в.в. з функцією розподілу $F(x)$ та х.ф. $\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\alpha x} dF(x)$, $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ незалежний від $\{\xi_k\}$, тоді в.п.

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$

називають *складним процесом Пуассона* з інтенсивністю стрибків λ та функцією розподілу стрибків $F(x)$ (див. рис. 2.8.).

Вправа 2.26. Показати, що процес $\{X_t, t \geq 0\}$ є процесом Леві та

$$\mathsf{E} e^{\imath\alpha X_t} = e^{t\psi(\alpha)},$$

де $\psi(\alpha) = \lambda(\varphi(\alpha) - 1)$. Показати, що перезапущений процес в моменти τ_k:

$$\left\{\tilde{X}_t = X_{\tau_k + t} - X_{\tau_k}, t \geq 0\right\}$$

також є складний процес Пуассона.

Розглянемо декілька прикладів застосування складного процесу Пуассона.

Просіяний процес Пуассона. Нехай в.в. $\xi_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, де $0 < < p < 1$, тоді

$$\mathsf{E} e^{\imath\alpha X_t} = e^{t\lambda(\varphi(\alpha)-1)} = e^{t\lambda(pe^{\imath\alpha}+(1-p)-1)} = e^{t\lambda p(e^{\imath\alpha}-1)}$$

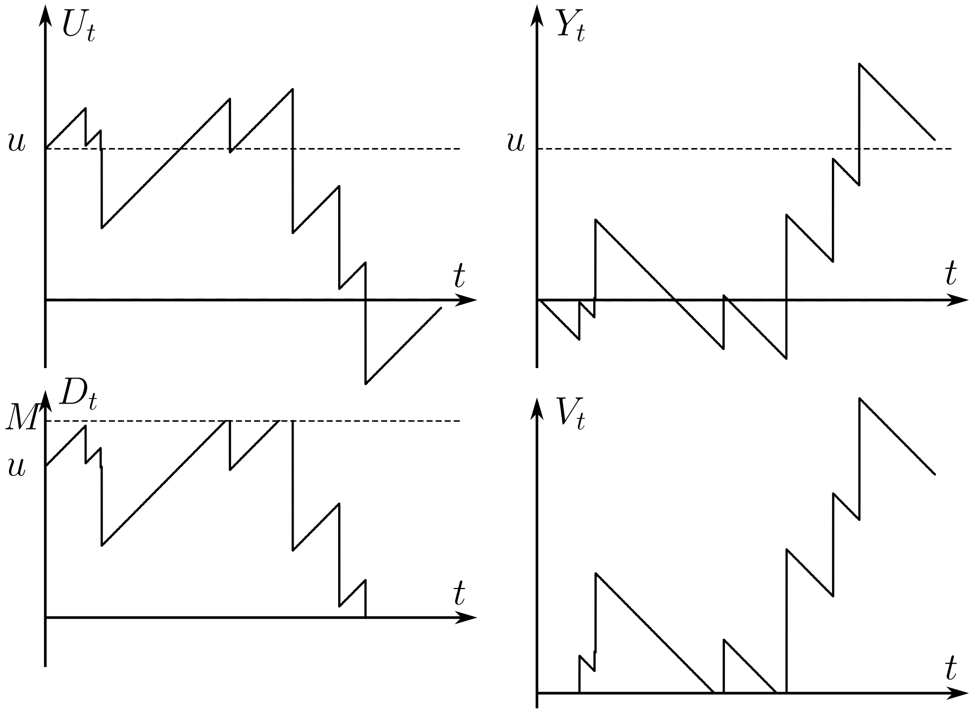


Рис. 2.9. Процеси ризику та теорії масового обслуговування

– х.ф. розподілу Пуассона з параметром λp. Тобто, так визначений складний процес Пуассона є простим процесом Пуассона з інтенсивністю λp. З практичної точки зору в.в. ξ_k визначають чи буде реєструватись настання k-ої події.

Класичний процес ризику. Припустимо, що вимоги за страховими полісами надходять до страхової компанії у відповідності до процесу Пуассона з інтенсивністю λ, а розмір вимог – незалежні однаково розподілені в.в. $\xi_k > 0$. Нехай u – початковий капітал компанії і премії надходять з постійною інтенсивністю $c > 0$, тоді капітал компанії в момент часу $t > 0$ характеризує *процес резервів* (risk reserve process, див. рис. 2.9.)

$$U_t = u + ct - X_t.$$

Визначимо *ймовірність банкрутства* на нескінченному горизонті так

$$\Psi(u) = \mathsf{P}\{U_t < 0 \text{ для деякого } t > 0 | U_0 = u\}.$$

Якщо

$$\mathsf{P}\{\underline{\lim}_{t\to\infty} U_t = -\infty\} = 1,$$

то $\Psi(u) = 1$, $\forall u \in \mathbb{R}_+$, тому зазвичай припускають, що

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\uparrow\infty} U_t = \infty\right\} = 1.$$

Достатньою умовою для цього є так звана умова безпечного завантаження (security loading condition):

$$\mu = \mathsf{E}\xi_k < \infty \text{ та } \frac{\lambda\mu}{c} < 1.$$

Якщо ця умова виконана, то $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$.

Приклад (рівняння для ймовірності банкрутства)**.** Розглянемо ймовірність виживання

$$\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$$

і виведемо для неї відповідне інтегро-диференційне рівняння.

Виділимо такі два випадки: $\{\tau_1 \le h\}$ та $\{\tau_1 > h\}$, для достатньо малого $h > 0$, відзначаючи таким чином, чи надійшла на проміжку $[0, h]$ перша вимога розміром ξ_1. Якщо $\{\tau_1 > h\}$, то, перезапускаючи процес U_t в момент h, маємо що ймовірність виживання дорівнюватиме

$$\mathsf{E}\Phi(u + ch)\,\mathbb{1}_{\{\tau_1 > h\}}.$$

Якщо ж сталась подія $\{\tau_1 \le h\}$, то, перезапускаючи процес U_t в момент τ_1, маємо що ймовірність виживання дорівнюватиме

$$\mathsf{E}\Phi(u + c\tau_1 - \xi_1)\,\mathbb{1}_{\{\xi_1 < u + c\tau_1, \tau_1 \le h\}}.$$

Оскільки $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$, ξ_1 має функцію розподілу $F(x)$ та, враховуючи незалежність цих в.в., маємо що

$$\Phi(u) = \Phi(u + ch)\,e^{-\lambda h} + \int_0^h \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - y)\,dF(y)\,\lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Перепишемо одержане рівняння для Φ як

$$\frac{1}{h}\left(\Phi(u + ch) - \Phi(u) - \Phi(u + ch)\left(1 - e^{-\lambda h}\right)\right) = \\ = -\frac{1}{h}\int_0^h \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - y)\,dF(y)\,\lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Переходячи до границі $h \downarrow 0$, для правої похідної виводимо шукане рівняння:

$$c\Phi'(u) = \lambda\left(\Phi(u) - \int_0^u \Phi(u - z)\,dF(z)\right).$$

Якщо розподіл F не має атомів, то, замінюючи u на $u - ch$ і переходячи до границі $h \uparrow 0$, можемо показати, що відповідне рівняння має місце і для лівої похідної.

Якщо
$$F(y) = 1 - e^{-\beta y}, y > 0,$$
то отримане рівняння набуває вигляду
$$c\Phi'(u) = \lambda\left(\Phi(u) - \beta e^{-\beta u}\int_0^u \Phi(y)\, e^{\beta y}dy\right).$$
Диференціюючи по u, виводимо що
$$c\Phi''(u) = \lambda\Phi'(u) + \lambda\beta\left(\beta e^{-\beta u}\int_0^u \Phi(y)\, e^{\beta y}dy - \Phi(u)\right).$$
Враховуючи співвідношення для $\Phi'(u)$, матимемо
$$c\Phi''(u) = \lambda\Phi'(u) - \beta c\Phi'(u)$$
або
$$\Phi''(u) = \Phi'(u)\left(\frac{\lambda}{c} - \beta\right).$$
Розв'язок цього рівняння має вигляд
$$\Phi(u) = A + Be^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$
Враховуючи, що для $c - \frac{\lambda}{\beta} > 0$: $\Phi(u) \to 1$, $u \to \infty$, та $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c}$, одержимо що
$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c}e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}$$
або $\Psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c}e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}$.

Для більш загального виду розподілу стрибків можна отримати експоненційну асимптотику ймовірності банкрутства. Позначимо через
$$Y_t = u - U_t = X_t - ct$$
процес надлишків вимог (claim surplus process), тоді
$$\Psi(u) = \mathsf{P}\left\{\sup_{t\geq 0} Y_t > u\right\}.$$
Якщо в.в. $\theta_s \sim Exp(s)$ незалежна від Y_t, то твірна функція моментів процесу Y_t зупиненого у момент θ_s має зображення
$$\mathsf{E}e^{rY_{\theta_s}} = \int_0^\infty e^{tk(r)}se^{-st}dt = \frac{s}{s - k(r)},$$

де

$$k(r) = -cr + \lambda\left(\mathsf{E}e^{r\xi_1} - 1\right).$$

Рівняння

$$s - k(r) = 0$$

називають *кумулянтним* (або *рівнянням Лундберга*). Оскільки

$$k(0) = 0, k'(0) = -c + \lambda\mu < 0 \text{ та } k''(r) = \lambda\mathsf{E}\xi_1^2 e^{r\xi_1} > 0,$$

кумулянтне рівняння $k(r) = 0$ має не більше одного додатного кореня, який називають експонентою Лундберга. Відповідно, якщо існує таке $R > 0$, що $k(R) = 0$ або $\int_0^\infty e^{Rx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}$, то можна показати що

$$\Psi(u) \le e^{-Ru}.$$

Більш того, якщо $\int_0^\infty xe^{Rx}dF(x) < \infty$, то має місце асимптотика Крамера-Лундберга

$$\Psi(u) \simeq Ce^{-Ru}, u \to \infty,$$

де $C = \frac{c-\lambda\mu}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\lambda\bar{F}(x)dx}$[14].

Віртуальний час чекання. Припустимо, що маємо деякий сервер, на якій надходять запити у відповідності до процесу Пуассона $\{N_t, t \ge 0\}$ з інтенсивністю λ. Час обслуговування k-го запиту визначений як невід'ємна в.в. ξ_k, яка має функцію розподілу $F(x)$, причому послідовність $\{\xi_k\}$ не залежить від процесу N_t. Дисципліна обслуговування – перший надійшов, перший обслуговується. Тобто, маємо чергу $M/G/1$. Будемо також припускати, що очікуваний час обслуговування $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$ є скінченний, тоді $\rho = \lambda\mu$ називають інтенсивністю трафіку (або коефіцієнтом навантаження на систему).

Складний процес Пуассона

$$Z_t = t - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, t \ge 0,$$

називають *керуючим процесом* для цієї черги. Однією з важливих характеристик черги є *завантаженість сервера* (workload), яка за умови відсутності неопрацьованих запитів у початковий момент часу, визначена як в.п.

$$V_t = \sup_{s \le t} Z_s - Z_t$$

(час чекання обслуговування для запиту, який надійшов у момент часу t). Якщо існує стаціонарний стан роботи сервера і існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{V_t \le u\} = \mathsf{P}\{V \le u\},$$

[14]Див., наприклад, Theorem 1.7 в *Mishura Yu., Ragulina O.* Ruin Probabilities. London: ISTE Press Ltd, 2016.

то можна показати, що гранична ймовірність збігається з імовірністю виживання $\Phi(u)$ для процесу ризику $u + Z_t$ з $c = 1$. Значить, ця ймовірність є розв'язком рівняння

$$\Phi'(u) = \lambda \left(\Phi(u) - \int_0^u \Phi(u-y)\, dF(y) \right).$$

Оскільки має місце таке подання

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \int_0^u \Phi'(v)\, dv,$$

доданок, що визначає згортку Φ та F, можемо переписати як

$$\int_0^u \Phi(u-y)\, dF(y) = \int_0^u \int_0^{u-y} \Phi'(v)\, dv dF(y) + \Phi(0)\, F(u).$$

Зробивши заміну змінних $\tilde{v} = u - v$, отримаємо, що ця згортка має зображення

$$\int_0^u \Phi'(u-\tilde{v})\, F(\tilde{v})\, d\tilde{v} + \Phi(0)\, F(u),$$

і тоді рівняння для Φ набуває такого вигляду

$$\Phi'(u) = \lambda \left(\Phi(u) - \Phi(0)\, F(u) - \int_0^u \Phi'(u-v)\, F(v)\, dv \right).$$

Підставивши $F(u) = 1 - \bar{F}(u)$ та використавши позначення $G(u) = \lambda \bar{F}(u)$, виводимо

$$\Phi'(u) = \Phi(0)\, G(u) + \int_0^u \Phi'(u-v)\, G(v)\, dv.$$

Отримане рівняння є рівнянням типу згортки і для його розв'язання можна застосувати перетворення Лапласа. В термінах перетворень

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \Phi'(u)\, du \text{ та } \hat{G} = \hat{G}(s)$$

рівняння набуває вигляду

$$\hat{\Phi} = \Phi(0)\, \hat{G} + \hat{\Phi}\hat{G}.$$

Звідки $\hat{\Phi} = \Phi(0) \frac{\hat{G}}{1-\hat{G}}$. Оскільки

$$\lim_{s \downarrow 0} \hat{G} = \int_0^\infty \lambda \bar{F}(u)\, du = \lambda\mu = \rho,$$

маємо

$$\int_0^\infty \Phi'(u)\, du = \lim_{s \downarrow 0} \hat{\Phi} = \Phi(0) \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Враховуючи, що шукаємо невід'ємний (Φ' – похідна неспадної функції), інтегровний і нетривіальний розв'язок, то отримуємо таку необхідну умову $\rho < 1$ (якщо $\rho \geq 1$, то мали б $\Phi(0) = 0$, а значить $\forall u \in \mathbb{R}_+$: $\Phi'(u) = 0$). За цієї умови $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$ і

$$\int_0^\infty \Phi'(u)\, du = \Phi(\infty) - \Phi(0) = 1 - \Phi(0).$$

Зіставивши з раніше отриманим виразом для цього інтегралу виводимо, що $\Phi(0) = 1 - \rho$.

Отже, для перетворення Лапласа функції Φ' маємо таке співвідношення

$$\hat{\Phi} = (1-\rho)\frac{\hat{G}}{1-\hat{G}} = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{G}\right)^n.$$

Можливість такого зображення пояснюють так: перетворення Лапласа для G можна переписати таким чином

$$\hat{G} = \int_0^\infty e^{-su} G(u)\, du = \rho \int_0^\infty e^{-su}\frac{\bar{F}(u)}{\mu} du = \rho \mathsf{E} e^{-sY},$$

де в.в. Y має щільність

$$f_Y(u) = \frac{1}{\mu}\bar{F}(u), u \geq 0,$$

звідки маємо $\hat{G} < 1$.

Оскільки

$$\int_0^\infty e^{-su} d\mathsf{P}\{V \leq u\} = \Phi(0) + \hat{\Phi},$$

одержимо так звану формулу Полячека-Хінчіна

$$\int_0^\infty e^{-su} d\mathsf{P}\{V \leq u\} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^n\left(\mathsf{E}e^{-sY}\right)^n.$$

Звідки обернувши по s, матимемо

$$\mathsf{P}\{V \leq u\} = \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} Y_i \leq u\right\},$$

де Y_i – незалежні в.в. зі щільністю $f_Y(u)$, які не залежать від в.в. $\nu \sim Geom(1-\rho)$. Зокрема,

$$\mathsf{E}V = \mathsf{E}\nu\mathsf{E}Y_i = \frac{\rho\mathsf{E}\xi_1^2}{2(1-\rho)\mu} = \frac{\lambda\mathsf{E}\xi_1^2}{2(1-\lambda\mu)}.$$

Процес теорії запасів. Нехай u – початковий обсяг запасів у сховищі з максимальною місткістю M, c – постійна інтенсивність надходження та ξ_k – обсяги відвантажень зі сховища, тоді процес

$$D_t = \min\left\{M, \max\left\{0, u + ct - X_t\right\}\right\}$$

називають процесом теорії запасів.

2.5. Узагальнення процесу Пуассона

Неоднорідний процес Пуассона

Один з важливих напрямків узагальнити поняття простого процесу Пуассона – припустити, що інтенсивність Λ залежить від часу, тобто

$$\Lambda = \Lambda\left(t\right).$$

Наприклад, інтенсивність надходження вимог до страхової компанії може залежати від пору року (середня кількість аварій в осінньо-зимовий період вища за кількість аварій в весняно-літній). Для даного процесу умова другого визначення виглядатиме так

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h} - N_t = 1\right\} = \Lambda\left(t\right)h + o\left(h\right), h \to 0,$$

звідки можемо отримати, що

$$N_t - N_s \sim Pois\left(\int_s^t \Lambda\left(u\right)du\right), 0 \le s < t.$$

Такий процес з незалежними приростами називають *неоднорідним процесом Пуассона*.

Розглянемо відповідний стохастичний потік подій $\left\{\tau_k\right\}_{k=1}^{\infty}$. Для $k = 1$ маємо

$$\mathsf{P}\left\{\tau_1 > t\right\} = \mathsf{P}\left\{N_t = 0\right\} = e^{-\int_0^t \Lambda(u)du}.$$

Застосовуючи рівність

$$\left\{\tau_n \le t\right\} = \left\{N_t \ge n\right\}$$

як і для однорідного процесу, приходимо до

$$f_{\tau_n}\left(t\right) = \frac{\left(\int_0^t \Lambda\left(u\right)du\right)^{n-1}}{(n-1)!}\Lambda\left(t\right)e^{-\int_0^t \Lambda(u)du}, t \ge 0,$$

та

$$\mathsf{E}\tau_n = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \Lambda(u)du} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\int_0^t \Lambda\left(u\right)du\right)^k}{k!}dt.$$

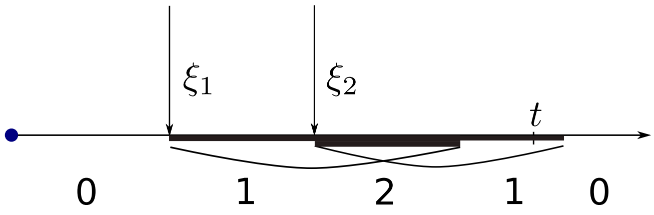


Рис. 2.10. Кількість запитів у системі $M/G/\infty$

Для математичного сподівання часу між подіями $\{T_n\}$ маємо

$$\mathsf{E}T_n = \mathsf{E}\tau_n - \mathsf{E}\tau_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \Lambda(u)du} \frac{\left(\int_0^t \Lambda\left(u\right) du\right)^{n-1}}{(n-1)!} dt, n \geq 2.$$

Вправа 2.27. Знайти спільний розподіл для $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$.

Вправа 2.28. Кількість запитів на обслуговування протягом роботи з 8:00 до 16:00 може бути описана процесом Пуассона з інтенсивністю

$$\Lambda\left(u\right) = 5\left(u-8\right) e^{-\frac{(u-8)^2}{10}}, 8 \leq u \leq 16.$$

Знайти очікувану кількість запитів на сервер протягом робочого дня. Яка ймовірність того, що не менше 30 запитів буде між 8:00 та 12:00?

Приклад (черга $M/G/\infty$)**.** Нехай запити на обслуговування надходять у відповідності до процесу Пуассона $\{N_s, s \geq 0\}$ з інтенсивністю λ. Час обслуговування запиту має функцію розподілу $F\left(x\right)$ і не залежить від N_t. Система обслуговування сформована так, що жоден запит не потрапляє у чергу і після надходження зразу починає обслуговуватись (див. рис. 2.10.). Знайдемо розподіл кількості запитів, які знаходяться на обслуговування на момент t.

Для достатньо малого $h > 0$ імовірність надходження одного запиту на проміжку $(s, s+h]$ дорівнює $\lambda h + o\left(h\right)$ і більше за один – $o\left(h\right)$. Імовірність того, що один запит з часом обслуговування $\xi \sim F\left(x\right)$ надходить на проміжку $(s, s+h]$ і ще знаходиться на обслуговуванні в момент $t > s$, тоді дорівнює

$$\left(\lambda h + o\left(h\right)\right) \mathsf{P}\left\{\xi > t-s\right\} = \lambda h \bar{F}\left(t-s\right) + o\left(h\right)$$

(див. рис. 2.11.). Позначимо через $\left\{\tilde{N}_s, 0 \leq s \leq t\right\}$ лічильний процес запитів, які надійшли до системи на проміжку $[0, s]$ і на момент t ще обслуговуються (див. рис. 2.12.). Оскільки процес N_s має незалежні прирости і час обслуговування запитів є незалежними в.в., тоді процес $\tilde{N}_s$ також має незалежні прирости, причому

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{N}_{s+h} - \tilde{N}_s = 1\right\} = \lambda \bar{F}\left(t-s\right) h + o\left(h\right)$$

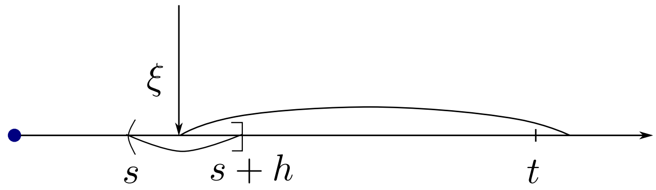


Рис. 2.11. Запит в системі $M/G/\infty$

та

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{N}_{s+h}-\tilde{N}_s>1\right\}=o\left(h\right),$$

маємо що $\left\{\tilde{N}_s, 0\le s\le t\right\}$ є неоднорідний процес Пуассона з інтенсивністю $\Lambda\left(s\right)=\lambda\bar{F}\left(t-s\right)$, $s\le t$. Значить

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{N}_t=k\right\}=\frac{\left(\lambda\int_0^t\bar{F}\left(t-s\right)ds\right)^k}{k!}e^{-\lambda\int_0^t\bar{F}(t-s)ds}.$$

Мішаний процес Пуассона

Наступний напрямок узагальнення – вважати, що інтенсивність є випадковою

$$\Lambda=\Lambda\left(\omega\right).$$

За умови $\Lambda\left(\omega\right)=\lambda>0$ процес $\{N_t, t\ge 0\}$ є простим процесом Пуассона з інтенсивністю λ, тобто має незалежні прирости і прирости за фіксованого значення інтенсивності

$$N_{t+h}-N_t|\Lambda=\lambda\sim Pois\left(\lambda h\right), h>0.$$

Так визначений процес називають *мішаним процесом Пуассона*, при цьому Λ називають *параметром змішування.*

Припустимо, що в.в. Λ має $Exp\left(s\right)$ розподіл. Тоді

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h}-N_t=n\right\}=\int_0^\infty\frac{\left(\lambda h\right)^n}{n!}e^{-\lambda h}se^{-\lambda s}d\lambda=$$
$$=\frac{sh^n}{\left(s+h\right)^{n+1}}\int_0^\infty\frac{\left(s+h\right)^{n+1}}{n!}\lambda^n e^{-(h+s)\lambda}d\lambda=\left(\frac{s}{s+h}\right)\left(\frac{h}{s+h}\right)^n,$$

тобто $N_{t+h}-N_t\sim Geom\left(\frac{s}{s+h}\right)$, а значить N_t не є процесом Пуассона.

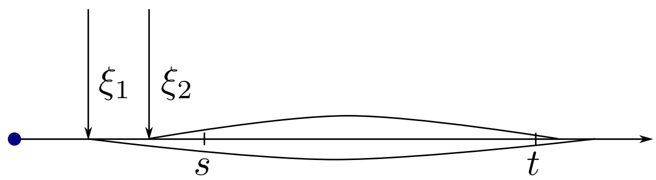


Рис. 2.12. Запити, що знаходяться в системі на момент t і зайшли до s

Проаналізуємо які умови другого визначення не будуть виконуватись. Оскільки

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h}-N_t=1\right\}=\frac{s}{s+h}\left(\frac{h}{s+h}\right)=sh\left(s+h\right)^{-2}=$$
$$=\frac{h}{s}\left(1+\frac{h}{s}\right)^{-2}=h\frac{1}{s}+o\left(h\right)$$

та

$$\mathsf{P}\left\{N_{t+h}-N_t\geq 2\right\}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{s}{s+h}\right)\left(\frac{h}{s+h}\right)^n=\left(\frac{sh}{s+h}\right)^2=o\left(h\right),$$

має не виконуватись умова незалежності приростів. Для $0=t_0<t_1<t_2$, $n_1,n_2\in\mathbb{Z}_+$ маємо

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1}-N_{t_0}=n_1,N_{t_2}-N_{t_1}=n_2\right\}=$$
$$=\int_0^\infty \mathsf{P}\left\{N_{t_1}-N_{t_0}=n_1,N_{t_2}-N_{t_1}=n_2|\Lambda=\lambda\right\}se^{-s\lambda}d\lambda=$$
$$=\int_0^\infty \frac{\lambda^{n_1}\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}{n_1!}e^{-\lambda(t_1-t_0)}\frac{\lambda^{n_2}\left(t_2-t_1\right)^{n_2}}{n_2!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}se^{-\lambda s}d\lambda=$$
$$=s\frac{\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}{n_1!}\frac{\left(t_2-t_1\right)^{n_2}}{n_2!}\int_0^\infty\lambda^{n_1+n_2}e^{-\lambda(s+t_2-t_0)}d\lambda=$$
$$=s\frac{\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}{n_1!}\frac{\left(t_2-t_1\right)^{n_2}}{n_2!}\frac{\left(n_1+n_2\right)!}{\left(s+t_2-t_0\right)^{n_1+n_2+1}}=$$
$$=sC_{n_1+n_2}^{n_1}\frac{\left(t_2-t_1\right)^{n_2}\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}{\left(s+t_2-t_0\right)^{n_1+n_2+1}}.$$

Враховуючи що

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_1}-N_{t_0}=n_1\right\}=\frac{s}{s+t_1-t_0}\left(\frac{t_1-t_0}{s+t_1-t_0}\right)^{n_1},$$

одержуємо

$$\mathsf{P}\left\{N_{t_2}-N_{t_1}=n_2|N_{t_1}-N_{t_0}=n_1\right\}=$$
$$=sC_{n_1+n_2}^{n_1}\frac{\left(t_2-t_1\right)^{n_2}\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}{\left(s+t_2-t_0\right)^{n_1+n_2+1}}\frac{\left(s+t_1-t_0\right)}{s}\frac{\left(s+t_1-t_0\right)^{n_1}}{\left(t_1-t_0\right)^{n_1}}=$$
$$=C_{n_1+n_2}^{n_1}\left(\frac{t_2-t_1}{s+t_2-t_0}\right)^{n_2}\left(\frac{s+t_1-t_0}{s+t_2-t_0}\right)^{n_1+1}\neq\mathsf{P}\left\{N_{t_2}-N_{t_1}=n_2\right\}.$$

Крім того, враховуючи рівність

$$C_{n_1+n_2}^{n_1}=C_{(n_1+1)+n_2-1}^{(n_1+1)-1},$$

робимо висновок, що умовний розподіл є від'ємним біномним.

Припустимо, що в.в. Λ має функцію розподілу $F(\lambda)$, тоді

$$\mathsf{P}\{N_t = k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF(\lambda),$$

звідки

$$\mathsf{P}\{N_t = 0\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(\lambda) = \mathsf{E} e^{-t\Lambda}.$$

Для k-ої похідної цієї ймовірності маємо, що

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathsf{P}\{N_t = 0\} = \int_0^\infty (-\lambda)^k e^{-\lambda t} dF(\lambda),$$

тоді

$$\mathsf{P}\{N_t = k\} = (-1)^k \frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathsf{E} e^{-t\Lambda}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Вправа 2.29. Показати, що $\mathsf{E}N_t = t\mathsf{E}\Lambda$ та $\mathsf{D}N_t = t\mathsf{E}\Lambda + t^2\mathsf{D}\Lambda$.

Теорема 2.14 (про властивості мішаного процесу Пуассона)**.** *Мішаний процес Пуассона має стаціонарні та, якщо розподіл інтенсивності* Λ *невироджений, не незалежні прирости.*

Доведення. Нехай $0 = t_0 \le t_1 < \ldots < t_n$, $h > 0$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, тоді

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{N_{t_1+h} - N_{t_0+h} = k_1, \ldots, N_{t_n+h} - N_{t_{n-1}+h} = k_n\right\} = \\
&\quad = \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{N_{t_1+h} - N_{t_0+h} = k_1, \ldots, N_{t_n+h} - N_{t_{n-1}+h} = k_n | \Lambda = \lambda\right\} dF(\lambda) = \\
&\quad\quad = \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n | \Lambda = \lambda\right\} dF(\lambda) = \\
&\quad\quad\quad = \mathsf{P}\left\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n\right\}.
\end{aligned}$$

Для доведення залежності приростів достатньо взяти $n = 2$, тоді

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2\} = \\
&\quad = \int_0^\infty \mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 | \Lambda = \lambda\} dF(\lambda) = \\
&\quad = \int_0^\infty \mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1 | \Lambda = \lambda\} \mathsf{P}\{N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 | \Lambda = \lambda\} dF(\lambda) = \\
&\quad\quad \ne \int_0^\infty \mathsf{P}\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1 | \Lambda = \lambda\} dF(\lambda) \times \\
&\quad\quad\quad \times \int_0^\infty \mathsf{P}\{N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 | \Lambda = \lambda\} dF(\lambda).
\end{aligned}$$

$\square$

Вправа 2.30. Показати, що спільний розподіл приростів мішаного процесу на розбитті відрізка $[0,t]$ за відомої кількості стрибків є поліноміальним: $\left(N_{t_1}-N_{t_0},\ldots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}\right)|N_{t_n}=n\sim Multinomial\left(n,\left(\frac{t_1-t_0}{t_n},\ldots,\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}\right)\right)$.

Вправа 2.31. Показати, що

$$\mathsf{cov}\left(N_{t_1}-N_{t_0},N_{t_2}-N_{t_1}\right)=\prod_{i=1}^{2}\left(t_i-t_{i-1}\right)\mathsf{D}\Lambda.$$

Приклад (процес Поля). Нехай мішаний процес Пуассона $\{N_t,t\geq 0\}$ має $Gamma\left(\alpha,\beta\right)$-розподілену інтенсивність. Знайдемо одновимірний розподіл та скінченно вимірні розподіли цього процесу.

Враховуючи, що

$$f_\Lambda\left(\lambda\right)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda},\lambda>0,$$

маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{N_t=k\right\}&=\left(-1\right)^k\frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\mathsf{E}e^{-t\Lambda}\right)=\left(-1\right)^k\frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^\alpha=\\&=\left(-1\right)^k\frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}=\frac{t^k}{k!}\frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{1}{\beta}\right)^k\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha-k}=\\&=\frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{t}{t+\beta}\right)^k\left(1-\frac{t}{t+\beta}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

Відмітимо, що для $\alpha\in\mathbb{N}$ отримаємо від'ємний біномний розподіл. Розглянемо тепер скінченно вимірні розподіли: для $0=t_0<t_1<\ldots<t_n$ та $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+$, $k_0=0$ маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}\left(k_1,\ldots,k_n\right)&=\mathsf{P}\left\{N_{t_i}=k_i,i=\overline{1,n}|N_{t_n}=k_n\right\}\mathsf{P}\left\{N_{t_n}=k_n\right\}=\\&=\mathsf{P}\left\{N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i-k_{i-1},i=\overline{1,n}|N_{t_n}=k_n\right\}\mathsf{P}\left\{N_{t_n}=k_n\right\}=\\&=\frac{k_n!}{\left(k_1-k_0\right)!\ldots\left(k_n-k_{n-1}\right)!}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{t_n}\right)^{k_i-k_{i-1}}\times\\&\times\frac{\Gamma\left(\alpha+k_n\right)}{\Gamma\left(k_n+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{t_n}{t_n+\beta}\right)^{k_n}\left(1-\frac{t_n}{t_n+\beta}\right)^\alpha=\\&=\frac{\Gamma\left(\alpha+k_n\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(1-\frac{t_n}{t_n+\beta}\right)^\alpha\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(k_i-k_{i-1}\right)!}\left(\frac{t_i-t_{i-1}}{t_n+\beta}\right)^{k_i-k_{i-1}}.\end{aligned}$$

Відмітимо, що на практиці також розглядають задачу визначення умовного розподілу коефіцієнта змішування. Зокрема,

$$\mathsf{P}\{\Lambda < x | N_t = n\} = \frac{\mathsf{P}\{N_t = n, \Lambda < x\}}{\mathsf{P}\{N_t = n\}} = \frac{\mathsf{E}\mathbb{1}_{\{N_t = n, \Lambda < x\}}}{\mathsf{P}\{N_t = n\}} =$$

$$= \frac{\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N_t = n, \Lambda < x\}} | \Lambda\right)\right)}{\mathsf{P}\{N_t = n\}} = \frac{\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{\Lambda < x\}} \mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N_t = n\}} | \Lambda\right)\right)}{\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N_t = n\}} | \Lambda\right)\right)} =$$

$$= \frac{\int_0^x (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dF(\lambda)}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dF(\lambda)}.$$

Якщо F абсолютно неперервна зі щільністю $f_\Lambda(\lambda)$, тоді умовний розподіл також має щільність

$$f_{\Lambda | N_t = n}(\lambda) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda}.$$

Для процесу Поля маємо

$$\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda = n! \mathsf{P}\{N_t = n\} = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{t + \beta}\right)^n \left(\frac{\beta}{t + \beta}\right)^\alpha.$$

Тому

$$f_{\Lambda | N_t = n}(\lambda) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha - 1} e^{-\beta \lambda}}{\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{t + \beta}\right)^n \left(\frac{\beta}{t + \beta}\right)^\alpha} = \frac{(\beta + t)^{n + \alpha}}{\Gamma(\alpha + n)} \lambda^{\alpha + n - 1} e^{-(\beta + t)\lambda}, \lambda \geq 0.$$

Тобто, $\Lambda | N_t = n \sim Gamma(\alpha + n, \beta + t)$.

Вправа 2.32. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Поля. Знайти

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathsf{P}\{N_{t+h} - N_t = 1 | N_t = n\}.$$

Приклад (мішаний процес з дискретно розподіленою інтенсивністю). Припустимо, що кількість сейсмічних поштовхів в деякому регіоні протягом певного сезону можна охарактеризувати мішаним процесом Пуассона $\{N_t, t \geq 0\}$ з коефіцієнтом змішування $\Lambda \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$.

1) Нехай протягом сезону на момент t сталось n поштовхів. Знайдемо ймовірність того, що вони мали інтенсивність λ_1.

$$\mathsf{P}\{\Lambda = \lambda_1 | N_t = n\} = \frac{\mathsf{P}\{N_t = n | \Lambda = \lambda_1\} \mathsf{P}\{\Lambda = \lambda_1\}}{\mathsf{P}\{N_t = n\}} =$$

$$= \frac{\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} e^{-\lambda_1 t} p}{\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} e^{-\lambda_1 t} p + \frac{(\lambda_2 t)^n}{n!} e^{-\lambda_2 t} (1 - p)}.$$

2) Знайдемо ймовірність того, що часу до наступного поштовху залишилось менше за x, якщо відомо, що на момент t сталось вже n поштовхів.

$$\mathsf{P}\left\{ \text{ час з моменту } t \text{ до наступного поштовху} \le x | N_t = n\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\tau_{n+1} - t \le x | N_t = n\right\} = \frac{\mathsf{P}\left\{\tau_{n+1} - t \le x, N_t = n\right\}}{\mathsf{P}\left\{N_t = n\right\}}.$$

Якщо інтенсивність N_t дорівнює λ, то

$$\mathsf{P}\left\{\tau_{n+1} - t \le x, N_t = n | \Lambda = \lambda\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_n \le t < \tau_{n+1} \le t + x | \Lambda = \lambda\right\} =$$
$$= \int_t^{t+x} \int_0^t f_{\tau_n, \tau_{n+1}}\left(y_n, y_{n+1}\right) dy_n dy_{n+1} =$$
$$= \int_t^{t+x} \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} y_n^{n-1} e^{-\lambda y_{n+1}} dy_n dy_{n+1} =$$
$$= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda y_{n+1}} \Big|_t^{t+x} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda x}\right).$$

Отже,

$$\mathsf{P}\left\{\tau_{n+1} - t \le x | N_t = n\right\} =$$
$$= \frac{(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t}\left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right) p + (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t}\left(1 - e^{-\lambda_2 x}\right)(1-p)}{(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} p + (\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t}(1-p)}.$$

Неоднорідні та мішані процеси можна розглядати як окремий випадок процесів, що мають як інтенсивність деякий в.п. $\Lambda = \Lambda(t, \omega)$. Відповідний процес називають *процесом Кокса* або *двічі стохастичним процесом Пуассона.* Для одновимірного розподілу процесу Кокса маємо

$$\mathsf{P}\left\{N_t = k\right\} = \mathsf{E}\left[\frac{\left(\int_0^t \Lambda(u, \omega)\, du\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t \Lambda(u,\omega) du}\right], k \in \mathbb{Z}_+,$$

та $\mathsf{E} N_t = \mathsf{E} \int_0^t \Lambda(u, \omega)\, du$.

Процеси відновлення

Згідно з теоремою про третє визначення процесу Пуассона процес Пуассона є лічильним для стохастичного потоку $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $\tau_k = \sum_{i=1}^k T_i$, T_i – невід'ємні незалежні та однаково розподілені в.в. Ці в.в. можна розглядати як час роботи приладу, який зразу замінюють іншим ідентичним у разі поломки, і лічильний процес

$$\nu_t = \max\left\{n \in \mathbb{N} : \tau_n \le t\right\}$$

визначає кількість “відновлень”. Тому цей процес називають процесом відновлення. Відмітимо, що процес відновлення є процесом Пуассона тоді і тільки тоді, коли $T_i \sim Exp(\lambda)$.

Приклад (асимптотична поведінка процесу відновлення)**.** Позначимо через

$$\nu_\infty = \lim_{t\to\infty} \nu_t$$

загальну кількість відновлень, тоді

$$\mathsf{P}\left\{\nu_\infty < \infty\right\} = \mathsf{P}\left\{T_n = \infty \text{ для деякого } n\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{\cup_{n\in\mathbb{N}}\left\{T_n = \infty\right\}\right\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}\left\{T_n = \infty\right\} = 0.$$

Покажемо також, що

$$\frac{\nu_t}{t} \to \frac{1}{\mu},$$

де $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$. За означенням, τ_{ν_t} – крайній момент відновлення до моменту часу t, а τ_{ν_t+1} – перший момент відновлення після t. Тоді (див. рис. 2.13.)

$$\tau_{\nu_t} \leq t < \tau_{\nu_t+1}$$

або

$$\frac{\tau_{\nu_t}}{\nu_t} \leq \frac{t}{\nu_t} < \frac{\tau_{\nu_t+1}}{\nu_t}.$$

Величина

$$\frac{\tau_{\nu_t}}{\nu_t} = \frac{1}{\nu_t}\sum_{k=1}^{\nu_t} T_k$$

характеризує середнє перших ν_t періодів відновлення і посилений закон великих чисел дає $\frac{\tau_{\nu_t}}{\nu_t} \to \mathsf{E}T_1 = \mu$. Більш того,

$$\frac{\tau_{\nu_t+1}}{\nu_t} = \frac{\tau_{\nu_t+1}}{\nu_t+1}\frac{\nu_t+1}{\nu_t} \to \mu.$$

Отже,

$$\frac{\tau_{\nu_t}}{\nu_t} \to \mu, t \to \infty \text{ м.н.}$$

Отриманий результат виправдовує назву для $\frac{1}{\mu}$ як інтенсивності відновлення.

Приклад (застосування асимптотичної поведінки процесу відновлення)**.** Нехай маємо деякий контейнер, якій містить нескінчену кількість монет: імовірність випадіння герба для навмання обраної дорівнює

$$p \sim Unif\left[0,1\right].$$

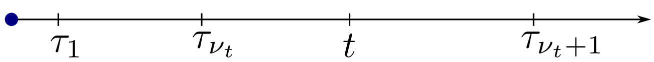


Рис. 2.13. Крайній до та перший після t моменти відновлення

Обрану монету послідовно підкидають і визначають частку випадіння гербів. Монети можна змінювати після будь-якого підкидання. За якої стратегії можна максимізувати цю частку?

Нехай p_0 – частка гербів в результаті підкидань за обраної стратегії. Позначимо через ν_n кількість цифр в результаті n підкидань, тоді критерій оптимальної стратегії:

$$p_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\nu_n}{n} \to \max .$$

Розглянемо таку стратегію: як тільки на обраній монеті випадає цифра змінюємо її на іншу. Зміну монети можна розглядати як відновлення з кроком відновлення, що має розподіл $Geom\,(1-p)$. Використовуючи аргументи прикладу асимптотична поведінка процесу відновлення, маємо

$$\frac{\nu_n}{n} \to \frac{1}{\mathsf{E}T_1},$$

де T_1 – кількість підкидань першої монети. Позначимо через p_1 імовірність випадіння герба для першої монети, тоді

$$\mathsf{E}T_1 = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(T_1|p_1\right)\right) = \int_0^1 \frac{1}{1-p}dp = \infty,$$

тобто $p_0 = 1$ за цієї стратегії.

Під час вивчення властивостей процесу відновлення важливе значення має така характеристика як середня кількість відновлень на проміжку $(0,t]$:

$$H\left(t\right) = \mathsf{E}\nu_t,$$

яку називають *функцією відновлення*.

Покажемо, що $H\left(t\right) < \infty$, $\forall t > 0$. Дійсно, оскільки $\mathsf{P}\left\{T_n = 0\right\} < 1$, за властивістю неперервності ймовірності $\exists C > 0$:

$$p = \mathsf{P}\left\{T_n \geq C\right\} > 0.$$

Визначимо

$$\tilde{T}_n = C\mathbb{1}_{\{T_n \geq C\}}, \tilde{\tau}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}_k$$

та $\tilde{\nu}_t = \max\left\{n : \tilde{\tau}_n \leq t\right\}$ (див. рис. 2.14.). Для $\tilde{\nu}_t$ відновлення відбуваються у моменти $t = nC$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і кількість відновлень у відповідні моменти є незалежними в.в. з розподілом $Geom\,(p)$. Тоді

$$\mathsf{E}\tilde{\nu}_t \leq \frac{t/C+1}{p} < \infty$$

і остаточний результат маємо, оскільки з $\tilde{T}_n \leq T_n$ випливає $\tilde{\nu}_t \geq \nu_t$.

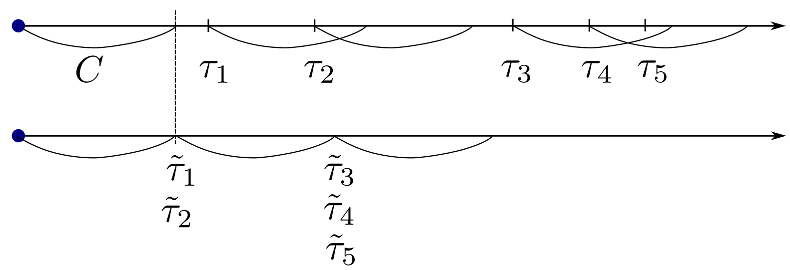


Рис. 2.14. Відновлення у фіксовані моменти

Вправа 2.33. Нехай $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – послідовність незалежних однаково розподілених в.в. зі скінченним математичним сподіванням, в.в. ν така, що подія $\{\nu \geq n\}$ не залежить від $\{\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$ та $\mathsf{E}\nu < \infty$. Показати, що

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{E}\nu.$$

Вправа 2.34. Нехай $\{\nu_t, t \geq 0\}$ – деякий процес відновлення, μ – інтенсивність відновлення. Показати, що

$$\mathsf{E}\tau_{\nu_t+1} = \mu\left(H\left(t\right) + 1\right).$$

Теорема 2.15 (Елементарна теорема відновлення)**.** *При* $t \to \infty$

$$\frac{H\left(t\right)}{t} \to \begin{cases} \frac{1}{\mu}, & \mu < \infty, \\ 0, & \mu = \infty. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $\mu < \infty$. З рівності $\tau_{\nu_t+1} > t$ маємо

$$\mu\left(H\left(t\right) + 1\right) > t,$$

тому

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{H\left(t\right)}{t} \geq \frac{1}{\mu}.$$

Для того, щоб отримати оцінку границі зверху, розглянемо

$$\bar{T}_n = T_n \mathbb{1}_{\{T_n \leq c\}} + c\mathbb{1}_{\{T_n > c\}}, \bar{\tau}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{T}_k \text{ та } \bar{\nu}_t = \sup\left\{n : \bar{\tau}_n \leq t\right\}.$$

Оскільки час між відновленнями для так побудованого процесу обмежені константою c, маємо

$$\bar{\tau}_{\bar{\nu}_t+1} \leq t + c.$$

Значить,

$$\left(\bar{H}\left(t\right) + 1\right)\mu_c \leq t + c,$$

де $\bar{H}(t) = \mathsf{E}\bar{\nu}_t$ та $\mu_c = \mathsf{E}\bar{T}_n$. Таким чином,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\bar{H}(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_c}.$$

Враховуючи що $\bar{\tau}_n \leq \tau_n$, отримаємо $\bar{\nu}_t \geq \nu_t$ та $\bar{H}(t) \geq H(t)$, тоді

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_c}.$$

Перейшовши до границі $c \to \infty$, виводимо

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Для випадку $\mu = \infty$, якщо $c \to \infty$, то $\mu_c \to \infty$ та $\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} \leq 0$. □

Припускаючи що початок відліку часу $t = 0$ не збігається з початком роботи першого приладу, отримаємо *відкладений процес відновлення.* Позначимо

$$F(t) = \mathsf{P}\{T_i \leq t\}, i = \overline{2,\infty}, \text{ та } F_1(t) = \mathsf{P}\{T_1 \leq t\},$$

тоді розподіл моментів відновлення τ_n визначений як згортка

$$\mathsf{P}\{\tau_n \leq t\} = F_1 * F^{*(n-1)}(t), t \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

де $F^{*0} \equiv 1$, і для лічильного процесу маємо

$$\mathsf{P}\{\nu_t = n\} = \mathsf{P}\{\tau_n \leq t\} - \mathsf{P}\{\tau_{n+1} \leq t\}, n \in \mathbb{N},$$

та $\mathsf{P}\{\nu_t = 0\} = \mathsf{P}\{\tau_1 > t\}$.

Застосовуючи означення математичного сподівання та зв'язок між кількістю відновлень та моментами відновлень, отримаємо таке подання для функції відновлення для відкладеного процесу

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathsf{P}\{\nu_t = n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\nu_t \geq n\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\tau_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_1 * F^{*(n-1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_1 * F^{*(n)}(t).$$

Застосувавши рівність

$$F_1 * F^{*(n)}(t) = \int_0^t F_1 * F^{*(n-1)}(t-s)\,dF(s),$$

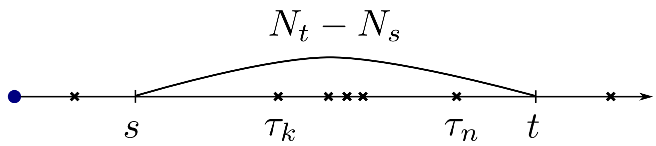


Рис. 2.15. Стохастичний потік подій відповідно до процесу Пуассона

виводимо

$$H(t) = F_1(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F_1 * F^{*(n-1)}(t-s)\,dF(s)$$

або

$$H = F_1 + H * F.$$

Тобто, функція відновлення H є розв'язком відповідного рівняння відновлення.

Завдання 14. *Для відкладеного процесу відновлення $\{\nu_t, t \geq 0\}$ позначимо*

$$\mu = \int_0^{\infty} t dF(t).$$

Показати, що його функція відновлення може бути подана як

$$H(t) = \frac{t}{\mu}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$F_1(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t (1 - F(s))\,ds, t \geq 0.$$

Міра Пуассона

Позначимо через # рахуючу міру, тоді за доведеним вище приріст процесу Пуассона визначає кількість елементів стохастичного потоку $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ на проміжку $(s,t]$ (див. рис. 2.15.):

$$N_t - N_s = \#\{n \geq 1 : \tau_n \in (s,t]\}, 0 \leq s < t.$$

Враховуючи властивості траєкторій N_t, для фіксованого $\omega \in \Omega$ функція $N_t(\omega)$ задає міру Лебега-Стільт'єса $N(A) = N(A,\omega)$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), N(A,\omega) = \#\{n \in \mathbb{N} : \tau_n(\omega) \in A\}.$$

Тоді $N(\cdot,\omega)$ – цілозначна міра, яка м.н. скінченна для обмеженої множини A. Більш того, $N(A,\cdot)$ – в.в. з середнім

$$\mathsf{E}N(A) = \lambda\ell(A).$$

Сім'ю $\{N(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ називають *випадковою мірою, асоційованою з процесом Пуассона*: $N(A)$ визначає кількість стрибків процесу Пуассона, які відбулись на множині A.

Властивості процесу Пуассона трансформуються у відповідні властивості міри:

$$N(A) \sim Pois(\lambda \ell(A)), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

та для довільних $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ маємо, що $\left\{N([t_{i-1}, t_i)), i = \overline{1,n}\right\}$ – сім'я незалежних в.в. Відштовхуючись від цих властивостей, можемо визначити міру Пуассона необов'язково з лебеговою інтенсивністю стрибків.

Визначення. Нехай $\{E, \mathcal{B}(E), \lambda\}$ – простір з мірою, де $E \subset \mathbb{R}^d$ та λ – міра Радона, тобто $\lambda(K) < \infty$ для довільного компакта $K \in \mathcal{B}(E)$[15]. Відображення $N : E \times \Omega \to \mathbb{Z}_+^c$ називають мірою Пуассона з інтенсивністю λ, якщо виконані такі умови:

1. $\{N(A) = N(A, \omega), A \in \mathcal{B}(E)\}$ є сім'єю $Pois(\lambda(A))$-розподілених в.в.

2. $N(A)$ є мірою на $\mathcal{B}(E)$ м.н.

3. Для несумісних множин $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$ в.в. $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ незалежні.

Відмітимо, що якщо $\lambda(A) = 0$ або $\lambda(A) = \infty$, то відповідно вважаємо, що $N(A) = 0$ або $N(A) = \infty$ м.н.

Вправа 2.35. Нехай $\nu \sim Pois(20)$, $\lambda > 0$, $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – незалежні послідовності незалежних $Unif[0,1]$-розподілених в.в., які не залежать від в.в. ν. Показати, що сім'я в.в. $\{N(A), A \in \mathcal{B}([0,1] \times [0,1])\}$ визначених як

$$N(A, \omega) = \sum_{j=1}^{\nu(\omega)} \mathbb{1}_{\{(\xi_j, \eta_j) \in A\}}(\omega),$$

визначають міру Пуассона на $[0,1] \times [0,1]$ з інтенсивністю $\lambda(A) = 20\ell(A)$.

Приклад (Моделювання міри Пуассона в одиничному квадраті)**.** Попередня вправа дозволяє визначити спосіб одержання реалізації міри Пуассона в квадраті $[0,1] \times [0,1]$ (див. рис. 2.5. та алгоритм 5).

Теорема 2.16 (про існування міри Пуассона з інтенсивністю λ)**.** *Для довільної міри Радона λ на $\{E, \mathcal{B}(E)\}, E \subset \mathbb{R}^d$, існує міра Пуассона на E з інтенсивністю λ.*

[15] Як E можна взяти довільний локально компактний польський простір (див., наприклад, Section 29.3 в *Fristedt B.E., Gray L.F.* A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997).

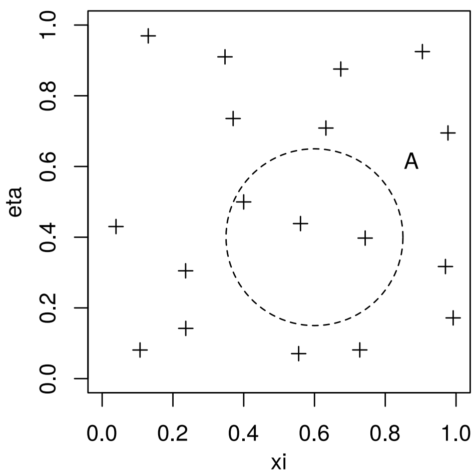


Рис. 2.16. $N(A)$ **визначає кількість точок, що потрапили у область** $A \in \mathcal{B}\left([0,1]^2\right)$

Алгоритм 7 Моделювання міри Пуассона в квадраті

```
set.seed(112);require("plotrix");par(pty = "s")
nu<-rpois(1,lambda=20);xi<-runif(nu);eta<-runif(nu)
plot(xi,eta,xlim=c(0,1),ylim=c(0,1),pch=3)
draw.circle(0.6, 0.4, 0.25,lty = 2); text(0.9,0.6,"A")
```

Доведення. Припустимо, що $\lambda(E) < \infty$, тоді міра Q, визначена як

$$\mathsf{Q}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(E)},$$

є ймовірнісною на $\{E, \mathcal{B}(E)\}$. За теоремою Ломницького-Улама існує ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, на якому можемо задати незалежні випадкові елементи $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ з розподілом Q та незалежну від них в.в. $N(E) \sim Pois(\lambda(E))$. Визначимо

$$N(A) = \sum_{i=1}^{N(E)} \mathbb{1}_{\{\xi_i \in A\}}, A \in \mathcal{B}(E).$$

Тоді N відповідає означенню міри Пуассона з інтенсивністю λ. Для довільного $A \in \mathcal{B}(E)$: $N(A)$ є в.в як суміш в.в. і для м.у. $\omega \in \Omega$: $N(\cdot, \omega)$ є мірою на $\mathcal{B}(E)$ як сума скінченної кількості атомарних мір зосереджених в точках ξ_i. Незалежність та пуассоновість встановлюється аналогічно до прикладу про генерування траєкторій процесу Пуассона.

Якщо $\lambda(E) = \infty$, то подамо

$$E = \vee_{i\in\mathbb{N}} E_i : E_i \in \mathcal{B}(E), \lambda(E_i) < \infty,$$

і позначимо звуження міри λ на підпростір E_i через λ_i:

$$\lambda_i(A) = \lambda(A \cap E_i).$$

За доведеним вище для кожного $i \in \mathbb{N}$ існують імовірнісні простори $\{\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathsf{P}_i\}$, на яких визначені міри Пуассона N_i з інтенсивностями λ_i. Визначимо $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ як $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i, \times_{i\in\mathbb{N}}\mathsf{P}_i\}$ і на ньому задамо

$$N(A,\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} N_i(A\cap E_i, \omega_i), A \in \mathcal{B}(E), \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega.$$

Враховуючи, що згортка розподілів Пуассона є розподіл Пуассона, маємо

$$N(A) \sim Pois(\lambda(A)).$$

Для довільних несумісних множин $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}(E)$:

$$\begin{aligned} N(\vee_{k\in\mathbb{N}}A_k) = \sum_{i\in\mathbb{N}} N_i(\vee_{k\in\mathbb{N}}A_k \cap E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} N_i(A_k\cap E_i) = \\ = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} N_i(A_k\cap E_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} N(A_k), \end{aligned}$$

тобто $N(A)$ є мірою на $\mathcal{B}(E)$ м.н. Оскільки для несумісних множин $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$: $\left\{N_i(A_k\cap E_i), k = \overline{1,n}, i\in\mathbb{N}\right\}$ є системою незалежних в.в., маємо виконаною для $N(\cdot)$ також умову незалежності значень на несумісних множинах. □

Завдання 15. *Нехай $N(\cdot)$ – міра Пуассона на $\{E, \mathcal{B}(E), \lambda\}$. Показати, що*

1. *Для довільних $A \in \mathcal{B}(E)$, $N(\cdot\cap A)$ є мірою Пуассона на звуженому просторі $\{E\cap A, \mathcal{B}(E)\cap A, \lambda(\cdot\cap A)\}$.*

2. *Для довільних несумісних $A, B \in \mathcal{B}(E)$ міри $N(\cdot\cap A)$ та $N(\cdot\cap B)$ незалежні.*

3. *М.н. носій (найменша замкнена множина, на якій зосереджена міра) для $N(\cdot)$ зліченний. Якщо, додатково, λ є скінченною мірою, то носій міри $N(\cdot)$ м.н. скінченний.*

4. *Якщо λ має атом в $\{a\} \in \mathcal{B}(E)$, тоді $\mathsf{P}\{N(\{a\}) \geq 1\} > 0$. Навпаки, якщо λ не має атомів, тоді $\mathsf{P}\{N(\{a\}) = 0\} = 1$, $\forall\{a\} \in \mathcal{B}(E)$.*

Приклад (міра Пуассона асоційована зі складним процесом Пуассона)**.** Нехай $\{N_t, \geq 0\}$ – простий процес Пуассона з інтенсивністю λ незалежний від послідовності $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ незалежних однаково розподілених в.в. з функцією розподілу $F(x)$. Покажемо, що

$$N(A,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{(\tau_k(\omega), \xi_k(\omega))\in A\}}$$

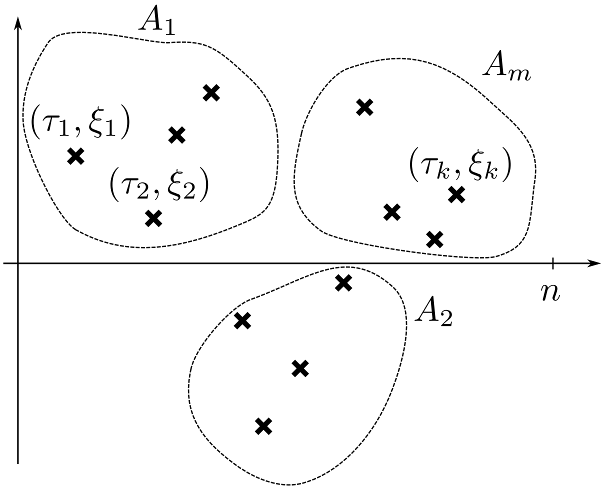


Рис. 2.17. Міра Пуассона на $[0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

визначає міру Пуассона на $E = [0,\infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ з відповідною σ-алгеброю борелевих множин.

Аналогічно як під час доведення теореми про існування міри Пуассона з інтенсивністю λ отримаємо, що $N(A, \cdot)$ є в.в. як збіжний ряд в.в. та $N(\cdot, \omega)$ є м.н. мірою як сума атомарних мір зосереджених в точках $\{(\tau_k, \xi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Покажемо, що для несумісних подій $A_1, \ldots, A_m$ в.в. $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ незалежні пуассоново розподілені.

Припустимо спочатку, що $A_i \in \mathcal{B}([0,n]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $i = \overline{1,m}$, для деякого $n \in \mathbb{N}$ (див. рис. 2.17.), і розглянемо спільний розподіл для $N(A_1), \ldots, N(A_m)$:

$$\mathsf{P}\{N(A_1) = k_1, \ldots, N(A_m) = k_m\} =$$
$$= \sum_{k \geq \sum_{i=1}^m k_i}^{\infty} \mathsf{P}\{N(A_1) = k_1, \ldots, N(A_m) = k_m | N_n = k\} \mathsf{P}\{N_n = k\}.$$

Для простого процесу Пуассона (див. завдання 12) маємо, що

$$(\tau_1, \ldots, \tau_k) | N_n = k \sim \left(U_{(1)}, \ldots, U_{(k)}\right),$$

де $\left\{U_{(i)}\right\}_{i=1}^k$ – порядкові статистики для вибірки з розподілу $Unif\,[0,n]$, тоді, враховуючи незалежність $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ та $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, аналогічно

$$\{(\tau_1, \xi_1), \ldots, (\tau_k, \xi_k)\} | N_n = k \sim \left(V_{(1)}, \ldots, V_{(k)}\right),$$

де $\left\{V_{(i)}\right\}_{i=1}^k$ – вибірка двовимірних в.в. з розподілу

$$\mathsf{P}_V(A) = \int_A \frac{1}{n} ds dF(x), A \in \mathcal{B}([0,n]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

впорядкована за часом. Зокрема,

$$N(A) | N_t = k \sim Binom(k, \mathsf{P}_V(A)).$$

Позначимо

$$A_0 = ([0,n] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \setminus (\vee_{i=1}^m A_i),$$

тоді

$$(N(A_1), \ldots, N(A_m)) \,|N_n = k \sim Multinomial\,(k; (\mathsf{P}_V(A_0), \ldots, \mathsf{P}(A_m)))$$

та

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{N(A_1) = k_1, \ldots, N(A_m) = k_m\} = \\
&= \sum_{k \geq \sum_{i=1}^m k_i}^{\infty} \frac{k!}{k_1! \ldots k_m! \,(k - \sum k_i)!} \prod_{i=1}^m \mathsf{P}_V^{k_i}(A_i)\, \mathsf{P}_V^{k-\sum k_i}(A_0) \times \frac{(\lambda n)^k}{k!} e^{-\lambda n} = \\
&\quad = \sum_{k \geq \sum_{i=1}^m k_i}^{\infty} \frac{(\lambda n \mathsf{P}_V(A_0))^{k-\sum k_i}}{(k - \sum k_i)!} \prod_{i=1}^m \frac{(\lambda n \mathsf{P}_V(A_i))^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda t} = \prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i},
\end{aligned}$$

де $\lambda_i = \lambda n \mathsf{P}_V(A_i) = \lambda \int_{A_i} ds dF(x)$.

Для довільних несумісних $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $i = \overline{1,m}$, розглянемо несумісні

$$B_i^n = A_i \cap ([n-1, n) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \in \mathcal{B}([0,n]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\left\{N(B_i^n), i = \overline{1,m}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ – сім'я незалежних пуассоново розподілених, отримаємо, що і $\left\{N(A_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N(B_i^n), i = \overline{1,m}\right\}$ – сім'я незалежних пуассоново розподілених в.в., як сума незалежних пуассоново розподілених.

Завдання для самоконтролю

1. Знайти скінченновимірні розподіли процесу Пуассона.

2. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ. Знайти $\mathsf{P}\{N_t \text{ є парним}\}$ та $\mathsf{P}\{N_t \text{ є непарним}\}$.

3. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з параметром λ і $\{\tau_k\}$ – моменти стрибків. Знайти умовний розподіл для $\tau_1 | N_1 \geq k$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Нехай $\{N_{1,2}(t), t \geq 0\}$ – два незалежні процеси Пуассона з інтенсивностями λ_1 та λ_2 відповідно. Знайти ймовірність того, що двовимірний процес $N_t = (N_1(t), N_2(t))$ перетне пряму $x + y = 10$ в деякій заданій точці.

5. Нехай $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – стохастичний потік подій, причому в.в. $\tau_k - \tau_{k-1}$ незалежні $Unif\,[0,T]$-розподілені. Позначимо через ν_t відповідний лічильний процес. Знайти $\mathsf{P}\{\nu_t \geq 5\}$.

3. ПРОЦЕС ВІНЕРА

Припустимо, що маємо достатньо великий контейнер повністю заповнений однорідною рідиною, в якому знаходиться маленька частинка, що рухається під впливом молекул рідини. Припустимо також, що в початковий момент частинка має координати $(0, 0, 0)$ і в момент часу t знаходиться в точці контейнера (x_t, y_t, z_t) (див. рис. 3.1.). Якщо молекули рідини не мають

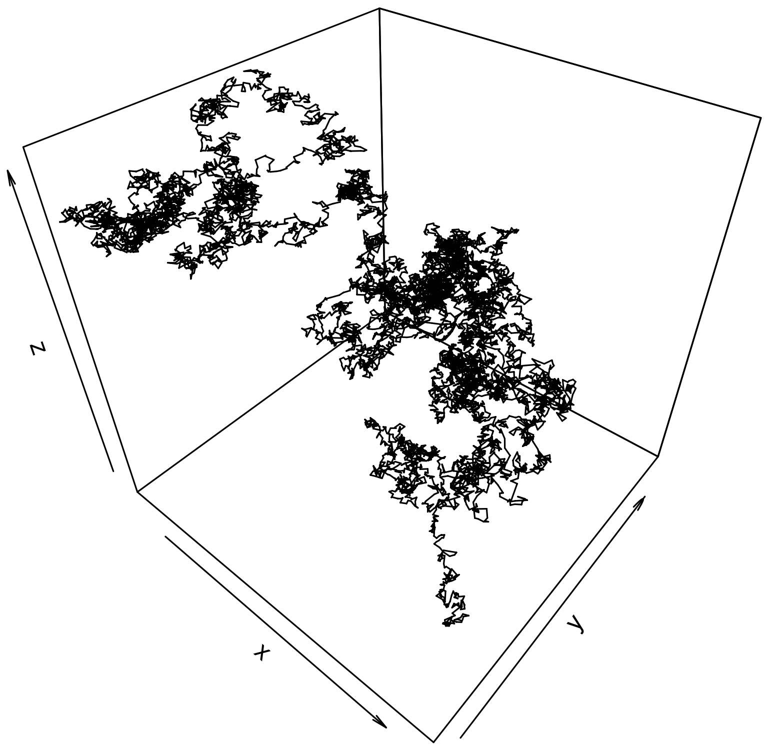


Рис. 3.1. Траєкторія процесу Вінера в просторі

направленого руху, можемо припустити, що координати x_t, y_t та z_t незалежні в.в., які мають однаковий розподіл. Тому можемо сконцентруватись лише на координаті x_t.

Розіб'ємо відрізок часу $(0, t)$ на проміжки довжиною h і позначимо зміну координати на відповідному проміжку розбиття як Δx_i, тоді для достатньо малого h розподіл координати x_t буде "близький" до розподілу випадкового блукання $\sum_i \Delta x_i$. Вважатимемо, що $\{\Delta x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – незалежні в.в. з таким розподілом $\begin{pmatrix} -\delta & \delta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, де $\delta = o\left(\sqrt{h}\right)$, за умови $h \to 0$ (див. рис. 3.2.). Тоді за центральною граничною теоремою випадкове блукання асимптотично

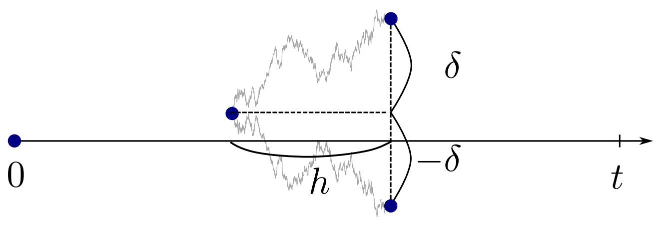


Рис. 3.2. Зміна координати x_t

Алгоритм 8 Моделювання траєкторії процесу W_t

```
set.seed(112)
n<-5000; t<-3;
bm<-c(0, cumsum(rnorm(n,0,sqrt(t/n))))
steps<-seq(0,t,length=n+1)
plot(steps,bm,type="l"); grid();
```

буде мати нормальний розподіл з параметрами 0 та t. В цьому випадку говорять, що поведінка координат частинки може бути описана за допомогою процесу Вінера.

3.1. Означення та поведінка траєкторій

Визначення. (Перше визначення процесу Вінера) Дійсний в.п. $\{W_t, t \geq 0\}$ називають (стандартним) процесом Вінера, якщо

1. $W_0 = 0$ м.н.;
2. W_t має незалежні прирости;
3. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, $0 \leq s < t$.

Розглянемо х.ф. приростів

$$\mathsf{E}e^{\imath\alpha(W_t - W_s)} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-s)} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-u)}e^{-\frac{\alpha^2}{2}(u-s)} = \mathsf{E}e^{\imath\alpha(W_t - W_u)}\mathsf{E}e^{\imath\alpha(W_u - W_s)},$$

тобто виконані умови теореми про існування процесу з незалежними приростами за заданого розподілу приросту і значить дане означення коректне. Більш того, раніше було встановлено, що для процесу W_t існує неперервна модифікація і в подальшому розглядатимемо саме її.

Приклад (Моделювання траєкторії процесу Вінера)**.** За означенням процесу Вінера

$$W_{t+s} - W_t \sim \sqrt{s}\zeta, s, t > 0,$$

де в.в. $\zeta \sim N(0,1)$ не залежить від $W_t = W_t - W_0$. Звідки, для значень процесу в деяких точках $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ маємо таке подання

$$W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}}\zeta_i, i = \overline{1,n},$$

де $\left\{\zeta_i, i = \overline{1,n}\right\}$ – незалежні $N(0,1)$ розподілені в.в. Відповідно, щоб побудувати наближення траєкторії на рівномірному розбитті $\left\{\frac{Ti}{n}, i = \overline{0,n}\right\}$ відрізка $[0,T]$, можемо використати значення $\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^{i}\zeta_k$, $i = \overline{1,n}$, з'єднуючи їх прямими (див. рис. 3.3. та алгоритм 8).

Хоча траєкторії процесу неперервні ведуть вони себе надзвичайно нерегулярно.

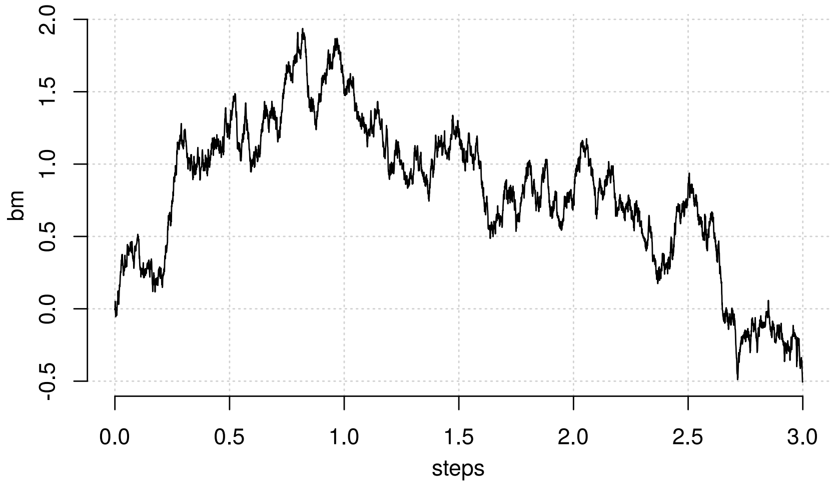


Рис. 3.3. Згенерована траєкторія W_t на $[0,3]$

Теорема 3.1 (про недиференційовність траєкторій процесу Вінера). *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера, тоді для довільного $t \geq 0$ м.н. траєкторія процесу недиференційовна в точці t.*

Доведення. Зафіксуємо деяку точку $t \geq 0$ і припустимо, що існує подія $A \in \mathcal{F}$ ненульової міри, така що для $\omega \in A$ траєкторія $W_s(\omega)$ є диференційовною в $s = t$. Внаслідок стаціонарності приростів достатньо розглянути випадок $t = 0$. Тобто за зробленим припущенням маємо, що для $\omega \in A$ існує

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{W_t - W_0}{t} = W_0'.$$

Тоді має існувати

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}}}{2^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \left(2\frac{W_{2^{-k+1}}}{2^{-k+1}} - \frac{W_{2^{-k}}}{2^{-k}} \right) = 2W_0' - W_0' = W_0'.$$

Покажемо, що існування цієї границі не можлива.

Розглянемо події

$$A_k = \left\{ W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}} > \sqrt{2^{-k}} \right\}.$$

Оскільки ці події для різних індексів $k \neq l$ визначені приростами процесу на несумісних проміжках, маємо що ці події незалежні. Крім того, враховуючи, що прирости мають нормальний розподіл виводимо

$$\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}\left\{ W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}} > \sqrt{2^{-k}} \right\} = \int_{2^{-k/2}}^{\infty} \left(2\pi 2^{-k}\right)^{-1/2} e^{-\frac{u^2}{2\cdot 2^{-k}}} du.$$

Зробивши заміну $\frac{u}{2^{-k/2}} = t$, одержимо

$$\mathsf{P}(A_k) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = p > 0.$$

Звідси маємо, що $\sum_k \mathsf{P}(A_k) = \infty$ і внаслідок леми Бореля-Кантелі отримаємо

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim}_k A_k\right) = \mathsf{P}\left(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k\right) = 1.$$

Тобто, м.н. відбувається нескінченна кількість подій

$$\left\{\frac{W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}}}{2^{-k}} > \frac{1}{\sqrt{2^{-k}}}\right\}$$

і значить,

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim}\frac{W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}}}{2^{-k}} = \infty\right\} = 1$$

аналогічно

$$\mathsf{P}\left\{\underline{\lim}\frac{W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}}}{2^{-k}} = -\infty\right\} = 1.$$

Отже, м.н. не існує $\lim_{k\to\infty} \frac{W_{2^{-k+1}} - W_{2^{-k}}}{2^{-k}}$ і відповідно не існує W_0'. □

Зауважимо, що має місце більш сильний результат: з імовірністю 1 траєкторія процесу Вінера недиференційовна в жодній фіксованій точці[16].

Застосовуючи аналогію із симетричним випадковим блуканням маємо, що

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim} W_t = \infty\right\} = \mathsf{P}\left\{\underline{\lim} W_t = -\infty\right\} = 1.$$

Крім того, з $W_t \sim N(0,t)$ для довільного $x > 0$ маємо, що

$$\mathsf{P}\{W_t > x\} = \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du,$$

зокрема,

$$\mathsf{P}\left\{|W_t| \leq 3\sqrt{t}\right\} \approx 0.997.$$

Тобто "істотний" вихід траєкторії W_t за межі $\pm 3\sqrt{t}$ малоймовірний (див. рис. 3.4.). Відмітимо, що цей результат можна уточнити[17].

Теорема 3.2 (про закон повторного логарифма)**.** *Якщо* $\{W_t, t \geq 0\}$ *– процес Вінера, то*

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1\right\} = \mathsf{P}\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = -1\right\} = 1.$$

[16] Див., наприклад, Theorem 4.3 в *Mishura Y., Shevchenko G.* Theory and Statistical Applications of Stochastic Processes. – London: ISTE Ltd, 2017.

[17] Див., наприклад, Глава 18, §3, Теорема 5 в *Боровков А.А.* Теория веростностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

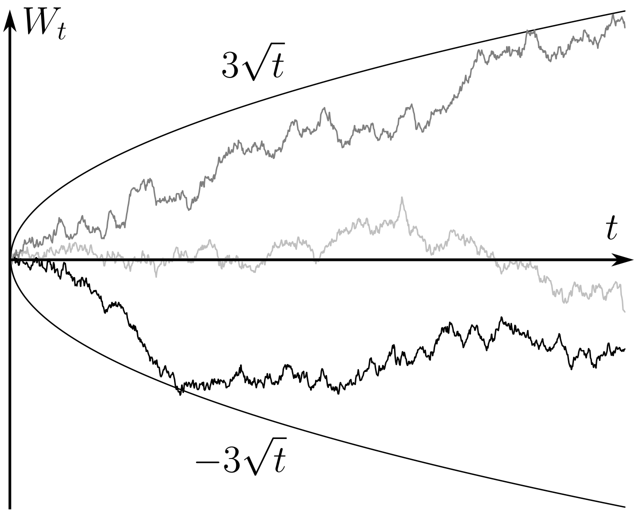


Рис. 3.4. Поведінка траєкторій процесу Вінера

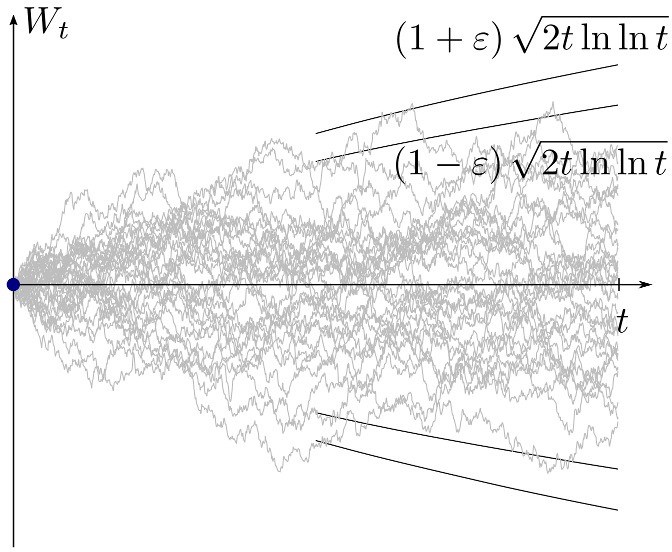


Рис. 3.5. Уточнена поведінка траєкторій

Рівність

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right\}=1$$

можна проінтерпретувати як: для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ та послідовності $t_n \uparrow \infty$ має місце скінченна кількість подій

$$\left\{\sup_{s\geq t_n}\left(W_s-(1+\varepsilon)\sqrt{2s\ln\ln s}\right)>0\right\}$$

та нескінченна кількість (див. рис. 3.5. та алгоритм 9).

$$\left\{\sup_{s\geq t_n}\left(W_s-(1-\varepsilon)\sqrt{2s\ln\ln s}\right)>0\right\}.$$

Визначення. (Друге визначення процесу Вінера). Процес $\{W_t, t\geq 0\}$ називають процесом Вінера, якщо він є процесом Гаусса з функцією середніх $m_t=0$ та коваріаційною функцією $\gamma_{ts}=t\wedge s$.

Алгоритм 9 Асимптотичні межі подвійного логарифму

```
N<-4000
e<-0.1
t1<-(N/2):N
t0<-0:N
lnln_up<-(1+e)*sqrt(2*t1*log(log(t1)))
lnln_down<-(1-e)*sqrt(2*t1*log(log(t1)))
ymax<-max(lnln_up)+1
ymin<--ymax
wiener1<-cumsum(rnorm(N+1))
plot(t0,wiener1,type="l")
abline(h=0)
plot(t0,wiener1,type="l",
     ylim=c(ymin,ymax),col="gray")
points(t1,lnln_up,type="l")
points(t1,lnln_down,type="l")
points(t1,-lnln_up,type="l")
points(t1,-lnln_down,type="l")
for(i in 1:30){
   points(cumsum(rnorm(N+1)),type="l",col="gray")
}
```

Теорема 3.3 (про еквівалентність першого та другого визначень процесу Вінера)**.** *Перше та друге визначення процесу Вінера еквівалентні.*

Доведення. Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера за першим визначенням, тоді $\mathsf{E}W_t = 0$ та для $s < t$:

$$\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \operatorname{cov}(W_t - W_s, W_s) + \operatorname{cov}(W_s, W_s) = 0 + \mathsf{D}W_s = s,$$

аналогічно, для $s > t$: $\operatorname{cov}(W_t, W_s) = t$. Для довільних $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ маємо

$$\begin{pmatrix} W_{t_0} \\ W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_0} \\ W_{t_1} - W_{t_0} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Тобто вектор $(W_{t_0}, \ldots, W_{t_n})$ є лінійне перетворення вектора з незалежними нормально розподіленими компонентами, а значить є нормальний. А отже, W_t – процес Гаусса.

Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера за другим визначенням. З умов цього визначення маємо, що $\mathsf{E}W_0 = 0$ та $\mathsf{D}W_0 = 0$, звідки $W_0 = 0$ м.н. З подання вектора приростів

$$\begin{pmatrix} W_{t_0} \\ W_{t_1} - W_{t_0} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_0} \\ W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix}$$

робимо висновок про те, що він має нормальний розподіл і для незалежності приростів достатньо встановити їх некорельованість. Для $k \neq m$ розглянемо

$$\operatorname{cov}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}, W_{t_{m+1}} - W_{t_m}\right) = \\ = t_{k+1} \wedge t_{m+1} - t_k \wedge t_{m+1} - t_{k+1} \wedge t_m + t_k \wedge t_m = 0.$$

Тобто, коваріаційна матриця для $\{\Delta W_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ є діагональною, а отже, процес W_t має незалежні прирости. Крім того, приріст $W_t - W_s$, $t > s$, має нормальний розподіл як елемент нормального вектора та $\mathsf{E}\left(W_t - W_s\right) = 0$,

$$\mathsf{D}\left(W_t - W_s\right) = \operatorname{cov}\left(W_t - W_s, W_t - W_s\right) = t \wedge t - t \wedge s - s \wedge t + s \wedge s = t - s.$$

Отже, $W_t - W_s \sim N\left(0, t - s\right)$. □

Приклад (скінченновимірні розподіли процесу Вінера)**.** Застосовуючи друге визначення процесу Вінера, отримаємо спільну щільність для $\{W_{t_1}, \dots, W_{t_n}\}$, $0 < t_1 < \dots < t_n$.

Оскільки

$$X = \left(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}\right)^\top \sim N\left(0, \Sigma\right), \Sigma = \|t_i \wedge t_j\|,$$

отримаємо, що спільна щільність має вигляд

$$f_X\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^n |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x^\top \Sigma^{-1} x\right\}.$$

Враховуючи зображення вектора X як лінійне перетворення AY з матрицею перетворення

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

вектора послідовних приростів

$$Y = \left(W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\right)^\top$$

(див. доведення теореми про еквівалентність першого та другого визначень процесу Вінера), який має нормальний розподіл з середнім 0 та коваріаційною матрицею

$$D = \begin{pmatrix} t_1 - t_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix},$$

маємо що $\Sigma = ADA^\top$ та $\Sigma^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top D^{-1} A^{-1}$. Звідки

$$x^\top \Sigma^{-1} x = \left(A^{-1}x\right)^\top D^{-1}\left(A^{-1}x\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}{t_i - t_{i-1}},$$

де $x_0 = 0 = t_0$. Крім того,

$$|\Sigma| = \left|A^\top\right| |D| \, |A| = |D| = \prod_{i=1}^{n} \left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Отже,

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(t_i - t_{i-1}\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}{t_i - t_{i-1}}\right\}.$$

Теорема 3.4 (про перетворення процесу Вінера). *Нехай* $\{W_t, t \geq 0\}$ *– процес Вінера, тоді такі процеси також є процесами Вінера:*

1) $\{-W_t, t \geq 0\}$ *(симетрія);*

2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}, t \geq 0\right\}$ *(зміна шкали);*

3) $\{W_{t+a} - W_a, t \geq 0\}$, $a > 0$ *(перезапуск);*

4) $\{W_{s-t} - W_s, t \in [0, s]\}$, $s > 0$ *(ретроспектива);*

5) $\left\{\bar{W}_t = tW_{\frac{1}{t}}, t > 0, \bar{W}_0 = 0\right\}$ *(зворотність).*

Доведення. Розглянемо лише випадок 5), доведення інших пропонується як вправа. Зазначимо $\bar{W}_t$ визначений лінійним перетворенням процесу Гаусса при цьому $\mathsf{E}\bar{W}_t = 0$ та $\operatorname{cov}\left(\bar{W}_t, \bar{W}_s\right) = t \wedge s$. Залишається перевірити, що неперервність в нулі зберігається. Тобто, що $\lim_{t \downarrow 0} tW_{\frac{1}{t}} = 0$ або, що теж саме, що $\lim_{t \uparrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ м.н.

Якщо $n \geq 0$: $n < t \leq n + 1$, то

$$\left|\frac{1}{t}W_t\right| \leq \frac{1}{n}|W_t| \leq \frac{1}{n}|W_t - W_n| + \frac{1}{n}|W_n| \leq \frac{1}{n}|W_n| + \sup_{0 \leq s \leq 1} \frac{|W_{n+s} - W_n|}{n}.$$

За посиленим законом великих чисел перший доданок $\frac{W_n}{n} \to 0$ м.н., оскільки W_n можна подати як суму незалежних копій W_1 та $\mathsf{E}W_1 = 0$.

Для другого доданку застосуємо нерівність Колмогорова:

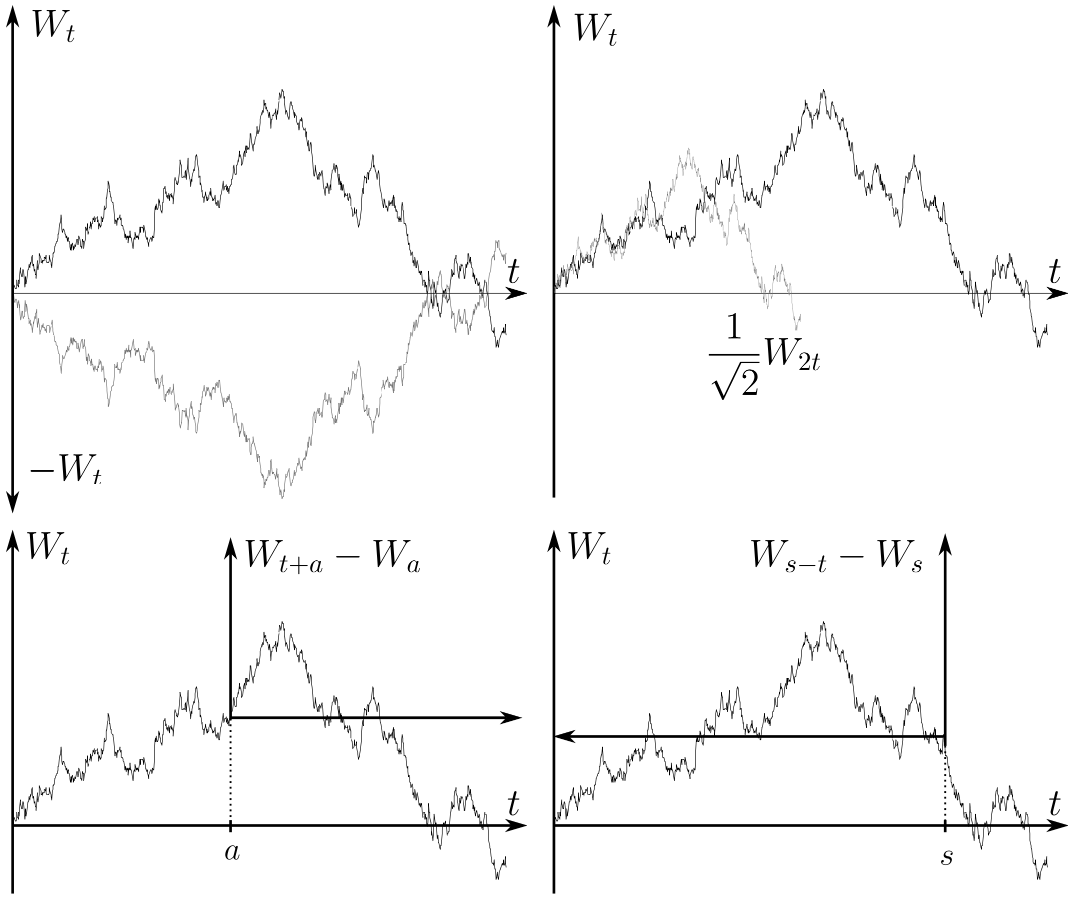


Рис. 3.6. Перетворення процесу Вінера

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\in[0,1]}\frac{|W_{n+s}-W_n|}{n} > \varepsilon\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{s\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\frac{|W_{n+s}-W_n|}{n} > \varepsilon\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{D}\left(\frac{W_{n+1}-W_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}, \forall\varepsilon > 0.$$

Враховуючи збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, за лемою Бореля-Кантелі виводимо, що і другий доданок м.н. прямує до нуля. $\square$

Властивість зворотності показує, що знання поведінки процесу на нескінченності дозволяє охарактеризувати поведінку біля 0. Наприклад, з теореми про закон повторного логарифма можемо безпосередньо вивести *локальний* закон повторного логарифму:

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = 1\right\} = \mathsf{P}\left\{\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = -1\right\} = 1.$$

Властивість зміни шкали (див. рис. 3.6.) називають також властивістю самоподібністю (або фрактальністю).

Приклад (момент виходу зі смуги)**.** Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера та для $a < 0 < b$ позначимо

$$\tau_{(a,b)} = \inf\{t \geq 0 : W_t = a \text{ або } W_t = b\}$$

– момент першого виходу з інтервалу (a, b). Покажемо, що розподіл процесу в момент виходу залежить лише від відношення $\frac{b}{a}$.

Позначимо

$$X_t = \frac{1}{|a|} W_{a^2 t},$$

тоді

$$\begin{aligned}
\tau_{(a,b)} &= \inf\{t \geq 0 : W_t = a \text{ або } W_t = b\} = \\
&= \inf\left\{a^2 \frac{t}{a^2} \geq 0 : \frac{1}{|a|} W_{a^2 \frac{t}{a^2}} = -1 \text{ або } \frac{1}{|a|} W_{a^2 \frac{t}{a^2}} = \frac{b}{|a|}\right\} = \\
&= \inf\left\{a^2 s \geq 0 : \frac{1}{|a|} W_{a^2 s} = -1 \text{ або } \frac{1}{|a|} W_{a^2 s} = \frac{b}{|a|}\right\} = \\
&= a^2 \inf\left\{s \geq 0 : X_s = -1 \text{ або } X_s = \frac{b}{|a|}\right\},
\end{aligned}$$

тобто $\tau_{(a,b)} \sim a^2 \tau_{\left(-1, \left|\frac{b}{a}\right|\right)}$, зокрема $\tau_{(-b,b)} \sim b^2 \tau_{(-1,1)}$. Отже, отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{W_{\tau_{(a,b)}} = a\right\} = \mathsf{P}\left\{W_{\tau_{\left(-1, \left|\frac{b}{a}\right|\right)}} = -1\right\}$$

та

$$\mathsf{P}\left\{W_{\tau_{(a,b)}} = b\right\} = \mathsf{P}\left\{W_{\tau_{\left(-1, \left|\frac{b}{a}\right|\right)}} = \left|\frac{b}{a}\right|\right\}.$$

Приклад (розподіл минулих значень процесу Вінера за фіксованих майбутніх)**.** Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера. Для $0 < s < t$ та $x \in \mathbb{R}$ знайдемо умовний розподіл W_s за умови $W_t = x$.

Застосовуючи властивість зворотності маємо такий ланцюг рівностей

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{W_s < y | W_t = x\} &= \mathsf{P}\left\{s\tilde{W}_{\frac{1}{s}} < y | t\tilde{W}_{\frac{1}{t}} = x\right\} = \mathsf{P}\left\{\tilde{W}_{\frac{1}{s}} < \frac{y}{s} | \tilde{W}_{\frac{1}{t}} = \frac{x}{t}\right\} = \\
&= \mathsf{P}\left\{\tilde{W}_{\frac{1}{s}} - \tilde{W}_{\frac{1}{t}} + \tilde{W}_{\frac{1}{t}} < \frac{y}{s} | \tilde{W}_{\frac{1}{t}} = \frac{x}{t}\right\} = \mathsf{P}\left\{\tilde{W}_{\frac{1}{s}} - \tilde{W}_{\frac{1}{t}} + \frac{x}{t} < \frac{y}{s}\right\} = \\
&= \mathsf{P}\left\{s\left(\tilde{W}_{\frac{1}{s}} - \tilde{W}_{\frac{1}{t}}\right) + \frac{sx}{t} < y\right\}.
\end{aligned}$$

Тобто умовний розподіл збігається з розподілом в.в. $s\left(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\right) + \frac{sx}{t}$, який є нормальний з середнім $\frac{sx}{t}$ та дисперсією $s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) = s\left(1 - \frac{s}{t}\right)$. Отже,

$$W_s | W_t = x \sim N\left(\frac{sx}{t}, s\left(1 - \frac{s}{t}\right)\right).$$

Варіація процесу Вінера

Нехай маємо відображення $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, оберемо довільне $t \in \mathbb{R}_+$ та побудуємо розбиття $D_n = \{t_k\}_{k=0}^{n}$ для $[0,t]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Позначимо

$$\delta_n = \max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$$

та

$$V_n^{(p)}(f)_t = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p, p > 0.$$

Визначення. Число

$$var_p(f)_t = \lim_{\delta_n \to 0} V_n^{(p)}(f)_t$$

називають варіацією функції f на $[0,t]$ вздовж послідовного розбиття. Повною варіацією порядку p називають

$$VAR_p(f)_t = \sup\left\{V_n^{(p)}(f)_t, D_n - \text{ деяке розбиття } [0,t], n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Повна варіація існує завжди, а якщо існує і варіація вздовж послідовного розбиття, то маємо

$$var_p(f)_t \le VAR_p(f)_t.$$

Відмітимо також, що для неперервної функції варіацію можна шукати лише для розбиття раціональними точками.

Теорема 3.5 (про квадратичну варіацію W_t в L_2). *Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – процес Вінера, D_n – послідовне розбиття відрізка $[0,t]$: $\delta_n \to 0$, тоді*

$$\mathsf{E}\left(V_n^{(2)}(W)_t - t\right)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доведення. З рівності

$$\mathsf{E}\left(V_n^{(2)}(W)_t\right) = \mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = t$$

маємо, що

$$\mathsf{E}\left(V_n^{(2)}(W)_t - t\right)^2 = \mathsf{D}V_n^{(2)}(W)_t = \sum \mathsf{D}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})^2 \mathsf{D}\left(\frac{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}\right)^2 =$$
$$= \mathsf{D}W_1^2 \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})^2 \le \mathsf{D}W_1^2 t\delta_n \to 0, n \to \infty.$$

$\square$

Теорема 3.6 (про повну варіацію W_t порядку $p < 2$). *Нехай* $\{W_t, t \geq 0\}$ – *процес Вінера, тоді для* $p < 2$

$$VAR_p\left(W\right)_t = \infty \text{ м.н.}$$

Доведення. Припустимо, що $p = 2 - \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, тоді

$$\begin{aligned}V_n^{(2)}\left(W\right)_t = \sum_{k=1}^{n}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = \sum_{k=1}^{n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{2-\varepsilon+\varepsilon} \leq \\ \leq \max_{1\leq k\leq n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{\varepsilon} \times \sum_{k=1}^{n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{2-\varepsilon} = \\ = \max_{1\leq k\leq n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{\varepsilon} \times V_n^{(p)}\left(W\right)_t \leq \\ \leq \max_{1\leq k\leq n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{\varepsilon} VAR_p\left(W\right)_t .\end{aligned}$$

Послідовність в.в. $V_n^{(2)}\left(W\right)_t$ збігається як мінімум для деякої підпослідовності до t м.н. Оскільки траєкторії процесу неперервні (рівномірно) на $[0, t]$, маємо

$$\lim_{\delta_n\to 0}\max_{1\leq k\leq n}\left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right|^{\varepsilon} = 0.$$

Звідки $VAR_p\left(W\right)_t = \infty$ м.н. □

Відмітимо, що якщо послідовні розбиття відрізку $[0, t]$ є вкладеними: $D_n \subset D_{n+1}$ (або якщо $\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_n < \infty$), то $var_2\left(W\right)_t = t$ м.н. Крім того, $VAR_2\left(W\right)_t = \infty$ м.н.[18] (за рахунок можливості побудови розбиття залежного від ω).

Зазначені властивості траєкторій характеризують рух частинки в рідині, для якої в кожен момент часу не існує миттєвої швидкості, а також яка за скінченний час проходить нескінченну відстань. Тобто процес Вінера як модель хаотичного руху частинки є не зовсім відповідним. Один із способів розв'язати проблему – моделювати швидкість безпосередньо за допомогою процесу Орнштейна-Уленбека (процесу Гаусса з коваріаційною функцією $\gamma_{st} = \sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}$, $\alpha > 0$, який є стаціонарний марковськiй і неперервний за ймовірністю):

$$X_t = m\left(1 - e^{-\gamma t}\right) + \sigma e^{-\gamma t} W_{\frac{e^{2\gamma t}-1}{2\gamma}} + X_0 e^{-\gamma t}, t \geq 0.$$

Апроксимація випадковим блуканням

Покажемо, що процес Вінера $\{W_t, t \in [0, T]\}$ можна розглядати як границю деякого випадкового блукання. Для прости позначень припустимо, що $T = 1$.

[18]Див., наприклад, Theorem 1.35 в *Morters P., Peres Y.* Brownian Motion. Cambridge: CUP, 2010.

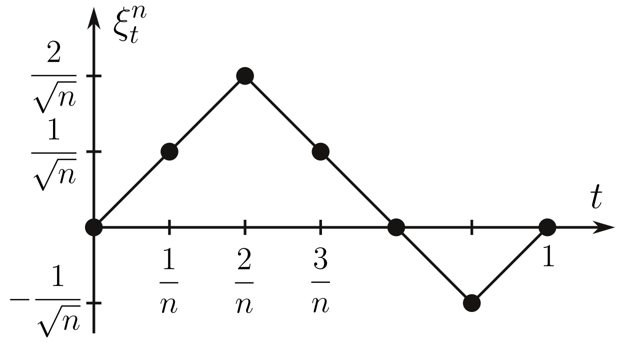


Рис. 3.7. Апроксимувальний процес

Розіб'ємо проміжок $[0,1]$ точками $t_k = \frac{k}{n}, k = \overline{0,n}$, і розглянемо послідовність незалежних в.в. $\{\eta_k^n\}_{k=1}^n$:

$$\eta_k^n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ці в.в. визначають випадкове блукання

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^n, S_0 = 0.$$

Визначимо процес ξ_t^n так: в початковий момент його значення 0, яке лінійно прямує до рівня $\frac{1}{\sqrt{n}} S_1$ в момент $\frac{1}{n}$, потім лінійно змінюється на проміжку $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ до значення $\frac{1}{\sqrt{n}} S_2$, ... (для $T \neq 1$ як розбиття можна узяти $t_k^n = \frac{T}{n} k$, а коефіцієнт шкали рівним $\sqrt{\frac{T}{n}}$). Тобто маємо таке подання (див. рис. 3.7.).

$$\xi_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_{[nt]} + (nt - [nt])\, \eta_{[nt]+1}^n \right), t \in [0,1].$$

Лема 3.1 (про асимптотичну "гауссовість" ξ_t^n). *Вектор* $\left(\xi_{t_1}^n, \ldots, \xi_{t_k}^n\right)$ *для довільних* $0 \le t_1 < \ldots < t_k \le 1$ *є асимптотично нормальним з середнім 0 та коваріаційною матрицею* $\sum = \|t_i \wedge t_j\|_{i,j=1}^k$.

Доведення. Проаналізуємо відповідні х.ф., обмежившись для простоти запису лише випадком $k = 2$:

$$\mathsf{E} e^{\imath \alpha_1 \xi_{t_1}^n + \imath \alpha_2 \xi_{t_2}^n}.$$

Розпишемо

$$\alpha_1 \xi_{t_1}^n + \alpha_2 \xi_{t_2}^n = \alpha_1 \frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}} + \alpha_1 (nt_1 - [nt_1]) \frac{\eta_{[nt_1]+1}^n}{\sqrt{n}} + \\ + \alpha_2 \frac{S_{[nt_2]}}{\sqrt{n}} + \alpha_2 (nt_2 - [nt_2]) \frac{\eta_{[nt_2]+1}^n}{\sqrt{n}}.$$

Добавимо і віднімемо $S_{[nt_1]}$ від $S_{[nt_2]}$, тоді, враховуючи що

$$S_{[nt_1]+1} = S_{[nt_1]} + \eta^n_{[nt_1]+1},$$

маємо

$$\alpha_1 \xi^n_{t_1} + \alpha_2 \xi^n_{t_2} = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}} + (\alpha_1 (nt_1 - [nt_1]) + \alpha_2) \frac{\eta^n_{[nt_1]+1}}{\sqrt{n}} + \\ + \alpha_2 \frac{S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]+1}}{\sqrt{n}} + \alpha_2 (nt_2 - [nt_2]) \frac{\eta^n_{[nt_2]+1}}{\sqrt{n}}.$$

Оскільки

$$S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]+1} = \sum_{k=[nt_1]+2}^{[nt_2]} \eta^n_k,$$

усі доданки отриманої суми є незалежними, і значить $\mathsf{E} e^{\imath\alpha_1 \xi^n_{t_1} + \imath\alpha_2 \xi^n_{t_2}}$ можна записати як добуток відповідних х.ф.

За достатньою умовою збіжності розподілів, оскільки середнє в.в.

$$\frac{\alpha_1 (nt_1 - [nt_1]) + \alpha_2}{\sqrt{n}} \eta^n_{[nt_1]+1}$$

дорівнює нулю, а дисперсія

$$\left(\frac{\alpha_1 (nt_1 - [nt_1]) + \alpha_2}{\sqrt{n}} \right)^2 \to 0, n \to \infty,$$

розподіл цієї в.в. прямує до атомічного розподілу зосередженого в точці 0, а отже, її х.ф. прямує до 1. Аналогічний результат маємо для доданку $\alpha_2 (nt_2 - [nt_2]) \frac{\eta^n_{[nt_2]+1}}{\sqrt{n}}$. Враховуючи, що

$$\mathsf{E} e^{\imath\alpha\eta^n_k} = \cos\alpha = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + o\left(\alpha^3\right) \right)$$

та

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{a}\cdot a} = e^a,$$

для першого доданку виводимо

$$\mathsf{E} e^{\imath \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{n}} S_{[nt_1]}} = \mathsf{E} e^{\imath \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt_1]} \eta^n_k} = \left(\mathsf{E} e^{\imath \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{n}} \eta^n_k} \right)^{[nt_1]} = \\ = \left(\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sqrt{n}} \right) \right)^{[nt_1]} = \left(1 + \frac{-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{2n} + o\left(n^{-3/2}\right) \right)^{[nt_1]} \to e^{\frac{-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{2} t_1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nt_2] - ([nt_1] + 1)}{n} = (t_2 - t_1),$$

аналогічним чином можемо отримати такий результат

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}e^{\imath\frac{\alpha_2\left(S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]+1}\right)}{\sqrt{n}}} = e^{\frac{-\alpha_2^2}{2}(t_2-t_1)}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}e^{\imath\alpha_1\xi^n_{t_1}+\imath\alpha_2\xi^n_{t_2}} \to e^{\frac{-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{2}t_1} \times e^{\frac{-\alpha_2^2}{2}(t_2-t_1)} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 t_1 + 2\alpha_1\alpha_2 t_1 + \alpha_2^2 t_2\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha_1^2\left(t_1\wedge t_1\right) + 2\alpha_1\alpha_2\left(t_1\wedge t_2\right) + \alpha_2^2\left(t_2\wedge t_2\right)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^\top \sum \alpha\right\},$$

де $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ та $\sum = \begin{pmatrix} t_1\wedge t_1 & t_1\wedge t_2 \\ t_2\wedge t_1 & t_2\wedge t_2 \end{pmatrix}$. □

Застосовуючи результат теореми, можна показати що послідовність розподілів P_n для ξ^n_t на просторі $\left\{C_{[0,1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,1]}\right)\right\}$ є відносно компактною (існує слабко збіжна підпослідовність до деякої ймовірнісної міри). Якщо взяти будь-яку збіжну підпослідовність даної послідовності P_{n_k}, то на циліндрах, перейшовши до границі, отримаємо нормальний розподіл $N(0,\Sigma)$. Тобто будь-яка збіжна підпослідовність збігається до однієї і тієї ж міри на $\left\{C_{[0,1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,1]}\right)\right\}$, а значить і сама послідовність P_n збігається до міри Вінера P_W, яка на циліндрах збігається з нормальним розподілом $N(0,\Sigma)$.

Результат $\mathsf{P}_n \to \mathsf{P}_W$ називають теоремою Донскера або принципом інваріантності Донскера (функціональною центральною граничною теоремою). Інваріантність пов'язана з тим, що η^n_k достатньо обирати незалежними з $\mathsf{E}\eta^n_k = 0$ та $\mathsf{D}\eta^n_k = 1$, не вказуючи явно розподілу.

Теорема 3.7 (про міру Вінера)**.** *Існує в.п., заданий на* $[0,1]$*, розподіл якого збігається з мірою Вінера на* $\left\{C_{[0,1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,1]}\right)\right\}$.

Доведення. Візьмемо

$$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \left\{C_{[0,1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,1]}\right), \mathsf{P}_W\right\}.$$

Побудуємо процес $W_t(x.) = x_t$, тоді для довільних $0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1$ та неперервної обмеженої функції $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ за лемою про асимптотичну "гауссовість" ξ^n_t маємо

$$\mathsf{E}f\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}\right) = \int_{C_{[0,1]}} f\left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}\right) \mathsf{P}_W(dx.) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E} f\left(\xi^n_{t_1}, \ldots, \xi^n_{t_k}\right) = \mathsf{E} f\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_k\right),$$

де $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \sim N(0, \Sigma)$. Звідси випливає, що вектор $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$ також має розподіл $N(0, \Sigma)$ і за теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір P_W є розподілом для $\{W_t, t \in [0,1]\}$. $\square$

Відмітимо, що доведені результати дозволяють дати таке означення процесу Вінера.

Визначення. (Третє визначення процесу Вінера). В.п. $\{W_t, t \geq 0\}$ з неперервними м.н. траєкторіями називають процесом Вінера, якщо м.н.

$$W_0 = 0$$

і для довільних $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathsf{P}\{(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \in B\} = \int_B f_{t_1}(y_1|0) f_{t_2 - t_1}(y_2|y_1) \ldots f_{t_n - t_{n-1}}(y_n|y_{n-1}) dy_1 \ldots dy_n,$$

де $f_t(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$.

Розглянемо функцію розподілу даного приросту:

$$\mathsf{P}\{W_t - W_s < x\} = \mathsf{P}\{(W_s, W_t) \in B\},$$

де $B = \{(y_1, y_2) : y_2 - y_1 < x\}$. З третього визначення

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{W_t - W_s < x\} &= \int_B f_s(y_1|0) f_{t-s}(y_2|y_1) dy_1 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x+y_1} f_s(y_1|0) f_{t-s}(y_2|y_1) dy_2 dy_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(y_1|0) \int_{-\infty}^{x+y_1} f_{t-s}(y_2|y_1) dy_2 dy_1. \end{aligned}$$

Зробивши заміну $z_2 = y_2 - y_1$ в другому інтегралі, маємо

$$\mathsf{P}\{W_t - W_s < x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(y_1|0) \int_{-\infty}^{x} f_{t-s}(z_2 + y_1|y_1) dz_2 dy_1.$$

Зазначимо, що для підінегральної функції

$$f_{t-s}(z_2 + y_1|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y_1 + z_2 - y_1)^2}{2(t-s)}} = f_{t-s}(z_2|0),$$

тоді функція розподілу дорівнює

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_s\left(y_1|0\right) \int_{-\infty}^{x} f_{t-s}\left(z_2|0\right) dz_2 dy_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s\left(y_1|0\right) dy_1 \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{x} f_{t-s}\left(z_2|0\right) dz_2 = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}} e^{-\frac{z_2^2}{2(t-s)}} dz_2.$$

А отже, $W_t - W_s \sim N\left(0,\ t-s\right)$.

Вправа 3.1. Довести еквівалентність першого та третього визначення процесу Вінера.

Явна конструкція

Розглянемо побудову процесу Вінера у вигляді ряду Фур'є, запропоновану самим Вінером. Позначимо через $L_2\left[0,1\right]$ та $L_2(\Omega)$ простори квадритично інтегрованих функцій на $[0,1]$ та в.в. зі скалярними добутками

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\left(t\right) g\left(t\right) dt$$

та

$$\left(\xi, \eta\right) = \mathsf{E}\xi\eta$$

відповідно.

Внаслідок неперервності траєкторій процесу Вінера $W_t\left(\omega\right)$ є функцією простору $L_2\left[0,1\right]$ для майже усіх ω. В даному просторі виберемо деякий повний базис $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$, тоді

$$W_t\left(\omega\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\omega) H_n,$$

де $\eta_n\left(\omega\right) = \langle W_\cdot\left(\omega\right), H_n\rangle$. Внаслідок вимог щодо W_t коефіцієнти ряду η_n варто взяти нормально розподіленими і такі, щоб $\mathsf{E}\eta_n = 0$. Якщо ж добавити умову незалежності для цих коефіцієнтів, то з урахуванням $\mathsf{E}W_t W_s = t \wedge s$ отримаємо таку умову

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t \wedge s\right) H_k\left(t\right) H_n\left(s\right) dt ds = 0.$$

Дана умова істотно обмежує вибір базису: з неї випливає, що H_k мають бути тригонометричними функціями. Отже, для побудови процесу Вінера як ряду Фур'є треба побудувати незалежні $N\left(0,1\right)$-розподілені $\{\eta_n\}$, відповідний базис $\{H_n\}$ та довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\omega) \frac{\sin\left(\pi n t\right)}{n}$$

збігається до неперервної функції[19]. Недоліком такого підходу є технічна складність встановити потрібну збіжність цього ряду.

Розглянемо дещо модифікований підхід. Додатково припустимо, що існує W_t' – "похідна" процесу Вінера, і її можна подати як ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) H_n,$$

де $\xi_n = \langle W_\cdot', H_n \rangle$. Похідна – лінійне перетворення, тому знов отримаємо умову нормальності коефіцієнтів ряду. Крім того, з $\mathsf{E} W_s' W_t' = \delta(t-s)$, де δ – дельта функція Дірака, та умови незалежності коефіцієнтів маємо

$$\int_0^1 \int_0^1 \delta\left(t-s\right) H_k\left(t\right) H_n\left(s\right) dt ds = 0.$$

Ця умова вже не є обмежувальною на елементи базису H_k. Тобто обравши "зручний" базис і послідовність незалежних $N(0,1)$-розподілених в.в., зображення процесу Вінера шукатимемо у вигляді

$$W_t\left(\omega\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \int_0^t H_n\left(s\right) ds.$$

Оскільки функції

$$S_k\left(t\right) = \int_0^t H_k\left(s\right) ds$$

неперервні, рівномірна збіжність м.н. отриманого ряду є достатньою для того, щоб стверджувати м.н. неперервність W_t. Відповідний вибір базису може істотно спростити доведення останнього кроку.

Теорема 3.8 (Леві-Цесельські). *Існує ймовірнісний простір* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ *та послідовність незалежних в.в.* $\xi_k \sim N\left(0,1\right)$, *що*

$$W_t\left(\omega\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k\left(t\right)$$

визначає процес Вінера на $[0,1]$.

Доведення. Виберемо ймовірнісний простір так, щоб на ньому можна було б задати послідовність незалежних $N(0,1)$-розподілених в.в. Покажемо, що для $\{W_t, t \in [0,1]\}$ виконані умови другого визначення процесу Вінера. Позначимо

$$W_N\left(t\right) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k(\omega) S_k\left(t\right),$$

[19] Див., наприклад, §3.3 в *Schilling R.L., Partzsch L.* Brownian Motion. Berlin: de Gruyter, 2012.

тоді застосовуючи незалежність ξ_k та рівність Парсеваля:

$$\langle f, g\rangle = \sum \langle f, H_k\rangle \langle g, H_k\rangle ,$$

отримаємо

$$\|W_N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = (W_N(t), W_N(t)) = \sum_{k,m=1}^{N} (\xi_k, \xi_m) S_k(t) S_m(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} S_k^2(t) = \sum_{k=1}^{N} \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, H_k\right\rangle^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, H_k\right\rangle^2 = \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,t]}\right\rangle = t.$$

Значить, існує l.i.m.$W_N(t)$, яка визначає W_t.

Враховуючи, що

$$|\mathsf{E}W_t| = |\mathsf{E}(W_t - W_N(t))| \le \sqrt{\mathsf{E}\left(W_t - W_N(t)\right)^2} = \|W_t - W_N(t)\|_{L_2(\Omega)} \to 0,$$

одержуємо $\mathsf{E}W_t = 0$. Більш того, для коваріаційної функції маємо, що

$$\gamma_{st} = (W_s, W_t) = \lim_{N\to\infty} (W_N(s), W_N(t)) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, H_k\right\rangle \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, H_k\right\rangle = \left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]}\right\rangle = t \wedge s.$$

Зафіксуємо довільні $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ та $0 \le t_1 < \cdots < t_n \le 1$, і покажемо що в.в.

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i W_{t_i}$$

має нормальний розподіл. Позначимо $\beta_k = \sum_{i=1}^{n} a_i S_k(t_i)$ і перепишемо суму так

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) \sum_{i=1}^{n} a_i S_k(t_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k,$$

де ряд збіжний в $L_2(\Omega)$ як сума скінченної кількості збіжних рядів. В.в.

$$\eta_N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k(\omega) \beta_k$$

мають розподіл $N\left(0, \sum_{k=1}^{N} \beta_k^2\right)$ та збігаються в с.кв. до η, а значить, і за розподілом та

$$\|\eta_N\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \beta_k^2 \to \|\eta\|^2,$$

тоді

$$\mathsf{E}e^{i\alpha\eta_N} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2\sum_{k=1}^{N}\beta_k^2\right\} \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2\left\|\eta\right\|^2\right\} = \mathsf{E}e^{i\alpha\eta}, N \to \infty.$$

Отже, маємо, що η має нормальний розподіл і усі умови другого визначення процесу Вінера для W_t виконані. $\square$

Вправа 3.2. Оскільки $W_N(t) \overset{L_2(\Omega)}{\to} W_t$, маємо

$$W_N(t) \overset{P}{\to} \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k S_k(t).$$

Показати, що збіжність ряду має місце і м.н. (як ряду незалежних в.в.).

Відмітимо, що доведеного недостатньо щоб стверджувати, що траєкторії W_t м.н. неперервні. За теоремою Іто-Нісіо[20], яка дозволяє це стверджувати, проте обравши спеціальний базис $\{H_k\}$ можемо довести цей факт напряму.Розглянемо базис, побудований на основі так званих функцій Хаара:

$$H_1(t) = 1, H_2(t) = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right)} - \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right)},$$

для $n \in \mathbb{N}$, $2^n < k \le 2^{n+1}$, $j_k = k - 2^n - 1$:

$$H_k(t) = \sqrt{2^n}\left(\mathbb{1}_{\left[\frac{j_k}{2^n},\frac{j_k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)} - \mathbb{1}_{\left[\frac{j_k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},\frac{j_{k+1}}{2^n}\right)}\right).$$

Зокрема,

$$H_3(t) = \sqrt{2}\left(\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right)} - \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}\right), H_4(t) = \sqrt{2}\left(\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)} - \mathbb{1}_{\left[\frac{3}{4},1\right)}\right).$$

Вправа 3.3. Показати, що функції Хаара утворюють ортонормовану систему.

Покажемо, що цей базис повний. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на 2^{n+1} інтервалів однакової довжини та через M_{n+1} позначимо простір функцій кусково-сталих на відповідних проміжках розбиття. Цей простір є лінійним підпростором розмірності 2^{n+1}. Крім того, за побудовою функції Хаара $\left\{H_k, 1 \le k \le 2^{n+1}\right\}$ належать простору M_{n+1}. У межах таких k множина функцій H_k є ортонормованим базисом у M_{n+1}. Будь-яку неперервну функцію на проміжку $[0,1]$ можна апроксимувати кусково-сталими функціями з M_{n+1}, а отже, і функціями Хаара. Тобто базис, побудований на основі функцій Хаара, є повний.

Виділимо для функцій

$$S_k(t) = \left\langle I_{[0,t]}, H_k\right\rangle,$$

які називають функціями Шаудера, такі властивості (див. рис. 3.8.).

[20] *Ito K., Nisio M.* On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. Osaka Jour. Math. 1968. Vol. 5. P. 35-48.

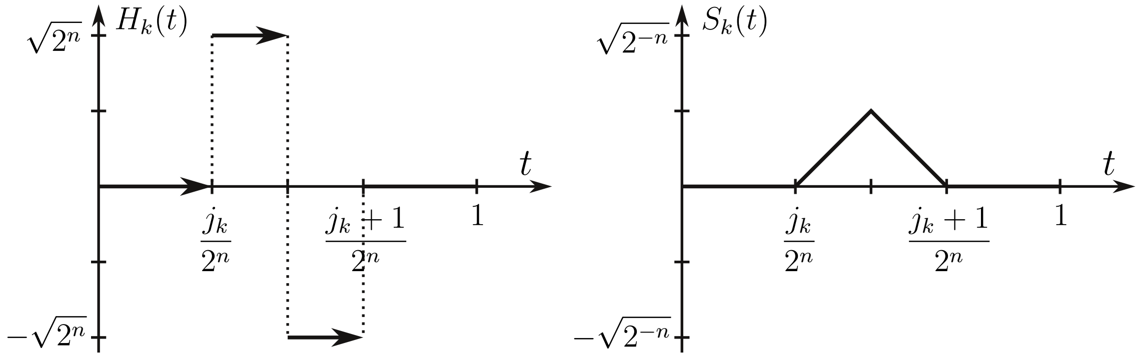


Рис. 3.8. Функції Хаара та Шаудера

- Для $2^n < k \le 2^{n+1}$ їх максимум становить

$$\max_{t\in[0,1]} S_k(t) = 2^{-\frac{n}{2}-1}.$$

- Для довільного $t \in [0,1]$:

$$\exists! k : 2^n < k \le 2^{n+1} : S_k\left(t\right) \ne 0.$$

Покажемо, що м.н. $W_N\left(t\right) \to W_t$ рівномірно по t на $[0,1]$, тобто що

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|W_t - W_N\left(t\right)\right| \to 0 \text{ м.н.}$$

Позначимо

$$R_N = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k>N}^{\infty} \xi_k S_k\left(t\right)\right|$$

і визначимо m як найменше ціле для якого $2^m \le N < 2^{m+1}$, $m = [\log_2 N]$, тоді маємо

$$R_N \le \sup \sum_{k>N}^{\infty} |\xi_k| S_k\left(t\right) \le \sup \sum_{k\ge 2^m} |\xi_k| S_k\left(t\right) \le$$
$$\le \sup \sum_{2^m\le k<2^{m+1}} |\xi_k| S_k\left(t\right) + \sup \sum_{2^{m+1}\le k<2^{m+2}} |\xi_k| S_k\left(t\right) + \ldots .$$

Враховуючи позначення

$$b_n = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{2^n\le k<2^{n+1}} |\xi_k| S_k\left(t\right),$$

отриману нерівність можемо записати як $R_N \le \sum_{n\ge m} b_n$.

Знайдемо оцінку зверху для $|\xi_k|$, яка матиме місце м.н. Оскільки в.в. $\xi_k \sim N(0,1)$, $\mathsf{P}\left\{\xi_k \ge x\right\} = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Розглянемо

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{y}\right) de^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Звідки за рахунок симетричності розподілу

$$\mathsf{P}\left\{|\xi_k| \geq x\right\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для деякого $c > \sqrt{2}$ візьмемо як $x = c\sqrt{\ln k}$ і розглянемо суму

$$\sum_{k \geq 2} \mathsf{P}\left\{|\xi_k| \geq c\sqrt{\ln k}\right\} \leq \sum_{k \geq 2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c\sqrt{\ln k}} e^{-\frac{c^2 \ln k}{2}} \leq \sum_{k \geq 2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c\sqrt{\ln k}} k^{-\frac{c^2}{2}} < \infty.$$

За лемою Бореля-Кантеллі починаючи з деякого $m \in \mathbb{N}$, $\forall k > 2^m$:

$$|\xi_k| \leq c\sqrt{\ln k} \text{ м.н.},$$

і значить, м.н.

$$b_n \leq c\sqrt{\ln 2^{n+1}} \sup_{t \in [0,1]} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t).$$

Застосовуючи властивості функцій Шаудера зазначені вище, виводимо

$$b_n \leq c\sqrt{\ln 2^{n+1}} \times 2^{-\frac{n}{2}-1} = c\sqrt{(n+1)\ln 2} \times 2^{-\frac{n}{2}-1} = \frac{c\sqrt{\ln 2}}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

Звідси отримаємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, а отже,

$$R_N \leq \sum_{n > [\log_2 N]} b_n \to 0, N \to \infty.$$

Залишилось показати, що процес з доведеними властивостями існує на $\mathbb{R}_+$. Позначимо $\{\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n\} = \left\{C_{[0;1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0;1]}\right), \mathsf{P}_W\right\}$ і використаємо теорему Ломницького-Улама, за якою існує ймовірнісний простір, на якому задані незалежні процеси Вінера $\{W_n(t), t \in [0,1]\}_{n \in \mathbb{N}}$. Визначимо процес Вінера на $\mathbb{R}_+$ за допомогою неперервного "з'єднання" процесів W_n (див. рис. 3.9.).

Теорема 3.9 (про конструкцію W_t на $\mathbb{R}_+$). *Процес $\{W_t, t \geq 0\}$ визначений як*

$$W_t(\omega) = \begin{cases} W_1(t,\omega), & t \in [0,1), \\ \sum_{j=1}^k W_j(1,\omega) + W_{k+1}(t-k,\omega), & t \in [k,k+1), k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

є процесом Вінера.

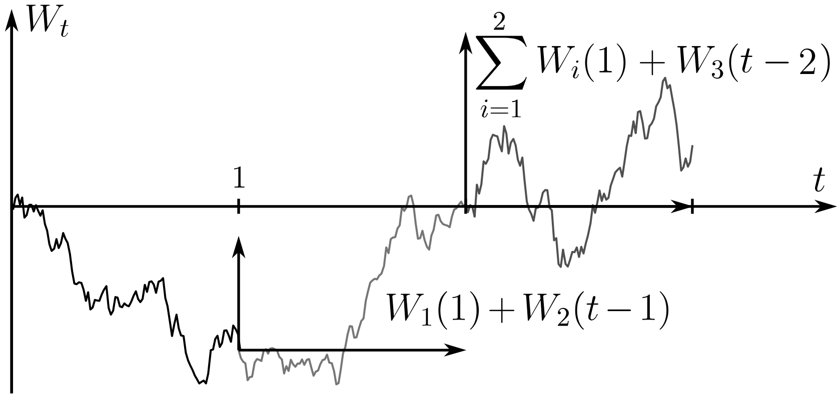


Рис. 3.9. З'єднання процесів W_n

Доведення. Покажемо, що для W_t виконані умови першого визначення:

$$W_0 = W_1\left(0,\omega\right) = 0 \text{ м.н.}$$

Проаналізуємо розподіл приросту $W_t - W_s$, $s < t$. Якщо $s, t \in [k, k+1)$, то

$$W_t - W_s = W_{k+1}\left(t-k,\omega\right) - W_{k+1}(s-k,\omega),$$

що має розподіл $N(0, t-s)$. Для $k \le s < k+1 \le t < k+2$ маємо

$$W_t - W_s = \left(W_t - W_{k+1}\right) + \left(W_{k+1} - W_s\right),$$

де доданки незалежні, і за попереднім випадком отримаємо

$$W_t - W_{k+1} \sim N(0, t-(k+1))$$

та

$$W_{k+1} - W_s \sim N\left(0, (k+1)-s\right),$$

отже, $W_t - W_s \sim N\left(0, t-s\right)$. Залишилось розглянути випадок коли s та t знаходяться на різних проміжках не поруч:

$$k \le s < k+1 < m \le t < m+1,$$

тоді

$$W_t - W_s = \left(W_t - W_m\right) + \sum_{k<l<m}\left(W_{l+1} - W_l\right) + \left(W_{k+1} - W_s\right).$$

Знов маємо суму незалежних доданків з розподілами $N\left(0, t-m\right)$, $N\left(0, m-(k+1)\right)$, $N\left(0, (k+1)-s\right)$, відповідно. А значить, приріст і в цьому випадку має розподіл $N\left(0, t-s\right)$.

Одержаний результат дозволяє стверджувати, що прирости стаціонарні і останнє, що потрібно довести – їх незалежність. Візьмемо $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n$, тоді кожен приріст на $[t_i, t_{i+1})$ можемо подати як суму приростів аналогічним способом наведеним вище. Оскільки прирости в середині проміжків $[l, l+1)$ незалежні і незалежні від приростів на інших проміжках. Відмітимо також, що в точках з'єднання функція W_t буде неперервною: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$W_t \underset{t \to k}{\to} \sum_{j=1}^{k} W_j\,(1, \omega) = W_k.$$

Отже, W_t – процес Вінера з м.н. неперервними траєкторіями. □

3.2. Процес Вінера відносно фільтрації

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – деякий імовірнісний простір. Побудуємо послідовність σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ таких, що

$$\forall 0 \leq s \leq t : \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

тобто задамо фільтрацію або потік σ-алгебр. Узгодженість в.п. $\{X_t, t \in T\}$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ заданого на цьому просторі означає, що

$$\forall t \in T, B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right) : \{\omega : X_t\,(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t,$$

тобто що X_t є $\mathcal{F}_t$-вимірною в.в. Оскільки $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, то означення можна переформулювати так: якщо для довільної борелевої функції f за умови $s \leq t$ в.в. $f(X_s)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірною, то X_t є узгодженим з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}$. Фільтрацію

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s^{-1}\,(B)\,, s \leq t, B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right)\right\}$$

називають *натуральною*.

Вправа 3.4. Показати, що $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}_{t \in T}$ утворює фільтрацію на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$.

Для того, щоб перевірити узгодженість деякого процесу відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}$, достатньо показати, що $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$. Якщо фільтрація явно не задана, то будемо вважати, що $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$. Позначимо через

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \text{ та } \mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\mathcal{F}_s, s < t\}$$

праве та ліве замикання для фільтрації відповідно, при цьому $\mathcal{F}_{0+}$ називають *зародковою* σ-алгеброю, а

$$\mathcal{F}_{\infty+} = \bigcap_{s \geq 0} \sigma\{\mathcal{F}_t, t \geq s\}$$

хвостовою. Фільтрацію називають неперервною справа (зліва), якщо

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}\,(\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-})\,.$$

Фільтрацію $\{\mathcal{F}_t\}$ неформально можна розглядати, як потік інформації до моменту часу t включно доступний деякому спостерігачу за експериментом, моделлю якого є $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$. Або, іншими словами, $\mathcal{F}_t$ – це множина в.в., значення яких спостерігач може чітко визначити до моменту часу t для будь-якого елементарного експерименту ω. При цьому $\mathcal{F}_{t+}$ визначає інформацію про нескінченно мало віддалене майбутнє для моменту t, зародкова σ-алгебра тоді характеризує усю інформацію на нескінченно малому проміжку часу справа від початку координат, а хвостова – про нескінченно віддалене майбутнє.

Визначення. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір з фільтрацією. Неперервний м.н. процес $\{W_t, t \geq 0\}$ називають процесом Вінера відносно фільтрації, якщо $W_0 = 0$ м.н. та $\forall s, t \geq 0$ і борелевої функції g:

$$\mathsf{E}\left(g\left(W_{t+s} - W_s\right)|\mathcal{F}_s\right) = \int_{\mathbb{R}^1} g\left(y\right) f_t\left(y|0\right) dy.$$

Покажемо, що це визначення включає в себе перше визначення процесу Вінера. Розглянемо твірну функцію

$$\mathsf{E}e^{r(W_{t+s}-W_s)} = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(e^{r(W_{t+s}-W_s)}|\mathcal{F}_s\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{ry}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = e^{\frac{r^2}{2}t},$$

отже, $W_{t+s} - W_s \sim N(0, t)$. Перевіримо незалежність приростів, для цього візьмемо довільні $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ і розглянемо спільну генератрису приростів:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}e^{\sum_{i=1}^n r_i(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})} &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n r_i\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)}|\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right)\right) = \\ &= \mathsf{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n-1} r_i\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)}\mathsf{E}\left(e^{r_k\left(W_{t_n}-W_{t_{n-1}}\right)}|\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right)\right) = \\ &= \mathsf{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n-1} r_i\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)}\right)e^{\frac{r_n^2}{2}(t_n-t_{n-1})} = e^{\frac{r_1^2}{2}(t_1-t_0)}\ldots e^{\frac{r_n^2}{2}(t_n-t_{n-1})}.\end{aligned}$$

Тобто, спільна генератриса дорівнює добутку генератрис приростів, звідки виводимо їх незалежність. Отже, процес Вінера відносно фільтрації є процесом Вінера за першим визначенням. Якщо взяти як фільтрацію $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}$, тоді з першого визначення випливає визначення відносно фільтрації, якщо показати що $\{W_t^s = W_{t+s} - W_s, t \geq 0\}$ не залежить від $\mathcal{F}_s$.

Теорема 3.10 (про марковську властивість процесу Вінера)**.** *Нехай $s \geq 0$, $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера, тоді процес*

$$\{W_t^s = W_{t+s} - W_s,\ t \geq 0\}$$

є процесом Вінера, який не залежить від σ-алгебри $\mathcal{F}_s^W$.

Доведення. За теоремою про незалежні π-системи для того, щоб показати що W_t^s не залежить від $\mathcal{F}_s^W$, достатньо показати, що для довільних

$$0 = s_0 \le s_1 < \dots < s_n \le s, 0 = t_0 \le t_1 < \ldots < t_m$$

і $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ події

$$A_1 = \{(W_{s_1}, \ldots, W_{s_n}) \in B_1\}$$

та

$$A_2 = \left\{\left(W_{t_1}^s, \ldots, W_{t_m}^s\right) \in B_2\right\}$$

незалежні. Оскільки прирости процесу Вінера незалежні на несумісних проміжках, то маємо незалежність векторів

$$\xi = \left(W_{s_1} - W_{s_0}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}}\right)$$

та

$$\eta = \left(W_{t_1+s} - W_{t_0+s}, \ldots, W_{t_m+s} - W_{t_{m-1}+s}\right).$$

Введемо допоміжні функції

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \dots + x_n),$$

тоді

$$A_1 = \{f_n(\xi) \in B_1\} = \left\{\xi \in f_n^{-1}(B_1)\right\}$$

та

$$A_2 = \{f_m(\eta) \in B_2\} = \left\{\eta \in f_m^{-1}(B_2)\right\}.$$

Функції f_n борелеві, а значить, $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)$. □

Одержаний результат можна уточнити так.

Теорема 3.11 (про марковську властивість відносно $\mathcal{F}_{s+}^W$)**.** *Для довільного $s \ge 0$ процес*

$$\{W_t^s = W_{t+s} - W_s, t \ge 0\}$$

є процесом Вінера незалежним від $\mathcal{F}_{s+}^W$.

Доведення. В.п. W_t^s є неперервним по t, а тому його можна подати як

$$W_t^s = \lim_{n\to\infty} W_t^{s_n}$$

для деякої послідовності $s_n \downarrow s$. Процес $\{W_t^{s_n}, t \ge 0\}$ за теоремою про марковську властивість процесу Вінера не залежить від $\mathcal{F}_{s_n}^W$: $\forall t_1, \ldots, t_k \ge 0$, $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$, $B \in \mathcal{F}_{s_n}^W$:

$$\mathsf{P}\left(\left\{\left(W_{t_1}^{s_n}, \ldots, W_{t_k}^{s_n}\right) \in A\right\} \cap B\right) = \mathsf{P}\left(\left\{\left(W_{t_1}^{s_n}, \ldots, W_{t_k}^{s_n}\right) \in A\right\}\right)\mathsf{P}(B).$$

Оскільки
$$s_n \downarrow s, \mathcal{F}^W_{s_n} \supset \mathcal{F}^W_s$$
і
$$\forall B \in \mathcal{F}^W_{s+} = \bigcap_{s_n \downarrow s} \mathcal{F}^W_{s_n} \Rightarrow B \in \mathcal{F}^W_{s_n}, \forall n \in \mathbb{N},$$
наведена вище рівність має місце $\forall B \in \mathcal{F}^W_{s+}$. Перейшовши до границі $n \to \infty$, маємо
$$\mathsf{P}\left(\left\{\left(W^s_{t_1}, \ldots, W^s_{t_k}\right) \in A\right\} \cap B\right) = \mathsf{P}\left(\left\{\left(W^s_{t_1}, \ldots, W^s_{t_k}\right) \in A\right\}\right) \mathsf{P}(B).$$
□

Теорема 3.12 (про закон 0 і 1 Блюменталя). *Для процесу Вінера хвостова $\mathcal{F}^W_{\infty+}$ і зародкова $\mathcal{F}^W_{0+}$ σ-алгебри тривіальні.*

Доведення. З теореми про марковську властивість відносно $\mathcal{F}^W_{s+}$ для $s = 0$:
$$\{W^0_t = W_t - W_0 = W_t, t \geq 0\}$$
не залежить від $\mathcal{F}^W_{0+}$. Позначимо
$$\mathcal{F}^W_\infty = \sigma\{W_t,\ t \geq 0\}.$$
З однієї сторони ця σ-алгебра не залежить від $\mathcal{F}^W_{0+}$, а з іншої $\mathcal{F}^W_{0+} \subset \mathcal{F}^W_\infty$, тоді
$$\forall A \in \mathcal{F}^W_{0+} : \mathsf{P}\left(A \cap A\right) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(A).$$
Звідси випливає, що $\mathsf{P}(A) = 0$ або 1. Інваріантність відносно зміни напрямку часу дає можливість отримати цей результат і для $\mathcal{F}^W_{\infty+}$: σ-алгебра $\mathcal{F}^W_{\infty+}$ повністю визначена $\mathcal{F}^W_{0+}$, тому і для $\forall A \in \mathcal{F}^W_{\infty+}$: $\mathsf{P}(A) = 0$ або 1. □

Теорема 3.13 (про поведінку W в нулі). *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}$,*
$$\tau^{\pm}_0 = \inf\{t \geq 0 : \pm W_t > 0\}$$
– момент входу в верхню (нижню) півплощину та
$$\tau_0 = \inf\left\{t > 0 : W_t = 0\right\}$$
– момент повернення в нуль, тоді
$$\mathsf{P}\left\{\tau^+_0 = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau^-_0 = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_0 = 0\right\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо подію

$$\left\{\tau_0^+ \le 0\right\} = \{\inf\{s \ge 0 : W_s > 0\} \le 0\}.$$

Її можна подати як

$$\left\{\tau_0^+ \le 0\right\} = \bigcap_n \bigcup_{r \in (0;\frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \{W_r > 0\},$$

де $\{W_r > 0\} \in \mathcal{F}^W_{\frac{1}{n}}$, $r \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$. А перетин таких подій буде належати

$$\bigcap_n \mathcal{F}^W_{\frac{1}{n}} = \mathcal{F}^W_{0+}.$$

Отже, подія $\{\tau_0^+ \le 0\}$ належить зародковій σ-алгебрі і за теоремою про закон 0 і 1 Блюменталя її ймовірність дорівнює 0 або 1. Тобто треба показати, що $\mathsf{P}\{\tau_0^+ \le 0\} > 0$. Оскільки

$$\mathsf{P}\{\tau_0^+ \le t\} \ge \mathsf{P}\{W_t > 0\} = \frac{1}{2},$$

переходячи до границі $t \to 0$, отримаємо

$$\mathsf{P}\{\tau_0^+ \le 0\} \ge \frac{1}{2}.$$

Звідки

$$\mathsf{P}\left\{\tau_0^+ = 0\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_0^+ \le 0\right\} = 1.$$

Позначимо $W_t^* = -W_t$, тоді за теоремою про перетворення процесу Вінера

$$\tau_0^- = \inf\{t \ge 0 : W_t < 0\} = \inf\{t \ge 0 : W_t^* > 0\} \sim \tau_0^+.$$

Вихід у верхню та нижню півплощини відбуваються в нулі, тоді з неперервності траєкторії випливає, що $\mathsf{P}\{\tau_0 = 0\} = 1$. □

Теорема 3.14 (про мартингальну властивість процесу Вінера)**.** *Нехай* $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P}\}$ *– імовірнісний простір з фільтрацією, тоді наведені нижче твердження еквівалентні:*

1) $\{W_t, t \ge 0\}$ *є процесом Вінера відносно* $\{\mathcal{F}_t\}$*;*

2) $\tilde{W}_t = e^{rW_t - \frac{1}{2}r^2 t}$ *є мартингал відносно* $\{\mathcal{F}_t\}$*;*

3) $\{W_t, t \ge 0\}$ *та* $\left\{W_t^2 - t, t \ge 0\right\}$ *– неперервні мартингали відносно* $\{\mathcal{F}_t\}$*.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Відштовхуючись від третього визначення, виводимо що

$$\mathsf{E}\left(\frac{\tilde{W}_t}{\tilde{W}_s}|\mathcal{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(e^{r(W_t-W_s)-\frac{1}{2}r^2(t-s)}|\mathcal{F}_s\right) =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}r^2(t-s)}\mathsf{E}\left(e^{r(W_t-W_s)}|\mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{1}{2}r^2(t-s)}\int_{\mathbb{R}} e^{ry}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}}dy = 1.$$

2) $\Rightarrow$ 1)[21] Використаємо те, що $\tilde{W}_t$ є мартингалом: $\mathsf{E}\left(\frac{\tilde{W}_t}{\tilde{W}_s}|\mathcal{F}_s\right) = 1$, тоді

$$\mathsf{E}\left(e^{r(W_t-W_s)}|\mathcal{F}_s\right) = e^{\frac{1}{2}r^2(t-s)}.$$

Обертаючи по r, маємо $W_t - W_s|\mathcal{F}_s \sim N(0, t-s)$. А тоді для будь-якої обмеженої борелевої функції g:

$$\mathsf{E}\left(g\left(W_t - W_s\right)|\mathcal{F}_s\right) = \int g(y) f_{t-s}(y|0)dy.$$

□

Оскільки $\{W_t, t \geq 0\}$ – неперервний мартингал та $W_t \in L_p(\Omega), p \geq 1$, мають місце нерівності Дуба:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leq t}|W_s| \geq a\right\} \leq \frac{1}{a^p}\mathsf{E}|W_t|^p, a > 0,$$

та

$$\mathsf{E}\sup_{s\leq t}|W_s|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}|W_t|^p, p > 1.$$

Визначення. В.в. $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+^c$ називають *марковським моментом* (відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}$), якщо

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^c : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Марковський момент називається *моментом зупинки* (м.з.), якщо він скінченний м.н.

Вправа 3.5. Показати, що

1. В.в. $\tau = t$, $t \in \mathbb{R}_+$, є моментом зупинки відносно будь-якої фільтрації.
2. Якщо $\{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ – марковські моменти відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, тоді $\{\tau_j < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall j \in \mathbb{N}$.

[21] Доведення еквівалентності 1) та 3) див., наприклад, в *Cinlar E.* Probability and stochastics. N.Y.: Springer, 2011.

Приклад (властивості марковських моментів). Нехай $\{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ – марковські моменти відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, покажемо що $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$, $\sup_{j\in\mathbb{N}} \tau_j$ – марковські моменти відносно $\{\mathcal{F}_t\}$ та $\inf_{j\in\mathbb{N}} \tau_j$ – марковський момент відносно $\{\mathcal{F}_{t+}\}$.

Для суми використаємо, що $\{\tau_1 + \tau_2 \le t\} = \overline{\{\tau_1 + \tau_2 > t\}}$ та

$$\begin{aligned}\{\tau_1 + \tau_2 > t\} &= \{\tau_1 = 0, \tau_2 > t\} \cup \\ &\cup \{\tau_2 = 0, \tau_1 > t\} \cup \{\tau_2 > 0, \tau_1 \ge t\} \cup_{r\in(0,t)\cap\mathbb{Q}} \{r < \tau_1 \le t, \tau_2 > t - r\} = \\ &= \{\tau_1 \le 0\} \cap \overline{\{\tau_2 \le t\}} \cup \{\tau_2 \le 0\} \cap \{\tau_1 \le t\} \cup \overline{\{\tau_2 \le 0\}} \cap \overline{\{\tau_1 < t\}} \cup \\ &\cup_{r\in(0,t)\cap\mathbb{Q}} \{\tau_1 \le r\} \cap \{\tau_1 < t\} \cap \overline{\{\tau_2 \le t - r\}} \in \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Для максимуму маємо

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \cap \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

для мінімуму

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \le t\} = \{\tau_1 \le t\} \cup \{\tau_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

для супремуму

$$\left\{\sup_j \tau_j \le t\right\} = \cap_j \{\tau_j \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

а для інфінуму

$$\left\{\inf_j \tau_j < t\right\} = \cup_j \{\tau_j < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

звідки

$$\left\{\inf_j \tau_j \le t\right\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\inf_j \tau_j < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_{t+}.$$

Вправа 3.6. Показати, що

1. Будь-який марковський момент відносно $\{\mathcal{F}_t\}$ є також марковським моментом відносно $\{\mathcal{F}_{t+}\}$.

2. Якщо в.в. τ зі значеннями в $\mathbb{R}_+^c$ задовольняє умові $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0$, і $\mathcal{F}_t$ – неперервна справа фільтрація, тоді τ є марковським моментом відносно $\{\mathcal{F}_t\}$.

Нехай τ – марковський момент відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Визначимо

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \frac{m+1}{2^n}, & \frac{m}{2^n} \le \tau(\omega) < \frac{m+1}{2^n}, \\ \infty, & \tau(\omega) = \infty, \end{cases}$$

тобто, зупиняємось у двійково раціональні моменти часу одразу після τ. Так визначені в.в. є марковськими моментами відносно $\{\mathcal{F}_{t+}\}$:

$$\{\tau_n \le t\} = \left\{\frac{[2^n\tau]+1}{2^n} \le t\right\} = \{[2^n\tau] \le 2^n t - 1\} =$$

$$= \cup_{k=0}^{[2^n t]-1} \left\{\tau \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\} = \left\{\tau < \frac{[2^n t]}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_{\frac{[2^n t]}{2^n}+} \subset \mathcal{F}_{t+},$$

які називають *дискретною апроксимацією* для τ: $\tau_n \downarrow \tau$.

Приклад (марковість моменту входження до множини)**.** Позначимо через

$$\tau_A = \inf\{s \ge 0 : W_s \in A\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

момент досягнення (first entry time) процесом Вінера множини A. Нехай F та G – відповідно деяка замкнена та відкрита підмножини $\mathbb{R}$, тоді τ_F є марковським моментом відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, а τ_G – відносно $\{\mathcal{F}_{t+}\}$[22].

Відмітимо, що внаслідок узгодженості достатньо довести марковість відносно натуральної фільтрації. Подія $\{\inf\{s \ge 0 : W_s \in F\} \le t\}$ еквівалентна тому, що

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists s \in (0,t) \cap \mathbb{Q}, \exists x \in F \cap \mathbb{Q} : W_s \in \left(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right).$$

Тобто,

$$\{\tau_F \le t\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{s\in(0,t)\cap\mathbb{Q}} \cup_{x\in F\cap\mathbb{Q}} \left\{W_s \in \left(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right)\right\} \in \mathcal{F}_t^W.$$

Для моменту досягнення відкритої множини маємо, що

$$\{\tau_G \le t\} = \cap_{s>t, s\in\mathbb{Q}} \{\tau_G < s\} = \cap_{s>t, s\in\mathbb{Q}} \cup_{r\in(0,s)\cap\mathbb{Q}} \{W_r \in G\} \in \mathcal{F}_{t+}^W.$$

Зазначимо, що τ_G може і не бути марковським моментом відносно $\{\mathcal{F}_t\}$: в момент t процес може досягти межу множини G, при цьому може зайти в множину, а може і не зайти.

Нехай τ – марковський момент відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, визначимо σ-алгебри, породжені моментом τ як

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0\}$$

та

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0\}.$$

Вправа 3.7. Показати, що $\mathcal{F}_\tau$ та $\mathcal{F}_{\tau+}$ – σ-алгебри, та для $\tau \equiv t$: $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

[22] За умов регулярності фільтрації марковість τ_A, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, випливає із властивостей загальних марковських процесів. Див., наприклад, Глава 4 в *Дынкин Е.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.

Лема 3.2 (про σ-алгебри, породжені марковським моментом). *Нехай $\{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ – марковські моменти відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Тоді*

1) τ_j є $\mathcal{F}_{\tau_j}$-вимірною в.в.;

2) Якщо $\tau_j \le \tau_{j+1}$ м.н., то $\mathcal{F}_{\tau_j} \subset \mathcal{F}_{\tau_{j+1}}$;

3) Якщо $\tau_j \downarrow \tau$, то $\mathcal{F}_{\tau+} = \cap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\tau_j+}$.

Доведення. 1) Покажемо, що $\forall s \ge 0$ $\{\tau_j \le s\} \in \mathcal{F}_{\tau_j}$:

$$\{\tau_j \le s\} \cap \{\tau_j \le t\} = \{\tau_j \le s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s\wedge t} \subset \mathcal{F}_t, \forall t \ge 0.$$

2) Нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_j}$, тоді $\forall t \ge 0$:

$$A \cap \{\tau_{j+1} \le t\} = A \cap \{\tau_{j+1} \le t\} \cap \{\tau_j \le \tau_{j+1}\} = \\ = A \cap \{\tau_j \le t\} \cap \{\tau_{j+1} \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Тобто, $A \in \mathcal{F}_{\tau_{j+1}}$ і значить $\mathcal{F}_{\tau_j} \subset \mathcal{F}_{\tau_{j+1}}$.

3) З однієї сторони за результатом 2) з $\tau_j \ge \tau$, $\forall j \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$\cap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\tau_j+} \supset \mathcal{F}_{\tau+}.$$

З іншої, якщо $A \in \mathcal{F}_{\tau_j+}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, то

$$A \cap \{\tau < t\} = A \cap \cup_{j\in\mathbb{N}} \{\tau_j < t\} = \cup_{j\in\mathbb{N}} A \cap \{\tau_j < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Звідки $\cap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\tau_j+} \subset \mathcal{F}_{\tau+}$. □

Вправа 3.8. Нехай τ_1, τ_2 – марковські моменти відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Показати, що

$$\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$$

та

$$\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}.$$

Завдання 16. *Нехай $\{\xi_t, t \ge 0\}$ – прогресивно вимірний в.п., τ – момент зупинки відносно потоку $\{\mathcal{F}_t\}$. Показати, що тоді $\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$.*

Мартингальна властивість процесу Вінера відкриває доступ до широко спектру результатів для неперервних мартингалів[23].

Теорема 3.15 (Дуба про оптимальну зупинку). *Нехай $\{X_t, t \ge 0\}$ – інтегровний неперервний мартингал відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, тоді для будь-яких обмежених м.з. $\tau_1 \le \tau_2$ відносно $\{\mathcal{F}_t\}$ ($\exists K : \tau_1, \tau_2 \le K$ м.н.) маємо*

$$\mathsf{E}[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1}$$

та

$$\mathsf{E}X_{\tau_1} = \mathsf{E}X_{\tau_2} = \mathsf{E}X_0.$$

[23]Огляд основних результатів див., наприклад, в *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1975. Том III, Глава I, §1.

Відмітимо, що в умові теореми обмеженість м.з. можна замінити на $\mathsf{E}\left|X_{\tau_i}\right| < \infty$ та $\mathsf{E}\left[X_k I_{\{\tau_i > k\}}\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (рівномірну інтегровність)[24]. Як наслідок цієї теореми маємо.

Теорема 3.16 (про рівність Вальда для W)**.** *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}$ і нехай τ – м.з. відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Якщо виконана умова $\mathsf{E}\tau < \infty$, то $W_\tau \in L_2(\Omega)$ та*

$$\mathsf{E}W_\tau = 0,\ \mathsf{E}W_\tau^2 = \mathsf{E}\tau.$$

Доведення. Оскільки $\{\tau \wedge t\}_{t\geq 0}$ – сім'я обмежених м.з., то за теоремою Дуба про оптимальну зупинку $\{W_{\tau\wedge t}, t \geq 0\}$ – мартингал відносно $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\}$, зокрема

$$\mathsf{E}W_{\tau\wedge t} = \mathsf{E}W_0 = 0.$$

Застосовуючи нерівності Дуба для мартингалів з $p = 2$, виводимо що

$$\mathsf{E}W_{\tau\wedge t}^2 \leq \mathsf{E}\left(\sup_{s\leq t} W_s^2\right) \leq 4\mathsf{E}W_t^2 = 4t,$$

тобто, $W_{\tau\wedge t} \in L_2(\Omega)$. За теоремами про мартингальну властивість процесу Вінера та Дуба про оптимальну зупинку

$$\left\{M_t = W_{\tau\wedge t}^2 - \tau\wedge t, t \geq 0\right\}$$

– мартингал відносно $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\}$, і значить,

$$\mathsf{E}M_t = \mathsf{E}M_0 = 0.$$

Звідки,

$$\mathsf{E}W_{\tau\wedge t}^2 = \mathsf{E}\tau\wedge t.$$

Покажемо, що $\{W_{\tau\wedge t}, t \geq 0\}$ утворює по t послідовність Коші в $L_2(\Omega)$:

$$\mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge t} - W_{\tau\wedge s}\right)^2 = \mathsf{E}\left(\tau\wedge t\right) + \mathsf{E}\left(\tau\wedge s\right) - 2\mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge t}W_{\tau\wedge s}\right).$$

Розглянемо детальніше останній доданок. У випадку $s < t$ отримаємо

$$\mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge t}W_{\tau\wedge s}\right) = \mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge s}\mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_{\tau\wedge s}\right)\right) = \mathsf{E}W_{\tau\wedge s}^2 = \mathsf{E}\tau\wedge s.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність маємо

$$\mathsf{E}\left(W_{\tau\wedge t} - W_{\tau\wedge s}\right)^2 = \mathsf{E}\left(\tau\wedge t - \tau\wedge s\right) \to 0, t, s \to \infty,$$

Тоді з $\mathsf{P}\{\tau < \infty\} = 1$ та неперервності м.н. W_t маємо, що

$$\text{l.i.m.}W_{\tau\wedge t} = W_\tau.$$

[24] Див., наприклад, A.18 Theorem в *Schilling R.L., Partzsch L.* Brownian Motion. – Berlin: de Gruyter, 2012.

Зокрема, $W_\tau \in L_2(\Omega)$ і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\mathsf{E}W_\tau^2 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}W_{t\wedge\tau}^2 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\tau \wedge t = \mathsf{E}\tau.$$

Більш того, оскільки зі збіжності в $L_2(\Omega)$ випливає збіжність в $L_1(\Omega)$, виводимо, що $\mathsf{E}W_\tau = \lim_{t\to\infty}\mathsf{E}W_{t\wedge\tau} = 0$. $\square$

Наслідок 3.1 (про ймовірність виходу W_t з інтервалу). *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера,*

$$\tau(x,T) = \inf\{t \geq 0 : W_t \notin (x-T, x)\}$$

– момент виходу з інтервалу $(x-T, x)$, $0 \leq x \leq T$, тоді

$$\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x - T\right\} = \frac{x}{T},\ \mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x\right\} = 1 - \frac{x}{T}$$

та

$$\mathsf{E}\tau(x,T) = x(T-x).$$

Доведення. Зазначимо, що $t \wedge \tau(x,T)$ обмежений момент зупинки. Оскільки $W_{t\wedge\tau(x,T)} \in [x-T, x]$, одержуємо $\left|W_{\tau(x,T)\wedge t}\right| \leq (T-x) \vee x$, і тоді за теоремами про мартингальну властивість процесу Вінера та Дуба про оптимальну зупинку

$$\mathsf{E}t \wedge \tau(x,T) = \mathsf{E}W_{t\wedge\tau(x,T)}^2 \leq (T-x)^2 \vee x^2.$$

Звідки за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\mathsf{E}\tau(x,T) \leq (T-x)^2 \vee x^2 < \infty.$$

Отже, за теоремою про рівність Вальда для W одержуємо

$$0 = \mathsf{E}W_{\tau(x,T)} = (x-T)\,\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x - T\right\} + x\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x\right\}.$$

Оскільки $\tau(x,T) < \infty$ м.н., маємо ще одне рівняння

$$\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x - T\right\} + \mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x\right\} = 1.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо розподіл для $W_{\tau(x,T)}$. І тоді для очікуваного значення моменту виходу з інтервалу маємо

$$\mathsf{E}\tau(x,T) = \mathsf{E}W_{\tau(x,T)}^2 = (T-x)^2\,\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x - T\right\} +$$
$$+ x^2\mathsf{P}\left\{W_{\tau(x,T)} = x\right\} = \frac{(T-x)^2 x}{T} + \frac{x^2(T-x)}{T} = Tx - x^2 = (T-x)\,x.$$

$\square$

Наслідок 3.2 (про очікуваний момент досягнення рівня). *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера,*

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 : W_t = x\}$$

– момент досягнення рівня $x \in \mathbb{R}$. Тоді $\mathsf{P}\{\tau_x < \infty\} = 1$ та $\mathsf{E}\tau_x = \infty$.

Доведення. Зазначимо, що

$$\sup_{t\geq 0} W_t \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

де $\xi_k = W_k - W_{k-1} \sim N(0,1)$. За властивостями випадкового блукання отримаємо, що $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \infty$ м.н., аналогічно $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = -\infty$ м.н. Тобто,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\geq 0} W_t = \infty, \inf_{t\geq 0} W_t = -\infty\right\} = 1,$$

а отже $\mathsf{P}\{\tau_x < \infty\} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

З рівності $\mathsf{P}\{\tau_x < \infty\} = 1$ маємо, що $W_{\tau_x} = x$ м.н. та $\mathsf{E}W_{\tau_x} = x$, що суперечитиме теоремі про рівність Вальда для W, якщо $\mathsf{E}\tau_x < \infty$. Отже можемо зробити висновок, що $\mathsf{E}\tau_x = \infty$. □

Теорема 3.17 (про генератрису моменту досягнення рівня для W_t)**.** *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера, тоді перетворення Лапласа розподілу моменту досягнення рівня τ_x, $x \in \mathbb{R}$, визначене як*

$$\mathsf{E}e^{-s\tau_x} = e^{-|x|\sqrt{2s}}, s \geq 0.$$

Доведення. За теоремою про мартингальну властивість процесу Вінера процес

$$\left\{\tilde{W}_t = e^{rW_t - \frac{1}{2}r^2 t}, t \geq 0\right\}$$

є мартингал відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, тоді за теоремою Дуба про оптимальну зупинку маємо

$$1 = \mathsf{E}\tilde{W}_0 = \mathsf{E}\tilde{W}_{t\wedge\tau_x} = \mathsf{E}e^{rW_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}r^2 t\wedge\tau_x}.$$

Оскільки $W_{t\wedge\tau_x} \leq x$ для $x > 0$, маємо таку оцінку зверху та знизу для $\tilde{W}_{t\wedge\tau_x}$:

$$0 \leq e^{rW_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}r^2 t\wedge\tau_x} \leq e^{rx},$$

тоді

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{W}_{t\wedge\tau_x} = \begin{cases} e^{rW_{\tau_x} - \frac{1}{2}r^2\tau_x}, & \tau_x < \infty, \\ 0, & \tau_x = \infty. \end{cases}$$

Таким чином, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$1 = \mathsf{E}e^{rW_{t\wedge\tau_x} - \frac{1}{2}r^2 t\wedge\tau_x} \to e^{rx}\mathsf{E}\left[e^{-\frac{1}{2}r^2\tau_x}\mathbb{1}_{\{\tau_x<\infty\}}\right].$$

Звідки

$$\mathsf{E}\left[e^{-\frac{1}{2}r^2\tau_x}\mathbb{1}_{\{\tau_x<\infty\}}\right] = e^{-rx}.$$

Зробивши заміну $\frac{1}{2}r^2 = s$, матимемо

$$\mathsf{E}\left[e^{-s\tau_x}\mathbb{1}_{\{\tau_x<\infty\}}\right] = e^{-\sqrt{2s}x}.$$

Для $x < 0$ застосуємо аналогічні міркування, взявши $-r$ замість r. □

3.3. Процес Вінера відносно стохастичного базису

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – повний імовірнісний простір, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ – повна неперервна справа фільтрація та $\theta = \{\theta_t, t \geq 0\}$ – напівгрупа операторів на Ω:

$$\theta_0\omega = \omega, \theta_u \circ \theta_t\omega = \theta_{t+u}\omega, t, u \geq 0.$$

Оператори θ_t називають операторами зсуву, а сукупність об'єктів $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \theta, \mathsf{P}\}$ – *стохастичним базисом.*

Визначення. Процес $\{W_t, t \geq 0\}$ називають процесом Вінера на стохастичному базисі $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \theta, \mathsf{P}\}$, якщо W_t є процесом Вінера відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}$ та є адитивний по θ:

$$W_{t+u} = W_t + W_u \circ \theta_t, t, u \geq 0.$$

Якщо припустити що Ω – усі неперервні функції на $\mathbb{R}_+$ з $\omega_0 = 0$, тоді $\theta_t\omega$ можна розглядати як відображення

$$u \to \omega_{t+u} - \omega_t,$$

а сам процес Вінера як $W_t = \omega_t$. При цьому суперпозиція $W_u \circ \theta_t$ визначає приріст процесу на проміжку часу довжиною u та початком в t (див. рис. 3.10.).

Якщо $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера відносно натуральної фільтрації, то він є процесом Вінера і відносно поповненого правого замикання фільтрації. Тобто процес Вінера відносно натуральної фільтрації можна довизначити до процесу на стохастичному базисі. Переформулюємо теорему про марковську властивість процесу Вінера в такій формі.

Теорема 3.18 (про марковську властивість для W_t на стохастичному базисі)**.** *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера на стохастичному базисі, тоді для будь-якої обмеженої в.в. $\xi \in \mathcal{F}_\infty^W$ має місце рівність*

$$\mathsf{E}\left[\xi \circ \theta_t | \mathcal{F}_t\right] = \mathsf{E}\xi, t \geq 0.$$

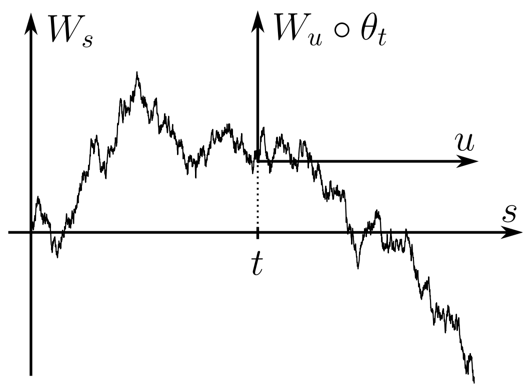


Рис. 3.10. Адитивність процесу Вінера

Зауважимо, що умову обмеженості можна пом'якшити до умови додатності або абсолютної інтегровності. Застосовуючи поняття стохастичного базису, можемо посилити дане твердження, замінивши детерміновану величину t на деякий марковський момент.

Строго марковська властивість

Теорема 3.19 (про строго марковську властивість для W_t на стохастичному базисі)**.** *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера на стохастичному базисі, τ – деякий марковський момент відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Тоді для будь-якої $\bar{\mathcal{F}}_\infty^W$-вимірної обмеженої в.в. ξ маємо*

$$\mathsf{E}\left[\xi \circ \theta_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} | \mathcal{F}_\tau\right] = (\mathsf{E}\xi)\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}.$$

Зокрема, якщо τ – м.з., то

$$\{W_u \circ \theta_\tau = W_{u+\tau} - W_\tau, u \geq 0\}$$

є процесом Вінера незалежним від $\mathcal{F}_\tau$.

Доведення. За означенням умовного математичного сподівання

$$\mathsf{E}\left[\xi|\mathcal{F}\right] = \mathsf{E}\left[\xi^+|\mathcal{F}\right] - \mathsf{E}\left[\xi^-|\mathcal{F}\right],$$

тому достатньо розглянути лише випадок обмеженої невід'ємної в.в. Крім того, для довільної в.в. $\xi \in \bar{\mathcal{F}}_\infty^W$ існує в.в. $\xi_0 \in \mathcal{F}_\infty^W$: $\xi = \xi_0$ м.н., тому надалі розглядатиме лише $\mathcal{F}_\infty^W$-вимірні в.в.

Оскільки $(\mathsf{E}\xi)\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ є $\mathcal{F}_\tau$-вимірна, то достатньо перевірити виконання умови балансу:

$$\forall A \in \mathcal{F}_\tau : \mathsf{E}\mathbb{1}_A \left(\xi \circ \theta_\tau\right) \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = \mathsf{E}\mathbb{1}_A \left(\mathsf{E}\xi\right) \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}.$$

Припустимо спочатку, що τ набуває значення з деякої зліченної множини $D \subset \mathbb{R}$, тоді

$$\{\tau < \infty\} = \cup_{t\in D} \{\tau = t\} \,\text{і}\, A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0.$$

Звідки, застосовуючи теорему Лебега про монотонну збіжність

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A \left(\xi \circ \theta_\tau\right) \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = \mathsf{E}\xi \circ \theta_\tau \sum_{t\in D} \mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t\}} = \sum_{t\in D} \mathsf{E}\xi \circ \theta_t \mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t\}}.$$

Застосовуючи формулу повного математичного сподівання приходимо до

$$\sum_{t\in D} \mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t\}} \mathsf{E}\left(\xi \circ \theta_t | \mathcal{F}_t\right)\right),$$

що за теоремою про марковську властивість для W_t на стохастичному базисі дорівнює

$$\sum_{t\in D} \mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t\}}\right) \mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\right) \mathsf{E}\xi.$$

Далі, нехай τ необов'язково зліченнозначна, але ξ можна подати як $f(W_u)$, $u > 0$, де f – деяка неперервна обмежена вимірна функція. Визначимо послідовність $\{\tau_n\}$ як дискретну апроксимацію для τ: τ_n – зліченнозначні, $\tau_n \downarrow \tau$ та $\tau_n < \infty$ на події $\tau < \infty$. Оскільки подія

$$A \cap \{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n},$$

за доведеним вище маємо таку рівність

$$\mathsf{E}\left(f(W_u) \circ \theta_{\tau_n}\right) \mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}} = \mathsf{E}\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\left(\mathsf{E}f(W_u)\right).$$

Враховуючи, що процес W_t має неперервні траєкторії і функція f неперервна, маємо

$$f(W_u) \circ \theta_{\tau_n} \to f(W_u) \circ \theta_\tau \text{ м.н.}$$

і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\mathsf{E}\left(f(W_u) \circ \theta_{\tau_n}\right) \mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}} \to \mathsf{E}\left(f(W_u) \circ \theta_\tau\right) \mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}.$$

Тобто умова балансу для в.в. $\xi = f(W_u)$ доведена.

Припустимо тепер, що f – обмежена невід'ємна вимірна функція. Позначимо через $\mathcal{D}$ клас борелевих множин $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, для яких умова балансу виконана з

$$f(W_u) = \mathbb{1}_B(W_u).$$

Клас $\mathcal{D}$ утворює d-систему. Позначимо через $\mathcal{Z}$ – клас замкнених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Враховуючи, що $\forall B \in \mathcal{Z}$ існує послідовність неперервних обмежених функцій $\{f_n\}$ таких, що $f_n \uparrow \mathbb{1}_B$, за теоремою Лебега про монотонну збіжність $B \in \mathcal{D}$. Оскільки $\mathcal{Z}$ – π-система і $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, за теоремою про $\pi - d$ систему Динкіна $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$.

Будь-яку обмежену вимірну невід'ємну функцію f можна апроксимувати послідовністю простих борелевих функцій $f_n \uparrow f$. Отже, за теоремою Лебега про монотонну збіжність умова балансу доведена для таких функцій.

Розглянемо тепер в.в. виду

$$\xi_n = f_1(W_{u_1}) \ldots f_n\left(W_{u_n} - W_{u_{n-1}}\right)$$

для деяких обмежених невід'ємних борелевих функцій $f_1, \ldots, f_n$ та $0 < u_1 < \, < \ldots < u_n$. Використаємо метод математичної індукції. Випадок $n = 1$ був досліджений вище. Припустимо, що умова балансу виконана для ξ_n та покажемо, що вона має місце тоді і для

$$\xi_{n+1} = \xi_n f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}} - W_{u_n}\right) = \xi_n f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right) \circ \theta_{u_n}.$$

Враховуючи, що

$$\xi_n \circ \theta_\tau \in \mathcal{F}_{\tau+u_n}, \theta_{u_n} \circ \theta_\tau = \theta_{\tau+u_n}$$

та

$$\mathsf{E}\left(\cdot|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\cdot|\mathcal{F}_{\tau+u_n}\right)|\mathcal{F}_{\tau}\right),$$

маємо

$$\begin{gathered}\mathsf{E}\left(\xi_{n+1}\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\xi_{n+1}\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}|\mathcal{F}_{\tau+u_n}\right)|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\left(\xi_n f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\circ\theta_{u_n}\right)\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}|\mathcal{F}_{\tau+u_n}\right)|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\xi_n\circ\theta_{\tau}\cdot f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\circ\theta_{u_n+\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}|\mathcal{F}_{\tau+u_n}\right)|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\xi_n\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_A\mathsf{E}\left(f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\circ\theta_{u_n+\tau}\mathbb{1}_{\{\tau+u_n<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau+u_n}\right)|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\xi_n\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_A\mathsf{E}\left(f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\right)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau}\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\xi_n\circ\theta_{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}|\mathcal{F}_{\tau}\right)\mathsf{E}\left(f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\right)=\\ =\mathsf{E}\left(\xi_n\right)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}\mathsf{E}\left(f_{n+1}\left(W_{u_{n+1}-u_n}\right)\right)=\mathsf{E}\left(\xi_{n+1}\right)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}\cap A}.\end{gathered}$$

Отже, умова балансу доведена для ξ_n. Борелеві функції виду

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f_1\left(x_1\right)\ldots f_n\left(x_n\right)$$

визначають $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$. За теоремою про $\pi-d$ систему Динкіна маємо, що умова балансу виконується для в.в.

$$\xi=f\left(W_{u_1},\ldots,W_{u_n}-W_{u_{n-1}}\right),$$

де f – деяка борелева функція та $0<u_1<\ldots<u_n$. Оскільки прирости процесу W визначають σ-алгебру $\mathcal{F}_{\infty}^{W}$, остаточне доведення маємо, застосовуючи теорему про $\pi-d$ систему Динкіна ще раз. □

Функціонали процесу Вінера

Проаналізуємо детально момент досягнення додатного рівня

$$\left\{\tau_x^+,x\geq 0\right\}$$

та процес максимальних значень

$$\left\{W_t^+=\sup_{s\leq t}W_s,t\geq 0\right\}.$$

Важливою властивістю цих характеристик є те, що вони є оберненням одна одної:

$$\tau_x^+=\inf\left\{t>0:W_t^+>x\right\}$$

та

$$W_t^+=\inf\left\{x\geq 0:\tau_x^+>t\right\}.$$

Відмітимо також, що внаслідок властивості симетричності процесу Вінера момент досягнення від'ємного рівня

$$\tau_x^-=\inf\left\{t>0:W_t<x\right\},x<0,$$

має той самий розподіл, що і момент досягнення додатного рівня $-x$. Тобто, у встановлених нижче співвідношеннях для τ_x^+, $x \geq 0$, достатньо замінити x на $-x$ для того, щоб отримати відповідні результати для τ_{-x}^-. Крім того, для процесу мінімальних значень

$$W_t^- = \inf_{s \leq t} W_t,$$

можна застосувати той факт, що W_t^+ та $-W_t^-$ мають однаковий розподіл (вправа).

Теорема 3.20 (про момент потрапляння до $[x, \infty)$ для W). *Нехай $x > 0$ та позначимо*

$$\tau_{x-}^+ = \inf \{t > 0 : W_t \in [x, \infty)\} = \inf \{t > 0 : W_t = x\}.$$

Тоді τ_{x-}^+ є марковським моментом відносно $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}$ та $\tau_{x-}^+ = \tau_x^+$ м.н.

Доведення. За побудовою$\tau_{x-}^+ \leq \tau_x^+$ м.н. За теоремою про очікуваний момент досягнення рівня $\mathsf{P}\{\tau_x^+ < \infty\} = 1$, тоді також $\mathsf{P}\left\{\tau_{x-}^+ < \infty\right\} = 1$ і за теоремою про строго марковську властивість для W_t на стохастичному базисі $\left\{W_u \circ \theta_{\tau_{x-}^+}, u \geq 0\right\}$ є процесом Вінера. Враховуючи, що

$$\tau_x^+ = \tau_{x-}^+ + \tau_0^+ \circ \theta_{\tau_{x-}^+},$$

відповідну рівність маємо за теоремою про поведінку W в нулі. □

Теорема 3.21 (про принцип віддзеркалювання). *Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера, тоді $\left\{\tilde{W}_t, t \geq 0\right\}$, де*

$$\tilde{W}_t = \begin{cases} W_t, & t \leq \tau_x^+, \\ x - (W_t - x), & t > \tau_x^+, \end{cases}$$

також є процесом Вінера.

Доведення. Нехай $C_{[0,\infty)}$ – простір неперервних функцій на $[0, \infty)$ та $C_{0[0,\infty)}$ – простір неперервних функцій $[0, \infty)$, які в нулі дорівнюють нулю. Визначимо відображення $\psi : C_{[0,\infty)} \times [0, \infty) \times C_{0[0,\infty)} \to C_{[0,\infty)}$ таким чином

$$\psi(f, t_0, g) = \begin{cases} f(t), & t \leq t_0, \\ f(t_0) + g(t - t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

та задамо в.п.

$$\xi_t = \begin{cases} W_t, & t \leq \tau_x^+, \\ x, & t > \tau_x^+. \end{cases}$$

Оскільки за лемою про σ-алгебри, породжені марковським моментом, τ_x^+ є $\mathcal{F}_{\tau_x^+}$-вимірною і $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\{\xi_t \in B\} \cap \left\{\tau_x^+ \le t\right\} \in \mathcal{F}_t,$$

отримаємо, що ξ_t є $\mathcal{F}_{\tau_x^+}$-вимірним для будь-якого $t \ge 0$. Визначимо також процес

$$\eta_t = W_{\tau_x^+ + t} - W_{\tau_x^+},$$

який за теоремою про строго марковську властивість для W_t на стохастичному базисі є процесом Вінера, незалежним від $\mathcal{F}_{\tau_x^+}$.

Застосовуючи теорему про перетворення процесу Вінера, маємо $\eta_t \sim -\eta_t$, тоді $\psi\left(\xi_\cdot, \tau_x^+, \eta_\cdot\right) \sim \psi\left(\xi_\cdot, \tau_x^+, -\eta_\cdot\right)$, де

$$\psi\left(\xi_t, \tau_x^+, \eta_t\right) = \begin{cases} \xi_t, & t \le \tau_x^+, \\ \xi_{\tau_x^+} + \eta_{t-\tau_x^+}, & t > \tau_x^+, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} W_t, & t \le \tau_x^+, \\ W_{\tau_x^+} + W_{\tau_x^+ + \left(t-\tau_x^+\right)} - W_{\tau_x^+}, & t > \tau_x^+, \end{cases} = W_t,$$

та, враховуючи що $W_{\tau_x^+} = x$,

$$\psi\left(\xi_t, \tau_x^+, -\eta_t\right) = \begin{cases} W_t, & t \le \tau_x^+, \\ W_{\tau_x^+} - \left(W_{\tau_x^+ + \left(t-\tau_x^+\right)} - W_{\tau_x^+}\right), & t > \tau_x^+, \end{cases} = \tilde{W}_t.$$

$\square$

Теорема 3.22 (про спільний розподіл W^+ та W)**.** *Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – процес Вінера, тоді для $x \ge 0$, $y \le x$:*

$$\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge x, W_t < y\right\} = \mathsf{P}\left\{W_t > 2x - y\right\}.$$

Звідки

$$f_{W_t^+, W_t}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2x-y)}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2t}}, & x \ge 0, y \le x, \\ 0, & \textit{в ін. випадку}, \end{cases}$$

та

$$f_{W_t^+}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & x \ge 0, \\ 0, & \textit{в ін. випадку}, \end{cases}$$

тобто, W_t^+ має усічений нормальний розподіл.

Доведення. Оскільки

$$\left\{W_t^+ \ge x\right\} = \left\{\tau_x^+ \le t\right\},$$

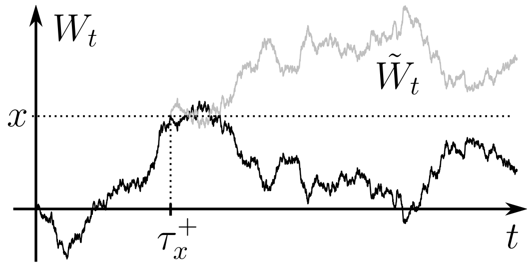


Рис. 3.11. Віддзеркалений процес

маємо

$$\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge x, W_t < y\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_x^+ \le t, W_t < y\right\}.$$

На множині $\{\tau_x^+ \le t\}$ віддзеркалений процес $\tilde{W}_t = 2x - W_t$ (див. рис. 3.11.), тому

$$\mathsf{P}\left\{\tau_x^+ \le t, W_t < y\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_x^+ \le t, \tilde{W}_t > 2x - y\right\}.$$

Момент досягнення рівня x для процесів W та $\tilde{W}$ має однаковий розподіл, звідки маємо, що

$$\mathsf{P}\left\{\tau_x^+ \le t, \tilde{W}_t > 2x - y\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_x^+ \le t, W_t > 2x - y\right\}.$$

За умовою теореми $x - y \ge 0$, а тому $2x - y \ge x$, а значить, $\{W_t > 2x - y\} \subset \{\tau_x^+ \le t\}$ і приходимо до шуканої рівності для $\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge x, W_t < y\right\}$. Враховуючи що W_t має розподіл $N(0,t)$, одержимо

$$\mathsf{P}\left\{W_t > 2x - y\right\} = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{2x-y}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Звідки для $x \ge 0$, $y \le x$:

$$f_{W_t^+, W_t}(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathsf{P}\left\{W_t > 2x - y\right\}$$

та для $x \ge 0$: $f_{W_t^+}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{W_t^+, W_t}(x,y)\, dy$. □

Наслідок 3.3 (Башельє)**.** *Для довільних* $t, y \ge 0$*:*

$$\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge y\right\} = 2\mathsf{P}\left\{W_t \ge y\right\} = \mathsf{P}\left\{|W_t| \ge y\right\}.$$

Доведення. Візьмемо $x = y$ в теоремі про спільний розподіл W^+ та W, тоді

$$\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge y, W_t < y\right\} = \mathsf{P}\left\{W_t > y\right\}.$$

Як наслідок того, що $\{W_t \ge y\} \subset \left\{W_t^+ \ge y\right\}$ та $\mathsf{P}\left\{W_t = y\right\} = 0$, маємо

$$\mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge y\right\} = \mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge y, W_t < y\right\} + \mathsf{P}\left\{W_t^+ \ge y, W_t \ge y\right\} = 2\mathsf{P}\left\{W_t \ge y\right\}.$$

Друга рівність наслідку випливає з властивості симетрії процесу Вінера. □

Вправа 3.9. Знайти спільний розподіл для $\left\{W_t^+, W_t^+ - W_t\right\}$ та показати, що $W_t^+ \sim W_t^+ - W_t \sim |W_t|$.[25]

Вправа 3.10. Нехай $x, t > 0$, показати, що розподіл τ_x^+ збігається з розподілом $\frac{x^2}{\zeta^2}$, де $\zeta \sim N(0,1)$ і відповідно, що щільністю цього розподілу є

$$f_{\tau_x^+}(t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Теорема 3.23 (про незалежність та стаціонарність часу між моментами досягнення рівнів)**.** *Нехай* $\{W_t, t \geq 0\}$ *– процес Вінера відносно* $\{\mathcal{F}_t\}$*,* $0 < < x_1 < \ldots < x_n$*, тоді* $\tau_{x_1}^+, \tau_{x_2}^+ - \tau_{x_1}^+, \ldots, \tau_{x_n}^+ - \tau_{x_{n-1}}^+$ *незалежні в.в. та розподіл* $\tau_{x_i}^+ - \tau_{x_{i-1}}^+$ *збігається з розподілом* $\tau_{x_i - x_{i-1}}^+$*.*

Доведення. Застосовуючи метод математичної індукції достатньо довести, що $\tau_{x_n}^+ - \tau_{x_{n-1}}^+$ не залежить від $\tau_{x_1}^+, \tau_{x_2}^+ - \tau_{x_1}^+, \ldots, \tau_{x_{n-1}}^+ - \tau_{x_{n-2}}^+$. Перепишемо рівність $\left\{\tau_{x_i}^+ > t\right\} = \left\{W_t^+ < x_i\right\}$ так

$$\left\{\tau_{x_i}^+ > t\right\} = \left\{W_{t \wedge \tau_{x_{n-1}}^+}^+ < x_i\right\},$$

звідки за лемою про σ-алгебри, породжені марковським моментом

$$\tau_{x_i}^+ \in \mathcal{F}_{\tau_{x_{n-1}}^+}, i = \overline{1, n-1}.$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\tau_{x_n}^+ - \tau_{x_{n-1}}^+ > t\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau_{x_n}^+ - \tau_{x_{n-1}}^+ > t, \tau_{x_{n-1}}^+ < \infty\right\} = \\
= \mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t}\left(W_{\tau_{x_{n-1}}^+ + s} - W_{\tau_{x_{n-1}}^+}\right) < x_n - x_{n-1}, \tau_{x_{n-1}}^+ < \infty\right\} = \\
= \mathsf{P}\left\{W_t^+ \circ \theta_{\tau_{x_{n-1}}^+} < x_n - x_{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\left\{W_t^+ \circ \theta_{\tau_{x_{n-1}}^+}, t \geq 0\right\}$ не залежить від $\mathcal{F}_{\tau_{x_{n-1}}^+}$, отримаємо незалежність $\tau_{x_n}^+ - \tau_{x_{n-1}}^+$ від $\tau_{x_i}^+$, $i = \overline{1, n-1}$.

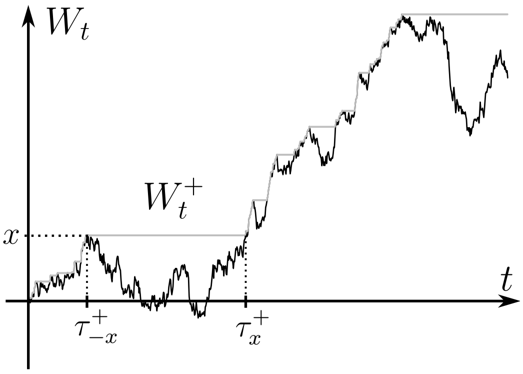
Враховуючи, що

$$\left\{W_{\tau_{x_{i-1}}^+ + s} - W_{\tau_{x_{i-1}}^+}, s \geq 0\right\}$$

є процесом Вінера, одержимо

$$\mathsf{P}\left\{\tau_{x_i}^+ - \tau_{x_{i-1}}^+ > t\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t}\left(W_{\tau_{x_{i-1}}^+ + s} - W_{\tau_{x_{i-1}}^+}\right) < x_i - x_{i-1}\right\} =$$

[25] Відмітимо, що має місце більш загальний результат: існує процес Вінера W_t^1 незалежний від W_t такий, що процеси $\left\{W_t^+ - W_t, \geq 0\right\}$ та $\left\{\left|W_t^1\right|, t \geq 0\right\}$ мають однаковий розподіл. Див. Theorem 2.34 в *Morters P., Peres Y.* Brownian motion. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.



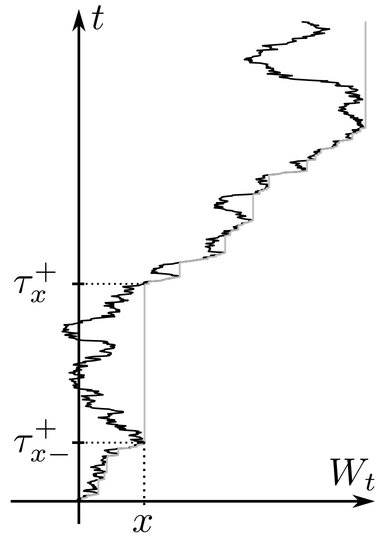


Рис. 3.12. Процес моментів досягнення рівнів

$$= \mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t} W_s < x_i - x_{i-1}\right\} = \mathsf{P}\left\{\tau^+_{x_i - x_{i-1}} > t\right\}.$$

□

Поєднуючи раніше отримані результати, можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 3.24 (про сім'ю моментів досягнення рівнів як в.п.)**.** *Для майже усіх ω траєкторії $\{\tau_x^+(\omega), x \ge 0\}$ неперервні справа, строго зростаючі з $\tau_0^+ = 0$ та $\lim_{x\to\infty} \tau_x^+ = \infty$ (рис. 3.12.). Відповідно, м.н. траєкторії W_t^+ неспадні неперервні з $W_0^+ = 0$ та $\lim_{t\to\infty} W_t^+ = \infty$. Більш того, $\{\tau_x^+, x \ge 0\}$ є стійким процесом Леві з $\alpha = \frac{1}{2}$.*

Теорема 3.25 (про спільний розподіл моменту досягнення максимуму та максимуму W)**.** *Для процесу Вінера $\{W_t, t \ge 0\}$ визначимо момент досягнення максимуму як*

$$T_+(t) = \inf\left\{s > 0 : W_s = W_t^+\right\}.$$

Спільна щільність для $\left\{T_+(t), W_t^+\right\}$ має вигляд

$$f(s,x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\frac{x}{s}e^{-\frac{x^2}{2s}}, & 0 < s < t, 0 < x < \infty, \\ 0, & \textit{в ін. випадку.} \end{cases}$$

Доведення. За умови $W_t^+ = x$ моменти $T_+(t)$ та τ_x^+ мають однаковий розподіл, значить

$$f(s,x) = f_{T_+(t)|W_t^+=x}(s)\, f_{W_t^+}(x) = f_{\tau_x^+|W_t^+=x}(s)\, f_{W_t^+}(x) = f_{\tau_x^+, W_t^+}(s,x).$$

Тобто достатньо знайти спільну щільність для τ_x^+ та W_t^+. За теоремою про строго марковську властивість для W_t на стохастичному базисі

$$W_t^+ | \tau_x^+ = s \sim x + \max_{0 \le u \le t-s} W_u = x + W_{t-s}^+$$

для $0 < s \le t$, і значить, умовна щільність має вигляд

$$f_{W_t^+ | \tau_x^+ = s}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi (t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, x \le y,$$

а спільна щільність така

$$f_{\tau_x^+, W_t^+}(s, y) = f_{\tau_x^+}(s) \, f_{W_t^+ | \tau_x^+ = s}(y) =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \sqrt{\frac{2}{\pi (t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, 0 < s < t, x \le y < \infty.$$

Підставляючи $y = x$, отримаємо спільну щільність для $\left\{T_+(t), W_t^+\right\}$. $\square$

Приклад (закон арксинуса для моменту досягнення максимуму)**.** Знайдемо функцію розподілу для $T_+(t)$.

Проінтегрувавши $f(s, x)$ по x в межах від 0 до ∞, отримаємо

$$f_{T_+(t)}(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}}, 0 < s < t.$$

Звідки

$$\mathsf{P}\{T_+(t) < s\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, 0 < s < t.$$

Отримаємо так званий розподіл арксинуса. Аналіз щільності для $T_+(t)$ вказує на те, що найбільш імовірно екстремальні значення процес набуває на кінцях відрізка $[0, t]$ (рис. 3.13.).

Вправа 3.11. Нехай η, ζ – незалежні $N(0,1)$-розподілені в.в. Показати, що

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta^2}{\eta^2 + \zeta^2} < x\right\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\zeta^2}{\eta^2 + \zeta^2} > 1 - x\right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, 0 \le x \le 1.$$

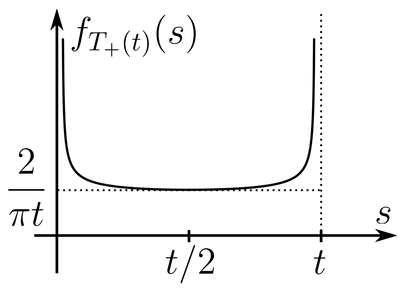


Рис. 3.13. Щільність досягнення максимуму

Приклад (закон арксинуса для нулів процесу Вінера[26]). Позначимо через

$$T_0(t) = \inf\{u > t : W_u = 0\} \text{ та } T^0(t) = \sup\{u \le t : W_u = 0\}$$

моменти першого досягнення рівня 0 після t та останнього досягнення цього рівня до t відповідно. Тоді

$$\{T_0(s) > t\} = \left\{T^0(t) < s\right\}, 0 \le s \le t$$

(див. рис. 3.14.). За умовою $W_t = x$, тривалість першого проміжку після t, на якому W не дорівнює 0, $T_0(t) - t$ має розподіл як момент досягнення рівня $-x$ для процесу $W \circ \theta_t$ (див. рис. 3.15.). За теоремою про марковську властивість для W_t на стохастичному базисі цей момент не залежить від W_t і згідно з вправою 3.10 має розподіл як $\frac{x^2}{\zeta^2}$, $\zeta \sim N(0,1)$. Звідки

$$T_0(t) - t \sim \frac{t\eta^2}{\zeta^2},$$

де η, ζ – незалежні $N(0,1)$-розподілені в.в., та

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left\{T^0(t) < s\right\} &= \mathsf{P}\{T_0(s) > t\} = \mathsf{P}\{T_0(s) - s > t - s\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\frac{s\eta^2}{\zeta^2} > t - s\right\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\zeta^2}{\eta^2 + \zeta^2} < \frac{s}{t}\right\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}, 0 \le s \le t. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\mathsf{P}\left\{t - T^0(t) < s\right\} = \mathsf{P}\{T_0(t-s) < t\} = \mathsf{P}\left\{\frac{(t-s)\eta^2}{\zeta^2} < s\right\} =$$

[26]Закони арксинуса для останнього нуля та моменту досягнення максимуму тісно пов'язані. Момент досягнення максимуму процесом Вінера відповідає останньому нулю відображеного процесу $W_t^+ - W_t$, розподіл якого збігається з розподілом останнього нуля для модуля деякого процесу Вінера W^1 незалежного від W, а нулі для $|W^1|$ та W^1 збігаються. Крім того, розподіл арксинуса має час, який процес Вінера перебуває над віссю x. Див. Theorem 5.26 та Theorem 5.28 в *Morters P., Peres Y.* Brownian motion. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

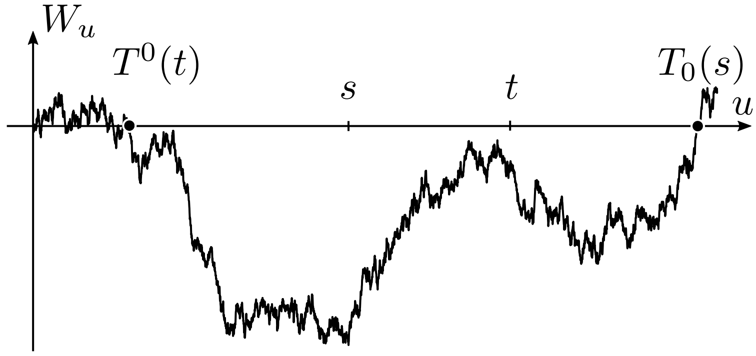


Рис. 3.14. Останній нуль до t та перший після

$$= \mathsf{P}\left\{t < s\frac{\zeta^2+\eta^2}{\eta^2}\right\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\eta^2}{\eta^2+\zeta^2} < \frac{s}{t}\right\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}, 0 \le s \le t.$$

Позначимо через A_{st} подію, яка полягає в тому, що на проміжку (s,t), $0 \le s < t$, існує хоча б один нуль для W. Тоді $\bar{A}_{st}$ визначає подію, що на (s,t) нулів немає, яка збігається з подією, що останній перетин нульового рівня до моменту t стався до s: $\left\{T^0(t) < s\right\}$, а значить

$$\mathsf{P}(A_{st}) = 1 - \mathsf{P}\left\{T^0(t) < s\right\} = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – стандартний процес Вінера. Визначити розподіл середнього арифметичного значень процесу в точках $0, 1, \ldots, n$.

2. Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – процес Вінера. Позначимо $X_t = W_t - tW_1$, $0 \le t \le 1$. Знайти $\mathsf{E}(X_s X_t)$ для $0 < s, t < 1$.

3. Нехай $\left\{W_t^{(1)}, t \ge 0\right\}$ та $\left\{W_t^{(2)}, t \ge 0\right\}$ – незалежні процеси Вінера. Знайти $\mathsf{P}\left\{\rho\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right) < d\right\}$, де ρ – метрика Евкліда та d – деяка константа.

4. Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – стандартний процес Вінера. Показати що $\tau_{x-}^{+} = \inf\{t > 0 : W_t = x\}$ є марковським моментом відносно $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}$.

5. Нехай $\{W_t, t \ge 0\}$ – стандартний процес Вінера, $X_t = 2t + W_t$ та $\tau(x,T)$ – момент виходу процесу X_t з інтервалу $(x-T, x)$. Знайти ймовірність того, що процес X_t досягне границю x раніше за границю $x - T$.

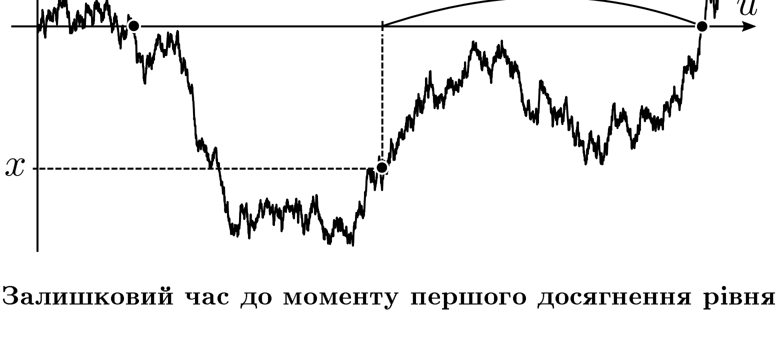


Рис. 3.15. Залишковий час до моменту першого досягнення рівня 0 після t

4. СТОХАСТИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ

Динаміка цілої низки важливих характеристик може бути слушним чином описана в термінах процесу Вінера, траєкторії якого недиференційовні. Тому відомий апарат теорії диференційних рівнянь детермінованих функцій не може бути використаний під час аналізу окремих траєкторій. Враховуючи це, в теорії випадкових процесів розроблений відповідний апарат стохастичного числення, в основі якого лежить поняття стохастичного інтегралу.

4.1. Стохастичний інтеграл від детермінованої функції

Означення стохастичного інтегралу для детермінованої функції базується на понятті ортогональної міри, для побудови якої визначальне значення має результат функціонального аналізу про подовження лінійного відображення.

Визначення. Нехай маємо деякі лінійні простори X та Y. Відображення $L : X \to Y$ називають лінійним, якщо $\forall x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$L\left(x + y\right) = Lx + Ly$$

та

$$L\left(\alpha x\right) = \alpha L x.$$

Відображення $L : X \to Y$ нормованих просторів називають *обмеженим*, якщо

$$\exists C \geq 0 : \|Lx\| \leq C\|x\|, \forall x \in X.$$

Відмітимо, що для лінійного відображення умова обмеженості еквівалентна умові неперервності.

Визначення. Підмножину $M \subset X$ лінійного простору називають *лінійним різноманіттям*, якщо $\forall x, y \in M$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$x + y \in M \text{ та } \alpha x \in M.$$

Зауважимо, що лінійне різноманіття нормованого простору в свою чергу є нормованим простором з нормою визначеною як звуження норми простору X на множину M: $\| \cdot \||_M$.

Теорема 4.1 (про подовження обмеженого лінійного відображення). *Нехай D – деяке щільне лінійне різноманіття нормованого простору X та Y – деякий простір Банаха, тоді для довільного лінійного обмеженого відображення $L : D \to Y$ існує єдине довизначення $\tilde{L} : X \to Y$, таке що $\tilde{L}|_D = L$.*

Доведення. Виберемо довільний елемент $f \in X$, тоді існує послідовність $\{f_n\}$ елементів з D таких, що $f_n \to f$. Оскільки L обмежене, маємо

$$\|Lf_m - Lf_n\| \leq \|L\|\|f_n - f_m\|,$$

і враховуючи, що $\{f_n\}$ – послідовність Коші з X, робимо висновок, що $\{Lf_n\}$ – послідовність Коші з Y. Повнота простору Y вказує, що тоді послідовність $\{Lf_n\}$ збіжна і $\exists g \in Y : Lf_n \to g$. Визначимо відображення $\tilde{L} : X \to Y$ як $\tilde{L}f = g$ і покажемо, що воно не залежить від вибору послідовності $\{f_n\}$. Припустимо, що також послідовність $\{f'_n\}$ з множини D збігається до f, тоді

$$\|Lf_n - Lf'_n\| \leq \|L\|\|f_n - f'_n\| \leq \|L\| \left(\|f_n - f\| + \|f - f'_n\|\right) \to 0,$$

якщо $n \to \infty$. Враховуючи що $Lf_n \to g$, отримаємо

$$Lf'_n = Lf_n + (Lf'_n - Lf_n) \to g.$$

Тобто відображення $\tilde{L}$ визначене коректно.

Покажемо що $\tilde{L}$ лінійне. Візьмемо довільні $f, h \in X$ та $\alpha \in \mathbb{C}$, тоді існують послідовності $\{f_n\}$ та $\{h_n\}$ з D: $f_n \to f$ і $h_n \to h$. Оскільки

$$f_n + h_n \to f + h \text{ та } \alpha f_n \to \alpha f,$$

отримаємо

$$L\left(f_n + h_n\right) = Lf_n + Lh_n \to \tilde{L}f + \tilde{L}h$$

та

$$L\left(\alpha f_n\right) = \alpha L f_n \to \alpha \tilde{L} f.$$

Покажемо що $\tilde{L}$ довизначає L. Нехай $f \in D$, тоді візьмемо $f_n = f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, і матимемо $f_n \to f$ та $Lf_n \to Lf$. Отже, за визначенням відображення $\tilde{L}$ маємо $\tilde{L}f = Lf$ або $\tilde{L}|_D = L$. Крім того,

$$\|\tilde{L}f\| = \lim_{n\to\infty} \|Lf_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|L\|\|f_n\| = \|L\|\|f\|,$$

значить $\|\tilde{L}\| \leq \|L\|$. Це дає обмеженість $\tilde{L}$, а разом з лінійністю – неперервність. Якщо $\bar{L}$ інший лінійний обмежений такий, що $\bar{L}|_D = L = \tilde{L}|_D$, тоді

$$\forall f \in X : \exists f_n \in D : f_n \to f$$

та

$$\bar{L}f = \bar{L}\left(\lim f_n\right) = \lim \bar{L}f_n = \lim \tilde{L}f_n = \tilde{L}f.$$

Отже, $\tilde{L}$ є однозначним довизначенням. □

Визначення. Відображення нормованих просторів $J : X \to Y$ називають *ізометрією*, якщо для довільного $x \in X$ маємо

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

Ізометрію J називають *ізометричним ізоморфізмом*, якщо J лінійне та сюр'єктивне (якщо $R\left(J\right)$ – область значень для J, то $Y = R\left(J\right)$).

Лема 4.1 (про ізометричний ізоморфізм). *Нехай $J : X \to Y$ – ізометричний ізоморфізм нормованих просторів, тоді J є бієкцією такою, що J та J^{-1} – лінійні та обмежені відображення (J є топологічною ізометрією).*

Доведення. Лінійність та ізометричність J дає, що $\forall x_1, x_2 \in X$: $Jx_1 = Jx_2$, маємо $J(x_1 - x_2) = 0$ або

$$0 = \|J(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$$

і за означенням норми $x_1 = x_2$. Тобто J – ін'єкція, а оскільки J – сюр'єкція, виводимо, що J – бієкція. Значить, існує обернення $J^{-1} : Y \to X$. Крім того, сюр'єктивність дає, що

$$\forall y_1, y_2 \in Y : \exists x_1, x_2 \in X : Jx_1 = y_1, Jx_2 = y_2,$$

а ін'єктивність дає

$$J^{-1}Jx = x.$$

Тоді

$$J^{-1}(y_1 + y_2) = J^{-1}(Jx_1 + Jx_2) = J^{-1}J(x_1 + x_2) = \\ = x_1 + x_2 = J^{-1}y_1 + J^{-1}y_2$$

та

$$J^{-1}(\alpha y_1) = J^{-1}(\alpha J x_1) = J^{-1}J(\alpha x_1) = \alpha y_1.$$

Звідки отримаємо лінійність J^{-1}.

З рівності $\|Jx_1 - Jx_2\| = \|x_1 - x_2\|$ випливає неперервність J, а оскільки J – лінійне відображення, то і обмеженість. Більш того, $\forall y \in Y\ \exists x \in X$: $Jx = y$, тоді

$$\|J^{-1}y\| = \|J^{-1}Jx\| = \|x\| = \|Jx\| = \|y\|.$$

Тобто, одержуємо обмеженість J^{-1}. □

Нехай X та Y – простори Банаха, D – деяке лінійне різноманіття щільне в X, а $J : D \to Y$ – деяка лінійна ізометрія. Враховуючи, що область значень $R(J)$ є лінійним різноманіттям в Y, маємо, що $J : D \to R(J)$ є ізометричний ізоморфізм нормованих просторів D та $R(J)$. Зазначимо також, що замкнене лінійне різноманіття простору Банаха в свою чергу є простором Банаха.

Теорема 4.2 (про подовження ізометричного ізоморфізму). *Нехай відображення $J : D \to Y$ є деякою лінійною ізометрією, тоді існує єдиний ізометричний ізоморфізм $\tilde{J} : X \to \mathrm{cl}(R(J))$, що довизначає J на X.*

Доведення. Оскільки $J : D \to R(J)$ є ізометричним ізоморфізмом, робимо висновок, що J лінійне та обмежене відображення, і за теоремою про подовження обмеженого лінійного відображення існує єдине лінійне обмежене довизначення відображення на X, задане як

$$\tilde{J}f = \lim_{n\to\infty} Jf_n,$$

де $f_n \in D$: $f_n \to f$, та $\tilde{J}|_D = J$. Враховуючи ізометричність J та неперервність норми, отримаємо

$$\|\tilde{J}f\| = \lim_n \|Jf_n\| = \lim_n \|f_n\| = \|f\|.$$

Тобто, відображення $\tilde{J}$ – це також ізометрія.

Покажемо, що $\tilde{J} : X \to \mathrm{cl}(R(J))$ є сюр'єкція. За лемою про ізометричний ізоморфізм існує обмежене лінійне відображення

$$J^{-1} : R(J) \to X,$$

і за теоремою про подовження обмеженого лінійного відображення

$$\exists! \widetilde{J^{-1}} : \mathrm{cl}(R(J)) \to X : \widetilde{J^{-1}}|_{R(J)} = J^{-1}.$$

Оскільки $\tilde{J}|_D = J$, маємо $\widetilde{J^{-1}}\tilde{J}|_D = J^{-1}J$ – тотожне відображення D на D. Тотожне перетворення є лінійним та неперервним на D, а значить однозначно може бути довизначено на X, причому це довизначення буде також тотожнім. Отже, $\widetilde{J^{-1}}\tilde{J}$ є тотожне перетворення на X. Аналогічно $\tilde{J}\widetilde{J^{-1}}$ також тотожне на $\mathrm{cl}(R(J))$, а значить $\widetilde{J^{-1}} = \left(\tilde{J}\right)^{-1}$. Оскільки $\widetilde{J^{-1}}$ лінійне та обмежене, то $\left(\tilde{J}\right)^{-1}$ – лінійне неперервне відображення.

Нехай $g \in \mathrm{cl}(R(J))$, тоді $\exists f_n \in D$: $Jf_n \to g$. Враховуючи що $\tilde{J}|_D = J$, з подання $f_n = \left(\tilde{J}\right)^{-1}\left(\tilde{J}f_n\right)$ маємо $f_n = \left(\tilde{J}\right)^{-1}(Jf_n)$, і внаслідок неперервності $\left(\tilde{J}\right)^{-1}$ отримаємо $f_n \to \left(\tilde{J}\right)^{-1} g$. Оскільки X – простір Банаха, існує $f \in X$: $f_n \to f$, тобто, $f = \left(\tilde{J}\right)^{-1} g$ або $g = \tilde{J}f$, що доводить сюр'єктивність $\tilde{J}$. $\square$

Нехай $\{\Lambda, \mathfrak{S}, \nu\}$ – деякий простір з мірою, H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$. Позначимо

$$\mathfrak{S}_0 = \{A \in \mathfrak{S} : \nu(A) < \infty\}$$

і відмітимо, що з властивостей міри випливає, що цей клас множин є кільцем (вправа).

Визначення. Відображення $\zeta : \mathfrak{S}_0 \to H$ називають *ортогональною мірою*, якщо
$$\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_0 : (\zeta(A_1), \zeta(A_2)) = \nu(A_1 \cap A_2).$$
При цьому міру ν називають *структурною* для ζ.

Вправа 4.1. Показати, що якщо ортогональні міри ζ_1 та ζ_2 мають однакову структурну міру ν, то

$$\forall A \in \mathfrak{S}_0 : \zeta_1(A) = \zeta_2(A), \ \nu \text{ м.у.}$$

Зауважимо, що обмеження області визначення класом $\mathfrak{S}_0$ зумовлене тим, що
$$\|\zeta(A)\|^2 = (\zeta(A), \zeta(A)) = \nu(A)$$
і відповідно приналежність $\zeta(A)$ до H можемо гарантувати лише, якщо $\nu(A) < \infty$. Слово "ортогональна" в назві виправдано тим, що для довільних несумісних множин $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_0$:

$$(\zeta(A_1), \zeta(A_2)) = 0.$$

А слово "міра" можна пояснити тим, що

$$\|\zeta(\emptyset)\|^2 = \nu(\emptyset) = 0,$$

а значить, $\zeta(\emptyset) = 0$, а також для довільних несумісних множин $A_i \in \mathfrak{S}_0$: $A = \vee_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{S}_0$ маємо

$$\|\zeta(A) - \sum_{i=1}^{N} \zeta(A_i)\|^2 = \left(\zeta(A) - \sum_{i=1}^{N} \zeta(A_i), \zeta(A) - \sum_{j=1}^{N} \zeta(A_j)\right) =$$
$$= (\zeta(A), \zeta(A)) - \sum_{j=1}^{N} (\zeta(A), \zeta(A_j)) - \sum_{i=1}^{N} (\zeta(A_i), \zeta(A)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{N} (\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \nu(A) - \sum_{j=1}^{N} \nu(A_j) - \sum_{i=1}^{N} \nu(A_i) + \sum_{i=1}^{N} \nu(A_i).$$

Оскільки ν – міра, то

$$\sum_{i=1}^{N} \nu(A_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \nu(A)$$

та

$$\zeta(\vee_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(A_i),$$

де ряд розуміємо в сенсі збіжності за нормою в просторі H.

Вправа 4.2. Показати, що для довільних $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_0$:

1. $\zeta(A_1 \cup A_2) = \zeta(A_1) + \zeta(A_2)$, якщо $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
2. $\|\zeta(A_1) - \zeta(A_2)\|^2 = \nu(A_1 \Delta A_2)$;
3. $\zeta(A_2 \backslash A_1) = \zeta(A_2) - \zeta(A_1)$, $\|\zeta(A_1)\| \le \|\zeta(A_2)\|$ та $\|\zeta(A_2) - \zeta(A_1)\|^2 = = \nu(A_2) - \nu(A_1)$, якщо $A_1 \subset A_2$;
4. $\zeta(A_1 \cup A_2) = \zeta_1(A_1) + \zeta(A_2) - \zeta(A_1 \cap A_2)$.

Визначимо інтеграл за ортогональною мірою. Позначимо через $L_2(\Lambda) = L_2(\Lambda, \mathfrak{S}, \nu)$ простір комплексних функцій таких, що

$$\|f\| = \|f\|_{L_2(\Lambda)} = \sqrt{\int_\Lambda |f|^2 \, d\nu} < \infty,$$

на якому визначимо скалярний добуток

$$\langle f, g \rangle = \int_\Lambda f \bar{g} d\nu.$$

Визначимо спочатку інтеграл на множині S_2^0 – простих $\mathfrak{S}_0$-вимірних функцій. Тобто функцій f, які можна подати як

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k},$$

де $c_k \in \mathbb{C}$, $A_k \in \mathfrak{S}_0$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$. За означення інтеграла Лебега для функцій f з S_2^0:

$$\int_\Lambda f d\nu = \sum_{k=1}^{n} c_k \nu(A_k).$$

Визначимо інтеграл за ортогональною мірою аналогічно.

Нехай відображення $J : S_2^0 \to H$ задано як

$$Jf = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta(A_k).$$

Відзначимо, що це відображення не залежить від способу подання f. Якщо також маємо таке зображення$f = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}, b_j \in \mathbb{C}, B_j \in \mathfrak{S}_0$, тоді

$$f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \mathbb{1}_{A_k \cap B_j},$$

де $a_{kj} = c_k = b_j$. Звідки

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \zeta \left(A_k \cap B_j \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} \zeta \left(A_k \cap B_j \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta \left(A_k \right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \zeta \left(A_k \cap B_j \right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{k=1}^{n} \zeta \left(A_k \cap B_j \right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \zeta \left(B_j \right),$$

що вказує на коректність визначення J.

Враховуючи що $\mathfrak{S}_0$ є π-системою, застосування аналогічних міркувань дозволяє припустити, що довільні прості $\mathfrak{S}_0$-вимірні f та g визначені на однакових множинах $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ з $\mathfrak{S}_0$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k} \text{ та } g = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

Тоді

$$J \left(f + g \right) = J \left(\sum_{k=1}^{n} \left(c_k + b_k \right) \mathbb{1}_{A_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(c_k + b_k \right) \zeta \left(A_k \right) = Jf + Jg$$

та

$$J \left(\alpha f \right) = J \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha c_k \mathbb{1}_{A_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha c_k \zeta \left(A_k \right) = \alpha Jf.$$

Тобто, J є лінійним відображенням. Крім того,

$$\begin{aligned}
\left(Jf, Jg \right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \zeta \left(A_k \right), \sum_{j=1}^{n} b_j \zeta \left(A_j \right) \right) = \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{b}_j \left(\zeta \left(A_k \right), \zeta \left(A_j \right) \right) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{b}_j \nu \left(A_k \cap A_j \right) = \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{b}_j \int_{\Lambda} \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{A_j} d\nu = \int_{\Lambda} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k} \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbb{1}_{A_j} \right)} d\nu = \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

Звідки

$$\| Jf \|_H = \| f \|_{L_2(\Lambda)}.$$

Тобто, відображення $J : S_2^0 \to H$ є лінійною ізометрією і за теоремою про подовження ізометричного ізоморфізму існує єдине довизначення до ізометричного ізоморфізму

$$J : \operatorname{cl} \left(S_2^0 \right) \to H_0,$$

де $H_0 = \mathrm{cl}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k\zeta\left(A_k\right), c_k \in \mathbb{C}, A_k \in \mathfrak{S}_0, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Так визначене відображення називають інтегралом функції f за ортогональною мірою ζ і позначають також як

$$Jf = \int_{\Lambda} f d\zeta.$$

За доведеним вище маємо такі властивості інтеграла $\forall f, g \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$:

1. $\int_{\Lambda} f d\zeta \in H$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $\int_{\Lambda}\left(\alpha f + \beta g\right) d\zeta = \alpha \int_{\Lambda} f d\zeta + \beta \int_{\Lambda} g d\zeta$.
3. $\| \int_{\Lambda} f d\zeta \|^2 = \int_{\Lambda} |f|^2 d\nu$.
4. $\left(\int_{\Lambda} f d\zeta, \int_{\Lambda} g d\zeta\right) = \int_{\Lambda} f\bar{g} d\nu$.
5. Якщо $f_n \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$: $f_n \xrightarrow{L_2(\Lambda)} f$, то $\int_{\Lambda} f_n d\zeta \xrightarrow{H} \int_{\Lambda} f d\zeta$.

Теорема 4.3 (про породжену ортогональну міру вимірним відображенням)**.** *Нехай ζ – ортогональна міра, $g \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$ та визначимо відображення $\zeta^g : \mathfrak{S}_0 \to H$ та $\nu^g : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$ як*

$$\zeta^g\left(A\right) = \int_A g d\zeta = \int_{\Lambda} g \mathbb{1}_A d\zeta$$

та

$$\nu^g\left(A\right) = \int_A |g|^2 d\nu.$$

Тоді ζ^g є ортогональною мірою зі структурною мірою ν^g,

$$\forall f \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right) : \int_{\Lambda} f d\zeta^g = \int_{\Lambda} f g d\zeta.$$

Крім того, якщо $|g| > 0$ майже усюди, тоді

$$\zeta\left(A\right) = \int_A \frac{1}{g} d\zeta^g, A \in \mathfrak{S}_0.$$

Доведення. За властивостями інтеграла Лебега відображення ν^g є мірою на $\mathfrak{S}$ та $\nu^g\left(A\right) < \infty$, $\forall A \in \mathfrak{S}_0$. Більш того,

$$\left(\zeta^g\left(A_1\right), \zeta^g\left(A_2\right)\right) = \left(\int_{\Lambda} g \mathbb{1}_{A_1} d\zeta, \int_{\Lambda} g \mathbb{1}_{A_2} d\zeta\right) =$$
$$= \int_{\Lambda} |g|^2 \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} d\nu = \nu^g\left(A_1 \cap A_2\right).$$

Нехай для $f \in S_2^0$ має місце подання $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$, тоді

$$\int_\Lambda f d\zeta^g = \sum_{k=1}^n c_k \zeta^g (A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \int g \mathbb{1}_{A_k} d\zeta = \int g \sum c_k \mathbb{1}_{A_k} d\zeta = \int g f d\zeta.$$

Якщо $f \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$ та $f_n \in S_2^0$: $f_n \to f$, тоді, з однієї сторони, за неперервністю інтегралу

$$\int f_n d\zeta^g \to \int f d\zeta^g.$$

А з іншої, $\int f_n d\nu^g = \int f_n g d\nu$ та

$$\| \int f_n g d\zeta - \int f g d\zeta \|^2 = \int |f_n - f|^2 |g|^2 d\nu = \int |f_n - f|^2 d\nu^g \to 0.$$

Тобто, $fg \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$ та $\int f d\zeta^g = \int f g d\zeta$.

Якщо $\nu \{g = 0\} = 0$, визначивши $\frac{1}{g} = 0$ на $\{\lambda : g(\lambda) = 0\}$, матимемо, що м.у. $g \frac{1}{g} = 1$. Звідки

$$\int \left| \frac{1}{g} \mathbb{1}_A \right|^2 d\nu^g = \int \frac{1}{|g|^2} |g|^2 \mathbb{1}_A d\nu = \nu(A) < \infty,$$

тобто $\frac{1}{g}\mathbb{1}_A \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$ і за доведеним вище

$$\int \frac{1}{g} \mathbb{1}_A d\zeta^g = \int \frac{1}{g} \mathbb{1}_A g d\zeta = \zeta(A).$$

□

Виникає питання як співвідносяться $\mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$ та $L_2(\Lambda)$. Якщо міра ν скінченна, то безпосередньо за означеннями маємо $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}$. Для довільної $f \in L_2(\Lambda)$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність послідовність функцій $f_N = f \mathbb{1}_{\{|f| \le N\}}$, $N \in \mathbb{N}$, збігається до f в $L_2(\Lambda)$. Тобто f можна апроксимувати обмеженими функціями. Якщо f – вимірна та обмежена функція, то її можна апроксимувати простими функціями

$$f_n = \sum_{k=-2^n}^{2^n} \frac{kn}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{f \in \left[\frac{kn}{2^n}, \frac{(k+1)n}{2^n}\right)\right\}}$$

в просторі $L_1(\Lambda)$. Для обмежених функцій f з $L_1(\Lambda)$: $|f| \le N$, маємо

$$\int |f|^2 d\nu \le N \int |f| d\nu < \infty.$$

Отже, в цьому випадку $\mathrm{cl}\left(S_2^0\right) = L_2(\Lambda)$.

Нехай міра ν є σ-скінченною, тоді $\exists \Lambda_i \in \mathfrak{S}_0$: $\vee_{i=1}^{\infty} \Lambda_i = \Lambda$. Позначимо $\Delta_n = \vee_{i=1}^{n} \Lambda_i$, тоді $\Delta_n \in \mathfrak{S}_0$ та $\Delta_n \uparrow \Lambda$. Для довільної $f \in L_2(\Lambda)$ розглянемо

$$f_n = f \mathbb{1}_{\Delta_n}.$$

За доведеним вище f_n можна апроксимувати функціями з S_2^0, крім того, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\|f - f_n\|_{L_2(\Lambda)} \to 0, n \to \infty.$$

Значить, $f \in \mathrm{cl}\left(S_2^0\right)$, тобто в цьому випадку також $\mathrm{cl}\left(S_2^0\right) = L_2(\Lambda)$.

Лема 4.2 (про апроксимацію функцій з $L_2(\Lambda)$)**.** *Нехай $\{\Lambda, \mathfrak{S}, \nu\}$ – простір зі σ-скінченною мірою, $\mathcal{P} \subset \mathfrak{S}$ – деяка π-система, що породжує $\mathfrak{S}$. Визначимо клас множин*

$$\mathcal{P}_0 = \{A \in \mathcal{P} : \nu(A) < \infty\}$$

та простір простих функцій

$$S_2^0(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}, c_k \in \mathbb{C}, A_k \in \mathcal{P}_0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Якщо $\exists B_n \in \mathcal{P}_0$: $B_n \uparrow \Lambda$, тоді

$$\mathrm{cl}\left(S_2^0(\mathcal{P})\right) = L_2(\Lambda).$$

Доведення. Використаємо метод підхожих множин. Визначимо клас

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \mathfrak{S} : \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_n} \in \mathrm{cl}\left(S_2^0(\mathcal{P})\right), \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

і покажемо, що він є d-системою. По-перше, множина $\Lambda \in \mathfrak{S}$ та

$$\mathbb{1}_\Lambda \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_{B_n} \in S_2^0(\mathcal{P}),$$

тобто $\Lambda \in \mathcal{D}$. По-друге, $\forall A, B \in \mathcal{D}$: $A \subset B$ маємо

$$\mathbb{1}_{B \setminus A} \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n} - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_n} \in \mathrm{cl}\left(S_2^0(\mathcal{P})\right).$$

По-третє, для довільних несумісних $A_i \in \mathcal{D}$ позначимо $A = \vee_{i=1}^{\infty} A_i$. Враховуючи, що $\nu(B_n) < \infty$, виводимо

$$\left\| \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{L_2(\Lambda)} = \int_\Lambda \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{B_n} d\nu = \nu\left(B_n \cap \left(\vee_{k=m}^{\infty} A_k\right)\right) \to 0, m \to \infty.$$

Звідки випливає, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{B_n} \in \mathrm{cl}\left(S_2^0(\mathcal{P})\right),$$

крім того, несумісність A_i дає

$$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{B_n},$$

тобто $A \in \mathcal{D}$.

Враховуючи що $\mathcal{P}$ є π-системою, маємо $\forall B \in \mathcal{P}$: $B \cap B_n \in \mathcal{P}_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, тоді

$$\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_{B \cap B_n} \in S_2^0 (\mathcal{P}) \,.$$

Тобто $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ і за наслідком про монотонний клас

$$\mathfrak{S} = \sigma (\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}.$$

Значить, для довільної $f \in L_2 (\Lambda)$ відображення $f \mathbb{1}_{B_n} \in \operatorname{cl} \left(S_2^0 (\mathcal{P}) \right)$. Крім того, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\| f - f \mathbb{1}_{B_n} \| \to 0, n \to \infty.$$

Звідки $f \in \operatorname{cl} \left(S_2^0 (\mathcal{P}) \right)$ і, враховуючи повноту простору $L_2 (\Lambda)$, $\operatorname{cl} \left(S_2^0 (\mathcal{P}) \right) \subset L_2 (\Lambda)$. Отже, $\operatorname{cl} \left(S_2^0 (\mathcal{P}) \right) = L_2 (\Lambda)$. $\square$

Цей результат дозволяє обґрунтувати такий спосіб побудови ортогональної міри. Виберемо деяке напівкільце $\mathcal{N} \subset \mathfrak{S}$, що породжує $\mathfrak{S}$. Визначимо сім'ю $\{\zeta (A) \,, A \in \mathcal{N}\}$ елементів з H так, щоб

$$(\zeta (A_1) \,, \zeta (A_2)) = \nu (A_1 \cap A_2) \,,$$

де ν – деяка невід'ємна зліченно адитивна функція множин з $\mathcal{N}$:

$$\nu (\emptyset) = 0 \text{ та } \exists B_n \in \mathcal{N} : B_n \uparrow \Lambda : \nu (B_n) < \infty.$$

За теоремою про продовження міри з напівкільця існує єдине довизначення ν до σ-скінченної міри на $\mathfrak{S}$, за лемою про апроксимацію функцій з $L_2 (\Lambda)$ маємо $\operatorname{cl} \left(S_2^0 (\mathcal{N}) \right) = L_2 (\Lambda)$, і за теоремою про подовження ізометричного ізоморфізму однозначно визначений ізометричний ізоморфізм

$$J : L_2 (\Lambda) \to H_0 (\mathcal{N}) \,,$$

де

$$H_0 (\mathcal{N}) = \operatorname{cl} \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta (A_k) \,, c_k \in \mathbb{C}, A_k \in \mathcal{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

– підпростір H. Крім того, $\forall A \in \mathfrak{S}_0$:

$$\int_\Lambda |\mathbb{1}_A|^2 \, d\nu = \nu (A) < \infty,$$

тобто $\mathbb{1}_A \in L_2(\Lambda)$ і за теоремою про породжену ортогональну міру вимірним відображенням коректно визначена ортогональна міра

$$\tilde{\zeta}(A) = J(\mathbb{1}_A),$$

причому за побудовою відображення J маємо, що $\tilde{\zeta}(A) = \zeta(A)$, $\forall A \in \mathcal{N}$. Більш того, для довільних $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_0$:

$$\left(\tilde{\zeta}(A_1), \tilde{\zeta}(A_2)\right) = (J(\mathbb{1}_{A_1}), J(\mathbb{1}_{A_2})) = \langle \mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2} \rangle = \nu(A_1 \cap A_2).$$

Отже, за означенням відображення $\tilde{\zeta} : \mathfrak{S}_0 \to H$ є ортогональною мірою зі структурною мірою ν, яка однозначно довизначає ζ.

Приклад (ортогональна міра, породжена функцією з ортогональними приростами)**.** Нехай $\Lambda = \mathbb{R}_+$, $\mathfrak{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ та $\mathcal{N} = \{[a,b), 0 \le a \le b\}$, і розглянемо деяке відображення $Z : \Lambda \to H$ неперервне зліва з ортогональними приростами:

$$\forall \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 : (Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_2}, Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}) = 0.$$

Визначимо за допомогою Z ортогональну міру.

Зафіксуємо точку $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ і задамо функцію $F(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ як

$$F(\lambda) = \begin{cases} \|Z_\lambda - Z_{\lambda_0}\|^2, & \lambda \ge \lambda_0, \\ -\|Z_\lambda - Z_{\lambda_0}\|^2, & \lambda < \lambda_0. \end{cases}$$

Покажемо, що так визначена функція монотонно неспадна. Дійсно, візьмемо $\lambda_2 \ge \lambda_1$ і розглянемо такі випадки: 1) $\lambda_2 \ge \lambda_1 \ge \lambda_0$; 2) $\lambda_2 \ge \lambda_0 > \lambda_1$; 3) $\lambda_0 > \lambda_2 \ge \lambda_1$. Внаслідок ортогональності приростів функції Z у випадку 1) маємо

$$F(\lambda_2) = \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_0}\|^2 = \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1} + Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2 = \\ = \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}\|^2 + \|Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2 \ge F(\lambda_1).$$

У випадку 2)

$$F(\lambda_2) - F(\lambda_1) = \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_0}\|^2 + \|Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2 = \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}\|^2 \ge 0.$$

І у випадку 3)

$$F(\lambda_1) = -\|Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2 = -\|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_0} + Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2}\|^2 = \\ = -\|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_0}\|^2 - \|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}\|^2 \le F(\lambda_2).$$

Крім того, для $\lambda_0 \le \lambda_1$ маємо

$$\lim_{\lambda\uparrow\lambda_1} F(\lambda) = \lim_{\lambda\uparrow\lambda_1} \|Z_\lambda - Z_{\lambda_0}\|^2 =$$
$$= \lim_{\lambda\uparrow\lambda_1} \left(\|Z_\lambda - Z_{\lambda_1}\|^2 + \|Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2\right) = \|Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_0}\|^2 = F(\lambda_1).$$

Аналогічно для $\lambda_0 \geq \lambda_1$. Тобто, $F(\lambda)$ є також неперервною зліва, і значить, визначає міру Лебега-Стільт'єса ν на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$:

$$\nu[\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Розглянемо сім'ю $\{\zeta(A), A \in \mathcal{N}\}$ елементів з H, визначених рівністю

$$\zeta[\lambda_1, \lambda_2) = Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}.$$

Внаслідок ортогональності приростів $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{N}$:

$$(\zeta(A_1), \zeta(A_2)) = \nu(A_1 \cap A_2),$$

тобто ця сім'я однозначно задає ортогональну міру $\tilde{\zeta}$ на $\mathfrak{S}_0$:

$$\tilde{\zeta}[\lambda_1, \lambda_2) = Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}.$$

Оскільки $\nu[0, n) = F(n) - F(0) < \infty$ та $[0, n) \uparrow \mathbb{R}_+$, маємо що для довільної квадратично інтегровної функції f на $\mathbb{R}_+$ визначений інтеграл за ортогональною мірою $\tilde{\zeta}$, який також називають інтегралом за функцією з ортогональними значеннями і позначають також як

$$\int_\Lambda f dZ.$$

Основний інтерес в рамках теорії випадкових процесів являє випадок, коли

$$H = L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}).$$

Тобто, коли $\forall A \in \mathfrak{S}_0$: $\zeta(A) = \zeta(A, \omega)$ є квадратично інтегровною в.в. В цьому випадку ортогональну міру ζ називають випадковою (о.в.м.). Часто для зручності вважають, що о.в.м. центрована: $\mathsf{E}\zeta(A) = 0$, $\forall A \in \mathfrak{S}_0$. Ця умова не є обмежувальною, можна перебудувати ймовірнісний простір так, щоб вона була виконана.

Вправа 4.3. Нехай ζ – о.в.м. зі структурною мірою ν. Визначимо деякий імовірнісний простір $\{\Omega', \mathcal{F}', \mathsf{P}'\}$, на якому задамо в.в. $\xi = \xi(\omega')$ з середнім 0 та дисперсією 1. Розглянемо простір

$$\left\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}}\right\} = \{\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathsf{P} \otimes \mathsf{P}'\}$$

і на цьому просторі визначимо

$$\tilde{\zeta}(A) = \tilde{\zeta}(A, \tilde{\omega}) = \zeta(A, \omega)\,\xi(\omega'),$$

де $\tilde{\omega} = (\omega, \omega')$ та $A \in \mathfrak{S}_0$. Показати, що $\tilde{\zeta}$ є центрованою о.в.м. зі структурною мірою ν.

З властивостей ортогональної міри випливає, що для о.в.м. ζ маємо $\zeta(\emptyset) = 0$ м.н. та $\zeta(\vee_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(A_i)$ м.н., для довільних несумісних множин $A_i \in \mathfrak{S}_0$: $\vee_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{S}_0$. Але це не означає, що $\zeta(\cdot)$ є випадковою мірою на $\mathfrak{S}_0$. Множина тих ω, для яких має місце властивість зліченної адитивності, може залежати від множин A_i, і значить, не обов'язково м.н. злічена адитивність матиме місце для всіх таких послідовностей одночасно.

Приклад (спектральна декомпозиція процесу простору L_2)**.** Нехай ζ – деяка о.в.м. зі структурною мірою ν, тоді інтеграл за ζ для деякої сім'ї функцій $\{f_t, t \geq 0\}$ з простору $L_2(\Lambda)$ визначає в.п.

$$X_t = \int_\Lambda f_t d\zeta, t \geq 0.$$

Причому за властивостями цього інтегралу

$$\mathsf{E} X_t = 0$$

та

$$\gamma_{st} = \mathsf{E} X_s \bar{X}_t = \int_\Lambda f_s \bar{f}_t d\nu.$$

Покажемо, що має місце і зворотний результат: якщо коваріаційна функція γ_{st} центрованого квадратично інтегровного процесу $\{X_t, t \geq 0\}$ може бути подана як

$$\gamma_{st} = \int_\Lambda f_s \bar{f}_t d\nu,$$

де $\{f_t(\lambda), t \geq 0\}$ утворюють повний базис простору $L_2(\Lambda)$, то існує о.в.м. ζ зі структурною мірою ν така, що $X_t = \int_\Lambda f_t d\zeta$.

Дійсно, визначимо відображення V на множині

$$S_2^0(\{f_t\}) = \left\{ g = \sum_{k=1}^{n} c_k f_{t_k}, c_k \in \mathbb{C}, t_k \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

як $V(g) = \sum_{k=1}^n c_k X_{t_k}$. Відзначимо, що це означення не залежить від способу подання g. Якщо $g = \sum_{k=1}^n c_k f_{t_k} = 0$ м.у. за мірою ν, то

$$\|V(g)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{c}_j \gamma_{t_k t_j} = \sum_{k,j=1}^{n} c_k \bar{c}_j \int_\Lambda f_{t_k} \bar{f}_{t_j} d\nu =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} c_k f_{t_k}\|^2_{L_2(\Lambda)} = \|g\|^2_{L_2(\Lambda)} = 0.$$

Враховуючи лінійність V, якщо $\sum_{k=1}^n c_k f_{t_k} = \sum_{j=1}^m b_j f_{s_j}$, то м.н.

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_{t_k}\right) = V\left(\sum_{j=1}^{m} b_j f_{s_j}\right).$$

Крім того, аналогічні міркування вказують що V – ізометрія, і за теоремою про подовження ізометричного ізоморфізму її можна довизначити до лінійної ізометрії на $L_2(\Lambda)$ (за рахунок повноти сім'ї функцій $\{f_t, t \geq 0\}$) зі значеннями в підпросторі

$$H_0(X) = \mathrm{cl}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}, c_k \in \mathbb{C}, t_k \geq 0, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Задамо відображення ζ на $\mathfrak{S}_0$ як

$$\zeta(A) = V(\mathbb{1}_A),$$

тоді ізометричність V дає, що

$$(\zeta(A_1), \zeta(A_2)) = (V(\mathbb{1}_{A_1}), V(\mathbb{1}_{A_2})) = \langle \mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2}\rangle = \nu(A_1 \cap A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_0,$$

і значить, ζ є о.в.м. зі структурною мірою ν. Оскільки $\zeta(A) \in H_0(X)$ – замиканню лінійних комбінацій в.в. з нульовим середнім, о.в.м. ζ центрована. За означенням ζ та лінійністю V для простих функцій $h = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}$ отримаємо

$$V(h) = \sum_{k=1}^{n} c_k V(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta(A_k) = \int_\Lambda h d\zeta.$$

Для довільної $h \in L_2(\Lambda)$ існує послідовність простих h_n збіжних до h і за рахунок неперервності ізометричних ізоморфізмів

$$V(h) = \mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} V(h_n) = \mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_\Lambda h_n d\zeta = \int_\Lambda h d\zeta.$$

Отже, за означенням V для процесу $\{X_t, t \geq 0\}$ одержуємо подання

$$X_t = V(f_t) = \int_\Lambda f_t d\zeta.$$

Відмітимо, що умову повноти сім'ї функцій $\{f_t, t \geq 0\}$ можна опустити при цьому відповідне подання можливе на розширенні ймовірнісного простору[27].

Вправа 4.4. Показати, що сім'я функцій $\left\{f_t(\lambda) = e^{\imath\lambda t}, t \geq 0, \lambda \geq 0\right\}$ є повною в $L_2[0, \infty)$.

Важливим способом побудови о.в.м. на $\mathbb{R}_+$ є застосування процесів з ортогональними приростами. Нехай $\{\Lambda, \mathfrak{S}\} = \{\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ та $\{Z_\lambda, \lambda \geq 0\}$ – центрований процес неперервний зліва в с.кв. та некорельованими

[27] Див., наприклад, Глава VII, Теорема 3 в *Ширяев А.Н., Булинський А.В.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.

приростами, тоді існує єдина центрована о.в.м. ζ, задана на обмежених борелевих множинах, така що

$$\zeta[\lambda_1, \lambda_2) = Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}, \forall 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2.$$

Крім того,

$$F(\lambda) = \mathsf{E}\left|Z_\lambda - Z_0\right|^2$$

визначає функцію розподілу на $\mathbb{R}_+$ з відповідною мірою Лебега-Стільт'єса ν, яка є структурною для ζ. Якщо необхідно побудувати о.в.м. з наперед заданою структурною мірою, можемо діяти так. Нехай $\{\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \nu\}$ – простір з мірою Лебега-Стільт'єса, тоді $F(\lambda) = \nu[0, \lambda)$ задає функцію розподілу на $\mathbb{R}_+$. Задамо процес Гаусса $\{Z_\lambda, \lambda \ge 0\}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$\gamma(\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_1) \wedge F(\lambda_2),$$

тоді $\forall 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$:

$$\operatorname{cov}(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_2}, Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}) = \gamma(\lambda_3, \lambda_2) - \gamma(\lambda_2, \lambda_2) - \gamma(\lambda_3, \lambda_1) + \gamma(\lambda_2, \lambda_1) = 0$$

та

$$\mathsf{E}\left|Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}\right|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Звідки отримаємо, що Z є процесом з некорельованими приростами та є неперервний зліва і відповідна о.в.м. має структурну міру ν.

Вправа 4.5. Нехай $\{N_t, t \ge 0\}$ – простий процес Пуассона з інтенсивністю $\alpha > 0$. Показати, що

$$\{Z_\lambda = N_\lambda - \alpha\lambda, \lambda \ge 0\}$$

– процес з ортогональними приростами та знайти структурну міру відповідної о.в.м.

Вправа 4.6. Нехай ζ – о.в.м. така, що

$$\zeta[\lambda_1, \lambda_2) = W_{\lambda_2} - W_{\lambda_1}, \forall 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_0,$$

де $\{W_\lambda, \lambda \in [0, \lambda_0]\}$ – стандартний процес Вінера. Показати, що м.н. відображення $\zeta(\cdot, \omega)$ не є зарядом на $\mathcal{B}([0, \lambda_0])$.

Для довільної $g \in L_2[0, \infty)$ визначена в.в.

$$\int_{[0,\infty)} g dZ,$$

яку називають *стохастичним інтегралом* (або інтегралом Бохнера-Вінера) детермінованої функції g за процесом Z. Якщо, $g \in L_2[0, t]$, $\forall t \ge 0$, тоді $g\mathbb{1}_{[0,t]} \in L_2[0, \infty)$ та визначений інтеграл $\int_{[0,\infty)} g\mathbb{1}_{[0,t]} dZ$, який позначають як $\int_0^t g dZ$ і називають невизначеним стохастичним інтегралом.

Вправа 4.7. Нехай $\{Z_\lambda, \lambda \geq 0\}$ – центрований процес неперервний зліва в с.кв. та некорельованими приростами, відповідна о.в.м. якого має скінченну структурну міру. Показати, що процес

$$X_t = \int_{[0,\infty)} e^{\imath\lambda t} dZ_\lambda, t \geq 0,$$

є центрованим неперервним в с.кв. стаціонарним у широкому сенсі.

Вправа 4.8. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з інтенсивністю 1 зі стрибками в моменти $\{\tau_n\}$, $\bar{N}_t = N_t - t$ – компенсований процес. Показати, що цей процес задає о.в.м. ζ на обмежених борелевих множинах з $\mathbb{R}_+$ зі структурною мірою – мірою Лебега ℓ. Довести, що $\forall g \in L_2\,[0,t]$:

$$\int_0^t g d\bar{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}: \tau_n \leq t} g\,(\tau_n) - \int_0^t g\,(s)\,ds.$$

Приклад (лінійний фільтр для стаціонарного процесу)**.** Нехай $\{Z_\lambda, \lambda \geq 0\}$ – центрований процес неперервний зліва в с.кв. та некорельованими приростами, відповідна о.в.м. якого має скінченну структурну міру. Функція $\tilde{\Phi}_t$ така, що

$$\int_0^t \left|\tilde{\Phi}_u\right| du < \infty, \forall t \geq 0.$$

Покажемо, що процес

$$Y_t = \int_0^t \tilde{\Phi}_{t-u} X_u du,$$

де $X_t = \int_{[0,\infty)} e^{\imath\lambda t} dZ_\lambda$, $t \geq 0$, є центрованим стаціонарним у широкому сенсі.

Покажемо, що так визначений процес є квадратично інтегровний:

$$\mathsf{E}\left|Y_t\right|^2 = (Y_t, Y_t) = \int_0^t \int_0^t \tilde{\Phi}_{t-u} \overline{\tilde{\Phi}_{t-v}}\,(X_u, X_v)\,dudv \leq$$

$$\leq \nu[0,\infty) \left(\int_0^t \left|\tilde{\Phi}_u\right| du\right)^2 < \infty.$$

Цей процес можна подати в такій формі

$$Y_t = \int_0^t \tilde{\Phi}_{t-u} \int_0^\infty e^{\imath\lambda u} dZ_\lambda du = \int_0^\infty e^{\imath\lambda t} \Phi_\lambda dZ_\lambda,$$

де $\Phi_\lambda = \int_0^t e^{-\imath\lambda u} \tilde{\Phi}_u du$. За теоремою про породжену ортогональну міру вимірним відображенням з цього співвідношення випливає, що

$$Y_t = \int_0^\infty e^{\imath\lambda t} dZ_\lambda^\Phi,$$

де $\left\{Z_\lambda^\Phi, \lambda \geq 0\right\}$ – процес з некорельованими приростами, відповідна о.в.м. якого має структурну міру

$$\nu^\Phi (A) = \int_A |\Phi|^2 \, d\nu.$$

Тому процес Y_t є центрований стаціонарний у широкому сенсі з коваріаційною функцією

$$\gamma_t^Y = \int_0^\infty e^{i\lambda t} |\Phi_\lambda|^2 \, d\nu.$$

В теорії обробки сигналів функцію $\tilde{\Phi}$ називають імпульсною характеристикою перетворення, а Φ – частотною.

Вправа 4.9. В умовах попереднього прикладу визначити частотну характеристику, якщо $Y_t = X_{t+t_0}$.

Позначимо $\xi_t = \int_0^t g dZ$, оскільки $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$:

$$(\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}) = \left\langle g\mathbb{1}_{(t_1,t_2]}, g\mathbb{1}_{(t_2,t_3]} \right\rangle = 0,$$

маємо що в.п. $\{\xi_t, t \geq 0\}$ має ортогональні прирости. Більш того, з центрованості Z випливає центрованість ξ. Якщо Z_t – неперервний в с.кв., тоді

$$F(\lambda) = \|Z_\lambda - Z_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

є неперервною, і значить, структурна міра ν відповідної о.в.м. також неперервна. Тоді з рівності

$$\|\xi_t - \xi_s\|^2_{L_2(\Omega)} = \|g\mathbb{1}_{(s,t]}\|^2_{L_2[0,\infty)} = \int_s^t |g|^2 \, d\nu, t \geq s,$$

випливає неперервність ξ_t в с.кв. Тобто, невизначений інтеграл Бохнера-Вінера за неперервним в с.кв. процесом з некорельованими приростами в свою чергу визначає в.п. з ортогональними приростами неперервний в с.кв.

Лема 4.3 (про знаходження невизначеного стохастичного інтегралу від неперервної функції)**.** *Нехай $g = g(s)$ – неперервна на $[0, t]$ детермінована функція, $\{t_i^n\}_{i=1}^n$ – послідовні розбиття відрізку $[0, t]$: $\max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta t_i^n \to 0$, тоді*

$$\int_0^t g dZ = \text{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i^n) \, \Delta Z_{t_i^n}.$$

Доведення. Позначимо

$$g_n(s) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i^n) \, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s),$$

і оскільки ця функція проста, за означенням інтегралу за ортогональною мірою одержуємо

$$\int_0^t g_n dZ = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(t_i^n\right) \Delta Z_{t_i^n}.$$

Розглянемо

$$\|g - g_n\|^2_{L_2[0,t]} = \int_0^t |g(s) - g_n(s)|^2 \nu(ds) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left|g(s) - g\left(t_i^n\right)\right|^2 \nu(ds) \leq \max_{i=\overline{1,n}, s\in[t_i^n, t_{i+1}^n)} \left|g(s) - g\left(t_i^n\right)\right|^2 \nu[0,t].$$

Враховуючи, що g є неперервна на $[0,t]$, а значить, і рівномірно неперервна, отримаємо що ця норма прямує до 0, коли $n \to \infty$. Звідки $g_n \stackrel{L_2[0,t]}{\longrightarrow} g$, і за неперервністю стохастичного інтегралу $\int_0^t g_n dZ \stackrel{L_2(\Omega)}{\longrightarrow} \int_0^t g dZ$. □

Теорема 4.4 (про інтегрування по частинах інтеграла Бохнера-Вінера)**.** *Нехай G – абсолютно неперервна на $\mathbb{R}_+$ функція зі щільністю g та процес з некорельованими приростами $\{Z_\lambda, \lambda \geq 0\}$ має неперервні траєкторії, тоді для довільного $t \geq 0$:*

$$\int_0^t G dZ = G(s) Z_s\big|_0^t - \int_0^t Z_s g(s)\, ds \text{ м.н.}$$

Доведення. За лемою про знаходження невизначеного стохастичного інтегралу від неперервної функції

$$\int_0^t G dZ = \text{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} G\left(t_i^n\right) \Delta Z_{t_i^n}.$$

Перепишемо $\sum_{i=0}^{n-1} G\left(t_i^n\right) \Delta Z_{t_i^n}$ як

$$G\left(t_{n-1}^n\right) Z_{t_n^n} - G\left(t_0^n\right) Z_{t_0^n} - \sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_{i+1}^n} \Delta G\left(t_i^n\right) + Z_{t_n^n} \Delta G\left(t_{n-1}^n\right).$$

Оскільки G має щільність g, виводимо

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_{i+1}^n} \Delta G\left(t_i^n\right) = \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_{i+1}^n} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(s) \right) g(s)\, ds.$$

Враховуючи, що траєкторії процесу Z неперервні, маємо $\sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_{i+1}^n} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(s) \to Z_s$ рівномірно для довільного ω, і оскільки g інтегровна, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримаємо

$$\int_0^t \left(\sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_{i+1}^n} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(s) \right) g(s)\, ds \to \int_0^t Z_s g(s)\, ds.$$

І залишилось зазначити, що границя в с.кв. збігається м.н. з границею з імовірністю 1, якщо обидві границі існують. $\square$

Розглянемо окремо стохастичний інтеграл за процесом Вінера, який будемо називати *інтегралом Вінера.* Якщо функція g_n проста і її можна подати як $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}$, де $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, тоді за означенням стохастичного інтегралу

$$\int_{[0,\infty)} g_n dW = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Delta W_{t_i}.$$

Тобто цей інтеграл як сума незалежних нормально розподілених в.в. має нормальний розподіл з середнім 0 та дисперсією

$$\sum_{i=0}^{n-1} |c_i|^2 \Delta t_i = \int_0^\infty |g_n(t)|^2 dt = \|g_n\|^2_{L_2[0,\infty)}.$$

За лемою про апроксимацію функцій з $L_2(\Lambda)$ для довільної $g \in L_2[0,\infty)$ існує послідовність простих функцій виду $g_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}$: $\|g - g_n\|_{L_2[0,\infty)} \to 0$, крім того,

$$\int_{[0,\infty)} g dW = \text{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} g_n dW.$$

Зі збіжності в с.кв. випливає збіжність за розподілом, і за теоремою Леві неперервності маємо, з однієї сторони,

$$\mathsf{E} \exp\left\{\imath\alpha \int_{[0,\infty)} g_n dW\right\} \to \mathsf{E} \exp\left\{\imath\alpha \int_{[0,\infty)} g dW\right\}.$$

А з іншої,

$$\mathsf{E} \exp\left\{\imath\alpha \int_{[0,\infty)} g_n dW\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\|g_n\|^2\right\} \to \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\|g\|^2\right\}.$$

Звідки отримаємо

$$\mathsf{E} \exp\left\{\imath\alpha \int_{[0,\infty)} g dW\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\|g\|^2\right\},$$

і робимо висновок, що $\int_{[0,\infty)} g dW$ має нормальний розподіл з середнім 0 та дисперсією $\|g\|^2$.

Теорема 4.5 (про гауссовість невизначеного інтеграла Вінера). *Нехай функція $g \in L_2[0,t]$, $\forall t \ge 0$, тоді в.п.*

$$\xi_t = \int_0^t g dW, t \ge 0,$$

є центрованим процесом Гаусса з коваріаційною функцією

$$\gamma_\xi(s,t) = \int_0^{s\wedge t} |g(u)|^2 \, du.$$

Доведення. Візьмемо довільні $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ і доведемо нормальність вектора $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_m})$. Для цього достатньо показати, що $\forall c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ сума $\sum_{i=1}^m c_i \xi_{t_i}$ має нормальний розподіл. Враховуючи лінійність інтегралу Вінера, цю суму можемо переписати як $\int_{[0,\infty)} f dW$, де $f = \sum_{i=1}^m c_i g \mathbb{1}_{[0,t_i]}$. Оскільки

$$\int_0^\infty |f|^2 \, dt = \sum_{i,j=1}^m c_i \bar{c}_j \int_0^\infty |g|^2 \, \mathbb{1}_{[0,t_i\wedge t_j]} dt < \infty,$$

за доведеним вище $\int_{[0,\infty)} f dW$ має нормальний розподіл. Більш того, $\mathsf{E}\xi_t = 0$ та

$$\mathsf{E}\xi_s\bar{\xi}_t = \left(\int_0^s g dW, \int_0^t g dW\right) = \left\langle g\mathbb{1}_{[0,s]}, g\mathbb{1}_{[0,t]}\right\rangle = \int_0^{s\wedge t} |g(u)|^2 \, du.$$

□

Невизначений інтеграл Вінера

$$\xi_t = \int_0^t g dW, t \geq 0,$$

можна розглядати як процес Вінера з "викривленим часом". Припустимо, що $|g(t)|^2 > 0$, $\forall t \geq 0$, тоді відображення

$$\tau_t = \inf\left\{s \geq 0 : \int_0^s |g(u)|^2 \, du = t\right\}$$

є бієкцією, крім того,

$$\tau_t^{-1} = \int_0^t |g(u)|^2 \, du.$$

Визначимо $\tilde{W}_t = \xi_{\tau_t}$, внаслідок властивостей інтеграла Вінера маємо, що цей процес є центрованим процесом Гаусса з $\tilde{W}_0 = 0$ м.н. та коваріаційною функцією

$$\int_0^{\tau_t\wedge\tau_s} |g(u)|^2 \, du = t \wedge s.$$

Тобто, $\left\{\tilde{W}_t, t \geq 0\right\}$ визначає деякий процес Вінера, більш того, $\xi_t = \tilde{W}_{\tau_t^{-1}}$.

Завдання 17. *Нехай $\{\xi_t, t \geq 0\}$ – центрований процес Гаусса з некорельованими приростами. Показати, що можливо на розширеному ймовірнісному просторі існує процес Вінера $\left\{\tilde{W}_t, t \geq 0\right\}$ і детермінована функція τ_t, що $\xi_t = \tilde{W}_{\tau_t}$, $t \geq 0$.*

Приклад (подання процесу Оренштейна-Уленбека в термінах інтегралу Вінера)**.** Нехай $g(u) = e^{\alpha u}$, де $\alpha > 0$, тоді $g \in L_2[0, t]$, $\forall t \geq 0$, та визначений інтеграл Вінера $\int_0^t g dW$, що є центрованим процесом Гаусса з коваріаційною функцією

$$\int_0^{s \wedge t} e^{2\alpha u} du = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha(s \wedge t)} - 1\right).$$

Нехай в.в. $\xi_0 \sim N(0, 1)$ незалежна від $\{W_t, t \geq 0\}$, тоді

$$X_t = \xi_0 e^{-\alpha t} + \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW$$

є центрований процес Гаусса з коваріаційною функцією

$$\gamma_X(s, t) = e^{-\alpha(t+s)} + e^{-\alpha(t+s)}\left(e^{2\alpha(s \wedge t)} - 1\right) = e^{-\alpha|t-s|}.$$

З цього подання, зокрема, випливає стаціонарність X у широкому сенсі. Більш того, для X маємо таке подання

$$X_t = \xi_0 e^{-\alpha t} + \tilde{W}_{(1-e^{-2\alpha t})},$$

де $\left\{\tilde{W}_t, t \geq 0\right\}$ – деякий процес Вінера.

Відмітимо, що за теоремою про інтегрування по частинах інтеграла Бохнера-Вінера для неперервно диференційовних функцій g маємо

$$\int_0^t g dW = g_t W_t - \int_0^t W_s g_s' ds \text{ м.н.},$$

де останній інтеграл можна розуміти в термінах збіжності з імовірністю 1. Отримане співвідношення можна застосувати як означення невизначеного стохастичного інтеграла за процесом Вінера, проте такий підхід не є ефективний, якщо спробуємо розширити множину підінтегральних функцій до деяких функціоналів, залежних від траєкторій процесу Вінера.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера. Показати, що $\left\{W_t^2 - t, t \geq 0\right\}$ – процес з ортогональними приростами та знайти структурну міру відповідної о.в.м.

2. Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – процес Вінера, функції g_1, $\ldots$, $g_n \in L_2[0, \infty)$. Показати, що вектор з елементами $\int_{\mathbb{R}_+} g_i dW$, $i = \overline{1, n}$, – нормальний. Знайти середнє та коваріаційну матрицю цього вектора.

3. Знайти $\mathsf{E}\left(\int_0^2 s dW \times \int_0^1 W_s ds\right)$.

4. Нехай $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ – процес з ортогональними приростами та структурною мірою ν, f – монотонно неспадна функція на $\mathbb{R}_+$. Показати, що процес $\left\{X_\lambda = Z_{f(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{R}_+\right\}$ має ортогональні прирости. Знайти структурну міру відповідної о.в.м.

5. Нехай $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ – в.п. з ортогональними приростами, структурна міра якого є мірою Лебега. Знайти $\mathsf{E}\left(\int_0^3 (\lambda+2)\, dZ \times \overline{\int_0^2 \lambda^2 dZ}\right)$.

4.2. Інтеграл Іто

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір з повною неперервною справа фільтрацією, на якому заданий процес Вінера $\{W_t, t \geq 0\}$ відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, тобто процес Вінера узгоджений з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}$ та приростами $W_{t+h} - W_t$ незалежними від $\mathcal{F}_t$, $t, h > 0$. Визначимо інтеграл Іто спочатку для простих в.п.

Простір S_T^2

Позначимо простір простих узгоджених (або більш точніше, опціональних) квадратично інтегровних на $[0,T]$ в.п. через S_T^2, тобто відображень

$$\xi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

таких, що існують $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$ та в.в. $\{\xi_i\}_{i=0}^n \in L_2(\Omega)$: $\xi_j \in \mathcal{F}_{t_j}$, для яких $\xi_t(\omega) = \xi_j(\omega)$, якщо $t_j \leq t < t_{j+1}$, $j = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Простір в.п. $\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$ таких, що $\xi|_{[0,T]\times\Omega} \in S_T^2$, $\forall T > 0$, позначимо через S^2.

Нехай $\xi \in S^2$ та $T > 0$, визначимо інтеграл Іто для ξ як

$$I_T(\xi) = \int_0^\infty \xi_s \mathbb{1}_{[0,T)} dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \Delta W_{t_j} + \xi_n (W_T - W_{t_n}) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \Delta W_{t_j \wedge T},$$

де $\Delta W_{t_j} = W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ – приріст процесу Вінера на j-му проміжку сталості ξ, $n = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : t_k < T\}$. Відзначимо, що замість неперервних справа простих процесів можна розглянути неперервні зліва (передбачувані) виду $\xi = \sum_{j=0}^n \xi_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}$, відповідний інтеграл Іто визначають аналогічно і позначають як $\int_0^\infty \xi_s \mathbb{1}_{(0,T]} dW_s$. Неперервність траєкторій процесу Вінера призводить до неістотності різниці в означеннях, тому в обох випадках також використовують позначення $I_T(\xi) = \int_0^T \xi_s dW_s$.

Вправа 4.10. Показати, що $I_T(\xi)$ не залежить від способу подання простого в.п. ξ і є лінійним ізометричним відображенням з S_T^2 в множину неперервних центрованих квадратично інтегровних мартингалів на $[0,T]$. Тобто, для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq s < t \leq T$ та $\xi, \eta \in S_T^2$:

1) $I_T(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha I_T(\xi) + \beta I_T(\eta)$;

2) $\mathsf{E}\left(I_T(\xi) I_T(\eta)\right) = \mathsf{E} \int_0^T \xi_u \eta_u du$;

3) $I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[0,t)}\right) = I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[0,s)}\right) + I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[s,t)}\right)$;

4) $\mathsf{E} I_T(\xi) = 0$ та $\mathsf{E}(I_T(\xi))^2 = \mathsf{E}\int_0^T \xi_u^2 du < \infty$;
5) $I_t(\xi)$ неперервне м.н. по t;
6) $\mathsf{E}(I_t(\xi)|\mathcal{F}_s) = I_s(\xi)$.

Вправа 4.11. Показати, що $\forall N, \varepsilon > 0$ та $\xi \in S_T^2$ маємо

$$\mathsf{P}\{|I_T(\xi)| > \varepsilon\} \le \frac{N}{\varepsilon^2} + \mathsf{P}\left\{\int_0^T \xi_t^2 dt > N\right\}.$$

Завдання 18. *Нехай $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність в.п. з S_T^2:*

$$\int_0^T |\xi_n(t) - \xi_m(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0, n, m \to \infty.$$

Застосовуючи нерівність з вправи 4.11, показати що

$$(I_T(\xi_n) - I_T(\xi_m))^2 \xrightarrow{P} 0, n, m \to \infty.$$

Приклад (простір квадратично інтегровних мартингалів)**.** Позначимо через LM_T^2 простір квадратично інтегровних мартингалів з неперервними справа траєкторіями. Цей простір є лінійний і на ньому можна задати скалярний добуток $(\xi, \eta) = \mathsf{E}\xi_T\eta_T$ та норму $\|\xi\| = \sqrt{\mathsf{E}\xi_T^2}$. Покажемо, що так визначений простір є гільбертовим.

Розглянемо фундаментальну послідовність $\{\xi_n\}$ з LM_T^2. За означенням $\{\xi_n(T)\} \in L_2(\Omega)$ і є фундаментальною в цьому просторі, тоді існує в.в. $\xi(T) \in L_2(\Omega)$:

$$\|\xi_n(T) - \xi(T)\|_{L_2(\Omega)} \to 0, n \to \infty.$$

Позначимо

$$\xi_t = \mathsf{E}(\xi_T|\mathcal{F}_t), t \in [0, T],$$

і, оскільки фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}$ повна та неперервна справа, для в.п. $\xi = \{\xi_t, t \in [0, T]\}$ існує модифікація $\tilde{\xi}$ з неперервними справа траєкторіями. Крім того, $\tilde{\xi}$ є квадратично інтегровний мартингал та $\|\xi_n - \tilde{\xi}\|_{LM_T^2} \to 0$, $n \to \infty$. Значить послідовність $\{\xi_n\}$ є збіжною в LM_T^2.

Нерівність Дуба для квадратично інтегровних мартингалів з неперервними справа траєкторіями дає, що $\forall \xi \in LM_T^2$:

$$\mathsf{E}\sup_{t\in[0,T]} |\xi_t|^2 \le 4\mathsf{E}|\xi_T|^2,$$

а значить, якщо $\xi_n \xrightarrow{LM_T^2} \xi$, то

$$\mathsf{E}\sup_{t\in[0,T]} |\xi_n(t) - \xi_t|^2 \to 0, n \to \infty.$$

Звідки виводимо, що можемо побудувати підпослідовність $\{n_k\}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} |\xi_{n_k}(t) - \xi_t|^2 < \infty.$$

Тоді за нерівністю Чебишева

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{P} \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |\xi_{n_k}(t) - \xi_t| \geq \varepsilon \right\} < \infty, \forall \varepsilon > 0,$$

і за лемою Бореля-Кантеллі

$$\sup_{t\in[0,T]} |\xi_{n_k}(t) - \xi_t| \to 0 \text{ м.н.}$$

Якщо ξ_n мають неперервні траєкторії, то отримаємо, що ξ_{n_k} рівномірно на $[0,T]$ з імовірністю 1 збігаються до ξ. А значить, ξ також має неперервні м.н. траєкторії. Отже, множина неперервних квадратично інтегровних мартингалів утворює замкнений підпростір простору LM_T^2.

Простір M_T^2

Інтеграл Іто як лінійну ізометрію на S_T^2 можна однозначно довизначити до ізометричного ізоморфізму певних гільбертових просторів. Позначимо через M_T^2 множину прогресивно вимірних та квадратично інтегровних на $[0,T]$ в.п., тобто відображень $\xi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\xi : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t, t \in [0,T],$$

та

$$\mathsf{E} \int_0^T \xi_s^2 ds < \infty.$$

Зі скалярним добутком

$$(\xi, \eta)_T = \mathsf{E} \int_0^T \xi_s \eta_s ds$$

та нормою

$$\|\xi\|_T = \sqrt{(\xi, \xi)_T}$$

цей простір є гільбертовим. Зазначимо також, що $S_T^2 \subset M_T^2$.

Лема 4.4 (про щільність S_T^2 в M_T^2)**.** *Для довільного в.п. ξ з M_T^2 існує послідовність простих в.п. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ з S_T^2:*

$$\|\xi - \xi_n\|_T \to 0, n \to \infty.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що множина A_1 прогресивно вимірних рівномірно обмежених в.п., тобто таких, що

$$\exists C > 0 : |\eta(t, \omega)| \le C, \forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega,$$

щільний в M_T^2. Дійсно, для $\xi \in M_T^2$ розглянемо

$$\eta_n(t) = \xi_t \mathbb{1}_{\{|\xi_t| \le n\}} + n \operatorname{sgn}(\xi_t) \mathbb{1}_{\{|\xi_t| > n\}} \in A_1,$$

тоді для майже усіх (t, ω): $\eta_n(t, \omega) \to \xi(t, \omega)$. Крім того,

$$\int_0^T |\xi_s - \eta_n(s)|^2 ds \le 2 \int_0^T \xi_s^2 ds + 2 \int_0^T \eta_n^2(s) ds \le 4 \int_0^T \xi_s^2 ds.$$

Оскільки $\mathsf{E} \int_0^T \xi_s^2 ds < \infty$, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\|\xi - \eta_n\|_T \to 0, n \to \infty.$$

Значить $M_T^2 \subset \operatorname{cl}(A_1)$.

Припустимо, що в.п. η прогресивно вимірний та рівномірно обмежений константою C, тоді в.п.

$$\eta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t-\Delta}^t \eta_s ds$$

узгоджений з $\mathcal{F}_t$, обмежений:

$$|\eta_\Delta| \le \Delta \frac{1}{\Delta} C = C,$$

та

$$|\eta_\Delta(t) - \eta_\Delta(s)| = \frac{1}{\Delta} \left| \int_{t-\Delta}^t \eta_u du - \int_{s-\Delta}^s \eta_u du \right| \le \frac{2C}{\Delta} |t - s|.$$

За властивостями інтеграла Лебега η_Δ є неперервною по Δ, тобто $\eta_\Delta(t) \to \eta_t$ м.н., якщо $\Delta \to 0$. Більш того,

$$\int_0^T |\eta_s - \eta_\Delta(s)|^2 ds \underset{\Delta \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ м.н.},$$

звідки отримаємо $\|\eta - \eta_\Delta\|_T \to 0$. Це вказує на те, що множина A_2 рівномірно обмежених неперервних узгоджених з $\mathcal{F}_t$ в.п. така, що $A_1 \subset \operatorname{cl}(A_2)$.

Припустимо, що ζ – неперервний рівномірно обмежений та узгоджений з фільтрацією в.п. на $[0, T]$ і визначимо для нього апроксимуючу послідовність так

$$\zeta_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \zeta\left(\frac{kT}{N}\right) \mathbb{1}_{\left[\frac{kT}{N}, \frac{(k+1)T}{N}\right)}(t).$$

Для довільного $N \in \mathbb{N}$ в.п. $\zeta_N \in S_T^2$ та $\zeta_N(t,\omega) \to \zeta(t,\omega)$, $\forall (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, за неперервністю ζ. Значить за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\|\zeta - \zeta_N\|_T \to 0$$

і, отже, $A_2 \subset \mathrm{cl}\left(S_T^2\right)$. А це включення остаточно дає $\mathrm{cl}\left(S_T^2\right) = M_T^2$. □

Застосовуючи цю лему, можемо визначити інтеграл Іто для в.п. з M_T^2 таким чином. Для довільної $\xi \in M_T^2$ можемо побудувати послідовність $\{\xi_n\}$ з S_T^2, що $\|\xi - \xi_n\|_T \to 0$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ інтеграл $I_T(\xi_n)$ визначений, причому $I_T(\xi_n) \in L_2(\Omega)$ та

$$\|I_T(\xi_n) - I_T(\xi_m)\|_{L_2(\Omega)} = \|I_T(\xi_n - \xi_m)\|_{L_2(\Omega)} = \|\xi_n - \xi_m\|_T \to 0.$$

Тобто $I_T(\xi_n)$ – фундаментальна послідовність в $L_2(\Omega)$. Внаслідок повноти $L_2(\Omega)$ послідовність $I_T(\xi_n)$ збігається в с.кв., при цьому отриману границю називають інтегралом Іто і позначають як

$$I_T(\xi) = \int_0^T \xi_s dW_s.$$

Покажемо, що це означення коректне, тобто не залежить від вибору апроксимуючої послідовності. Припустимо, що $\{\xi_n\}$, $\left\{\tilde{\xi}_n\right\}$ з S_T^2 та $\xi \in M_T^2$:

$$\xi_n \xrightarrow{M_T^2} \xi, \tilde{\xi}_n \xrightarrow{M_T^2} \xi,$$

і розглянемо

$$\|I_T(\xi) - \tilde{I}_T(\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{n,m\to\infty} \|I_T(\xi_n) - I_T\left(\tilde{\xi}_m\right)\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} \|\xi_n - \tilde{\xi}_m\|_T \le \lim_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\|_T + \lim_{m\to\infty} \|\xi - \tilde{\xi}_m\|_T = 0.$$

Звідки $I_T(\xi) = \tilde{I}_T(\xi)$ м.н.

Вправа 4.12. Застосовуючи властивості збіжності в с.кв., показати що для інтеграла Іто від $\xi \in M_T^2$ мають місце властивості 1)-4) та 6) з вправи 4.10.

Лема 4.5 (про однорідність інтеграла Іто за вимірним множником)**.** *Нехай* $[a,b] \subset [0,T]$, η *є* $\mathcal{F}_a$*-вимірна та обмежена,* $\xi \in M_T^2$*, тоді*

$$I_T\left(\xi\eta\mathbb{1}_{[a,b]}\right) = \eta I_T\left(\xi\mathbb{1}_{[a,b]}\right).$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\xi\eta\mathbb{1}_{[a,b]} \in M_T^2.$$

Дійсно, обмеженість та вимірність η зберігає інтегровність та вимірність ξ. Якщо $\xi \in S_T^2$, то $\xi\eta$ також належить S_T^2 і потрібну рівність одержуємо безпосереднім винесенням η з кожного доданку суми, що визначає інтеграл.

Якщо $\xi \in M_T^2$ та $\{\xi_n\}$ з S_T^2, що апроксимує ξ, тоді одержимо що

$$\|\eta\xi - \eta\xi_n\|_T \leq C\|\xi - \xi_n\|_T \to 0,$$

причому

$$\|\eta I_T\left(\xi_n \mathbb{1}_{[a,b]}\right) - \eta I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[a,b]}\right)\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[a,b]}\right) - I_T\left(\xi_n \mathbb{1}_{[a,b]}\right)\|_{L_2(\Omega)} \to 0.$$

Звідки

$$\eta I_T\left(\xi \mathbb{1}_{[a,b]}\right) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \eta I_T\left(\xi_n \mathbb{1}_{[a,b]}\right) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} I_T\left(\eta\xi_n \mathbb{1}_{[a,b]}\right) = I_T\left(\eta\xi \mathbb{1}_{[a,b]}\right).$$

$\square$

Відзначимо, що для довільного $t \in [0,T]$ інтеграл $I_t(\xi)$ є в.в., тобто $\{I_t(\xi), t \in [0,T]\}$ є сім'єю в.в., проте розгляд цієї сім'ї як в.п. пов'язана з такою проблемою: $I_t(\xi)$ визначена $\forall t \in [0,T]$ на Ω_t: $\mathsf{P}(\Omega_t) = 1$, проте $\mathsf{P}\left(\cap_{t\in[0,T]}\Omega_t\right)$ необов'язково дорівнює 1 (більш того, можливо що цей перетин має міру 0). Для подолання цієї проблеми ключовою є властивість неперервності.

Теорема 4.6 (про неперервну модифікацію інтеграла Іто). *Нехай $\xi \in M_T^2$, тоді існує неперервна з імовірністю 1 модифікація для $I_t(\xi)$. Більш того, мають місце такі нерівності:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\leq T}|I_t(\xi)| \geq a\right\} \leq \frac{1}{a^2}\|\xi\|_T^2, \forall a > 0,$$

та

$$\mathsf{E}\left(\sup_{t\leq T}|I_t(\xi)|^2\right) \leq 4\|\xi\|_T^2.$$

Доведення. Нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність з S_T^2, що апроксимує ξ. Оскільки $I_t(\xi_n)$ – неперервний по t мартингал, за теоремою Дуба про максимальні нерівності отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\leq T}|I_t(\xi_m) - I_t(\xi_n)| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|\xi_n - \xi_m\|_T^2,$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Враховуючи фундаментальність ξ_n можемо вибрати $\{\xi_{n_k}\}$: $\|\xi_{n_k} - \xi_{n_{k+1}}\|_T \leq \frac{1}{k^3}$. Позначимо

$$A_k = \left\{\sup_{t\leq T}\left|I_t(\xi_{n_k}) - I_t\left(\xi_{n_{k+1}}\right)\right| \geq \frac{1}{k^2}\right\},$$

тоді $\mathsf{P}(A_k) \le \frac{k^4}{k^6} = \frac{1}{k^2}$, і за лемою Бореля-Кантелі $\mathsf{P}\left(\overline{\lim}_k A_k\right) = 0$ або $\mathsf{P}\left(\underline{\lim}_k \bar{A}_k\right) = 1$. Тобто $\exists \Omega_0$: $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$, що

$$\forall \omega \in \Omega_0 : \exists N : \forall k > N : \omega \in \bar{A}_k.$$

Звідси випливає, що $I_t(\xi_{n_k})$ збігається рівномірно на $[0, T]$. Оскільки $I_t(\xi_{n_k})$ з імовірністю 1 неперервна, виводимо що $I_t(\xi)$ має м.н. неперервну модифікацію. Нерівності в умові теореми безпосередньо випливають з теореми Дуба про максимальні нерівності для неперервних мартингалів. □

Завдання 19. *Позначимо через M^2 клас в.п. $\xi = \{\xi_t, t \ge 0\}$ таких, що $\xi|_{[0,T]\times\Omega} \in M_T^2$, $\forall T > 0$. Показати, що існує неперервний квадратично інтегровний мартингал $\{X_t, t \ge 0\}$: $X_t = I_t(\xi)$ та $\mathsf{E}X_t^2 = \mathsf{E}\int_0^t \xi_s^2 ds$, $\forall t \ge 0$.*

Теорема 4.7 (про властивість умовної ізометрії)**.** *Нехай $\xi \in M_T^2$ та $[a, b] \subset$ $\subset [0, T]$, тоді*

$$\mathsf{E}\left(I_T^2\left(\xi \mathbb{1}_{[a,b]}\right)|\mathcal{F}_a\right) = \mathsf{E}\left(\int_a^b \xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right).$$

Доведення. За означенням умовного математичного сподівання достатньо довести, що довільної $A \in \mathcal{F}_a$ маємо

$$\mathsf{E}\mathbb{1}_A\left(\int_a^b \xi_s dW_s\right)^2 = \mathsf{E}\mathbb{1}_A\mathsf{E}\left(\int_a^b \xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right).$$

Розглянемо спочатку праву сторону цієї рівності. За властивостями умовного математичного сподівання

$$\mathbb{1}_A\mathsf{E}\left(\int_a^b \xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right) = \mathsf{E}\left(\int_a^b \mathbb{1}_A\xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right),$$

звідки за формулою повного математичного сподівання отримаємо $\mathsf{E}\mathbb{1}_A\mathsf{E}\left(\int_a^b \xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\int_a^b \mathbb{1}_A\xi_s^2 ds|\mathcal{F}_a\right)\right) = \mathsf{E}\int_a^b (\mathbb{1}_A\xi_s)^2 ds$. Застосовуючи лему про однорідність інтеграла Іто за вимірним множником та властивість ізометрії, для лівої сторони отримаємо

$$\mathsf{E}\left(\mathbb{1}_A\int_a^b \xi_s dW_s\right)^2 = \mathsf{E}\int_a^b (\mathbb{1}_A\xi_s)^2 ds.$$

□

За теоремою про мартингальну властивість процесу Вінера $\{W_t, t \ge 0\}$ та $\left\{W_t^2 - t, t \ge 0\right\}$ є мартингалами. Функція t діє як компенсатор, який треба відняти від субмартингалу W_t^2 для того, щоб відновити мартингальну властивість (очікуване значення субмартингалу збільшується, і для того щоб отримати мартингал, необхідно відняти певну величину, яка дасть стале математичне сподівання). Аналогічний результат можемо отримати для інтегралу Іто. Оскільки $I_t(\xi)$ – мартингал, $I_t^2(\xi)$ – субмартингал, визначимо відповідний компенсатор.

Теорема 4.8 (про компенсатор інтеграла Іто). *Нехай $\xi \in M_T^2$, тоді*

$$\eta_t = I_t^2(\xi) - \int_0^t \xi_s^2 ds$$

визначає мартингал.

Доведення. Для $0 < s < t$ маємо

$$\mathsf{E}(\eta_t - \eta_s | \mathcal{F}_s) = \mathsf{E}\left(I_t^2(\xi) - I_s^2(\xi) | \mathcal{F}_s\right) - \mathsf{E}\left(\int_s^t \xi_u^2 du | \mathcal{F}_s\right).$$

Розглянемо окремо перший доданок, який можна подати як

$$\mathsf{E}\left((I_t(\xi) - I_s(\xi))^2 | \mathcal{F}_s\right) - \mathsf{E}\left(2I_s(\xi)(I_t(\xi) - I_s(\xi)) | \mathcal{F}_s\right),$$

де внаслідок мартингальної властивості другий доданок дорівнює 0, а перший за теоремою про властивість умовної ізометрії буде $\mathsf{E}\left(\int_s^t \xi_u^2 du | \mathcal{F}_s\right)$. Отже, $\mathsf{E}(\eta_t - \eta_s | \mathcal{F}_s) = 0$. □

Теорема 4.9 (про квадратичну варіацію інтегралу Іто). *Нехай $\xi \in M_T^2$, $\int_0^T \xi_s^2 ds \leq C$ та $|I_t(\xi)| \leq D$, $t \in [0, T]$, тоді квадратична варіація інтеграла Іто дорівнює $\int_0^T \xi_s^2 ds$.*

Доведення. Нехай $\{t_i\}_{i=0}^n$ – деяке послідовне розбиття відрізку $[0, T]$. Позначимо

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta I_{t_i}(\xi))^2 - \int_0^T \xi_s^2 ds$$

та

$$Y_i = (\Delta I_{t_i}(\xi))^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \xi_s^2 ds,$$

$i = \overline{0, n-1}$, і покажемо, що $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$ збігається в с.кв. до 0.

Розглянемо

$$\mathsf{E}X_n^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathsf{E}Y_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathsf{E}(Y_i Y_j)$$

і покажемо, що другий доданок нульовий. За теоремою про компенсатор інтеграла Іто в.в. Y_j є мартингал різницею, тоді для $i < j$ маємо

$$\mathsf{E}(Y_i Y_j) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(Y_i Y_j | \mathcal{F}_{t_j}\right)\right) = \mathsf{E}\left(Y_i \mathsf{E}\left(Y_j | \mathcal{F}_{t_j}\right)\right) = 0.$$

Звідки

$$\mathsf{E}X_n^2 \le 2\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^4 + 2\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds\right)^2.$$

Покажемо окремо, що обидві суми прямують до 0, якщо $n\to\infty$.

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо таку оцінку зверху

$$\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^4 \le \mathsf{E}\max_i\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2 \times \sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2 \le$$

$$\le \sqrt{\mathsf{E}\left(\max_i\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2\right)^2} \times \sqrt{\mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2\right)^2}.$$

Оскільки інтеграл Іто $I_t(\xi)$ неперервний на $[0,T]$, а значить, і рівномірно неперервний, $\max_i\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2 \to 0$, якщо $\max_i \Delta t_i \to 0$. Звідки за теоремою Лебега про мажоровану збіжність перший корінь прямує до 0, і потрібно показати обмеженість другого. Перепишемо його як

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^2\right)^2 = \mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^4 + 2\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^2\sum_{j=i+1}^{n-1}\left(\Delta I_{t_j}\right)^2.$$

Використовуючи умови теореми та теорему про властивість умовної ізометрії, одержимо таку нерівність

$$\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^4 \le \mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left|I_{t_{i+1}}(\xi)\right| + \left|I_{t_i}(\xi)\right|\right)^2\left(\Delta I_{t_i}\right)^2 \le 4D^2\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^2 =$$

$$= 4D^2\mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}\left(\left(\Delta I_{t_i}\right)^2|\mathcal{F}_{t_i}\right)\right) = 4D^2\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds|\mathcal{F}_{t_i}\right) =$$

$$= 4D^2\mathsf{E}\int_0^T \xi_s^2 ds \le 4D^2C.$$

Крім того, застосовуючи аналогічні перетворення, отримаємо

$$\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^2\sum_{j=i+1}^{n-1}\left(\Delta I_{t_j}\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^2\sum_{j=i+1}^{n-1}\mathsf{E}\left(\left(\Delta I_{t_j}\right)^2|\mathcal{F}_{t_j}\right)\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}\right)^2\int_{t_{i+1}}^T \xi_s^2 ds\right) \le C^2.$$

Отже, $\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta I_{t_i}(\xi)\right)^4 \underset{\max\Delta t_i\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Для другої суми розглянемо таку оцінку зверху

$$\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds\right)^2 \le \mathsf{E}\max_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds\times\int_0^T\xi_s^2 ds.$$

Для фіксованого $\omega\in\Omega$ в.п. ξ_s^2 інтегровний, тоді $\int_0^t\xi_s^2 ds$ рівномірно неперервний на $[0,T]$, значить, існують послідовності $\varepsilon_n\downarrow 0$ та $\delta_n\downarrow 0$ такі, що коли $\max_i\Delta t_i\le\delta_n$ маємо $\max_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds<\varepsilon_n$. Звідки

$$\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\xi_s^2 ds\right)^2\le\varepsilon_n\mathsf{E}\int_0^T\xi_s^2 ds\le C\varepsilon_n\to 0,$$

якщо $n\to\infty$. □

Як і для інтегралу Рімана від детермінованих функцій для інтегралу Іто існують окремі випадки, коли результат інтегрування можна отримати в явному вигляді. По-перше, безпосередньо з означення випливає, що коли $\xi_t(\omega)=g(t)$, де g – деяка детермінована квадратично інтегровна функція, інтеграл Іто $I_t(\xi)$ м.н. збігається з невизначеним інтегралом Вінера $\int_0^t g dW$, а значить є центрованим процесом Гаусса з коваріаційною функцією $\int_0^{s\wedge t}g^2(u)\,du$. По-друге, коли $\xi_t=f(W_t)$, де f набуває достатньо простого вигляду, можемо використати таке твердження.

Теорема 4.10 (про інтеграл Іто від неперервних в с.кв. в.п.)**.** *Нехай ξ – прогресивно вимірний та неперервний в с.кв. на $[0,T]$ в.п., тоді для $t\in[0,T]$ маємо*

$$I_t(\xi)=\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\xi_{t_i}\Delta W_{t_i},$$

де $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ – послідовне розбиття відрізку $[0,t]$: $\max\Delta t_i\to 0$.

Доведення. Розглянемо послідовність

$$\xi_n=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_{t_i}\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})},$$

яка за побудовою належить до S_T^2, тому за означенням

$$I_t(\xi_n)=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_{t_i}\Delta W_{t_i}.$$

Оскільки в.п. неперервний в с.кв. на відрізку буде рівномірно неперервним, маємо

$$\mathsf{E}\int_0^t(\xi_s-\xi_n(s))^2 ds\le t\sup_{|s-u|\le\max\Delta t_i}\mathsf{E}(\xi_s-\xi_u)^2\to 0, n\to\infty.$$

Отже, за означенням інтеграла Іто $I_t(\xi)=\mathrm{l.i.m.}I_t(\xi_n)$. □

Приклад (інтеграл Іто деяких простих функцій)**.** Безпосередньо за означенням для довільної сталої C маємо

$$\int_0^t C dW_s = C\left(W_t - W_0\right) = CW_t \text{ м.н.},$$

зокрема

$$\int_0^t dW_s = W_t \text{ м.н.}$$

За теоремою про інтегрування по частинах інтеграла Бохнера-Вінера маємо, що

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

Звідки можемо знайти кореляцію між інтегралами $\int_0^t s dW_s$ та $\int_0^t W_s ds$. За означенням процесу Вінера $tW_t \sim N\left(0, t^3\right)$, за раніше розглянутим прикладом інтегралу в с.кв. від процесу Вінера $\int_0^t W_s ds \sim N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$ та за теоремою про гауссовість невизначеного інтеграла Вінера $\int_0^t s dW_s \sim N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$. Тоді

$$t^3 = \mathsf{D}\left(tW_t\right) = \mathsf{D}\left(\int_0^t s dW_s\right) + \mathsf{D}\left(\int_0^t W_s ds\right) + 2\mathrm{cov}\left(\int_0^t s dW_s, \int_0^t W_s ds\right)$$

та

$$\mathrm{cov}\left(\int_0^t s dW_s, \int_0^t W_s ds\right) = \frac{t^3}{6},$$

а значить, кореляція дорівнює $\frac{1}{2}$.

За теоремою про інтеграл Іто від неперервних в с.кв. в.п. маємо, що

$$\int_0^t W_s dW_s = \text{l.i.m.}_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta W_{t_i}.$$

Перепишемо цю суму в такому вигляді

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta W_{t_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\left(W_{t_i}^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\Delta W_{t_i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2$$

і, враховуючи що квадратична варіація процесу Вінера на $[0, t]$ дорівнює t, маємо

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Вправа 4.13. Показати, що

1. $\text{l.i.m.}_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t s dW_s = 0$;
2. $\operatorname{cov}\left(W_t, \int_0^t s^n dW_s\right) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $\text{l.i.m.}_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i} \neq \int_0^t W_s dW_s$;
4. $\int_0^t \sin(W_s)\, dW_s$ є мартингал.

За допомогою інтеграла Іто можемо визначити окремий клас в.п.

Визначення. Нехай маємо деякий прогресивно вимірний в.п. $a_s = a_s(\omega)$:

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T |a_s|\, ds < \infty\right\} = 1$$

та

$$b \in M_T^2,$$

в.п. виду

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s, t \in [0, T],$$

називають *процесом Іто*, а a_s, b_s – його характеристиками. Скорочено записують як

$$dX_s = a_s ds + b_s dW_s$$

і називають dX_s *стохастичним диференціалом.*

Інтеграл $\int_0^t a_s ds$ є по-траєкторним інтегралом інтегровної функції, тобто є м.н. неперервним по t. Неперервність по t для інтеграла $\int_0^t b_s dW_s$ є наслідок теореми про неперервну модифікацію інтеграла Іто, тобто майже усі траєкторії процесу Іто неперервні. Якщо характеристика $a = 0$, то за властивостями інтеграла Іто процес Іто – мартингал. Якщо ж $\mathsf{E} \int_0^T |a_s|\, ds <$ $< \infty$, то

$$\mathsf{E} X_t = X_0 + \int_0^t \mathsf{E} a_s ds.$$

Приклад (квадратична варіація процесу Іто)**.** Покажемо, що квадратична варіація процесу Іто з характеристиками a та b:

$$\exists A, B, C > 0 : \int_0^T |a_s|\, ds \le A, \int_0^T b_s^2 ds \le B, |I_t(b)| \le C, t \in [0, T],$$

дорівнює

$$\langle X \rangle_T = \langle X, X \rangle_T = \int_0^T b_s^2 ds.$$

Нехай $\{t_k\}_{k=1}^n$ – послідовне розбиття відрізка $[0,T]$, розглянемо

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Y_{t_k}\right)^2+2\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Y_{t_k}\right)\left(\Delta Z_{t_k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Z_{t_k}\right)^2,$$

де $\Delta Y_{t_k}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}a_s ds$ та $\Delta Z_{t_k}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}b_s dW_s$. Внаслідок м.н. інтегровності a отримаємо, що існують послідовності $\varepsilon_n\downarrow 0$ та $\delta_n\downarrow 0$: для $\max_i\Delta t_i\le\delta_n$ маємо $\max_i\left|\Delta Y_{t_i}\right|\le\varepsilon_n$. Тоді м.н.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Y_{t_k}\right)^2\le\varepsilon_n\int_0^T\left|a_s\right|ds\to\infty,$$

якщо $\max_{1\le i\le n}\Delta t_i\to 0$. Застосовуючи аналогічні міркування з доведення теореми про квадратичну варіацію інтегралу Іто, виводимо

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Y_{t_k}\right)\left(\Delta Z_{t_k}\right)\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Y_{t_k}\right)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Z_{t_k}\right)^2}\to 0$$

та

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta Z_{t_k}\right)^2\to\int_0^T b_s^2 ds.$$

Збіжність в середньому квадратичному випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Застосовуючи одержаний результат, покажемо, що якщо X_t^1 та X_t^2 – два процеси Іто з характеристиками відповідно a^1,b^1 та a^2,b^2 і такі, що м.н. $X_t^1=X_t^2$, $t\in[0,T]$, тоді $a^1=a^2$ та $b^1=b^2$ м.н. Тобто, що характеристики визначають процес Іто однозначно. Дійсно, з умови $X_t^1=X_t^2$ одержуємо, що

$$\int_0^t\left(a_s^1-a_s^2\right)ds=-\int_0^t\left(b_s^1-b_s^2\right)dW_s \text{ м.н.}$$

Квадратична варіація інтегралу зліва дорівнює 0, а тому

$$\int_0^t\left(b_s^1-b_s^2\right)^2 ds=0.$$

Звідки $b^1=b^2$ м.н., а тому

$$\int_0^t\left(a_s^1-a_s^2\right)ds=0, t\in\left[0,T\right].$$

Отже, також $a_s^1=a_s^2$ м.н. Умову обмеженості інтегралів від характеристик процесу можна пом'якшити, використавши локалізацію.

Простір P_T^2

Зазначимо, що за теоремою про вимірність прогресивно вимірного процесу прогресивно вимірний в.п. є вимірний та узгоджений з фільтрацією (*неупереджений*), більш того, для неупередженого в.п. існує прогресивно вимірна модифікація. Тому умову прогресивно вимірності часто замінюють умовою неупередженості.

Також відзначимо, що умова $\mathsf{E}\int_0^t \xi_s^2 ds < \infty$ в деяких випадках є обмежувальною. Її можна пом'якшити як

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t \xi_s^2 ds < \infty\right\} = 1, t \in [0, T].$$

Позначимо через P_T^2 клас неупереджених в.п., для яких виконана ця умова, зокрема цей клас включає усі узгоджені з фільтрацією неперервні на $[0, T]$ в.п. Клас в.п. ξ таких, що $\xi \in P_T^2$, $\forall T > 0$, позначимо P^2.

Вправа 4.14. Показати, що існує $\xi \in P_T^2$ таке, що $\xi \notin M_T^2$.

Для довільної $\xi \in P_T^2$, застосовуючи метод локалізації, можна побудувати послідовність в.п. $\{\xi_N\}$ з M_T^2 таких, що в певному сенсі апроксимують ξ та $I_t(\xi_N)$ є збіжною за ймовірністю. Отриману границю позначають як

$$I_t(\xi) = \int_0^t \xi_s dW_s$$

і називають інтегралом Іто для $\xi \in P_T^2$.

Визначення. Послідовність марковських моментів $\{\tau_N\}$ називають *локалізуючою* для $\xi \in P_T^2$, якщо послідовність монотонно зростає до T:

$$\mathsf{P}\{\tau_N \le \tau_{N+1}\} = \mathsf{P}\{\cup_{N\in\mathbb{N}}\{\tau_N \ge T\}\} = 1,$$

та локалізована послідовність $\xi_N(t) = \xi_t \mathbb{1}_{\{t<\tau_N\}}$ належить M_T^2.

Лема 4.6 (про локалізуючу послідовність для $\xi \in P_T^2$)**.** *Для $\xi \in P_T^2$ локалізуючою послідовністю є*

$$\tau_N = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \xi_s^2 ds \ge N\right\}, N \in \mathbb{N} \quad (\inf\emptyset = T).$$

Доведення. Застосовуючи неперервність інтегралу зі змінною верхньою границею для вимірної функції, одержуємо що τ_N є м.з. Крім того, властивості інтегралу вказують що $\tau_N \le \tau_{N+1}$. Якщо ω: $\int_0^T \xi_s^2(\omega) ds < \infty$, то існує N: $\int_0^T \xi_s^2(\omega) ds \le N$, і значить $\tau_N \ge T$, тобто

$$\left\{\int_0^T \xi_s^2 ds < \infty\right\} \subset \cup_{N\in\mathbb{N}}\{\tau_N \ge T\}.$$

Оскільки $\xi \in P_T^2$, маємо $\mathsf{P}\left(\cup_{N\in\mathbb{N}}\{\tau_N \geq T\}\right) = 1$. М.н.

$$\int_0^T \xi_N^2(s)\,ds = \int_0^T \xi_s^2 \mathbb{1}_{\left\{\int_0^s \xi_t^2 dt < N\right\}} ds \leq N,$$

тому $\mathsf{E}\int_0^T \xi_N^2(t)\,dt \leq N$, тобто $\xi_N \in M_T^2$. □

Лема 4.7 (про однакові до м.з. підінтегральні в.п.). *Якщо $\xi, \eta \in M_T^2$ та τ – м.з. такий, що $\xi_t(\omega) = \eta_t(\omega)$ для $t \leq \tau(\omega)$, то*

$$I_t(\xi) = I_t(\eta)$$

для м.у. ω: $t \leq \tau(\omega)$.

Доведення. Внаслідок властивості лінійності $I_t(\xi)$ достатньо довести, що з $\xi_t = 0$ випливає $I_t(\xi) = 0$ на $\{t \leq \tau\}$.

Якщо $\xi \in S_T^2$:

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

і для деякого $m \leq n$ в.в. $\tau \in [t_m, t_{m+1})$, то $\xi_k = 0$ м.н. для $k \leq m$ і на $\{t \leq \tau\}$ маємо $I_t(\xi) = 0$.

Нехай ξ з M_T^2: $|\xi_t| \leq C$ м.н., та ξ_n – апроксимуюча послідовність з S_T^2. Оскільки $\{\tau < t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$, процес

$$\eta_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)\, \mathbb{1}_{(\tau, T]}(t_k)$$

є узгоджений з фільтрацією, тобто $\eta_n \in S_T^2$, причому $\eta_n(t) = 0$ на $\{\tau \geq t\}$, тому $I_t(\eta_n) = 0$ на цій події. Зі збіжності ξ_n до ξ випливає, що

$$\xi_n \mathbb{1}_{(\tau, T]} \to \xi \mathbb{1}_{(\tau, T]}$$

і для того, щоб довести що $\eta_n \to \xi$ достатньо встановити, що $\eta_n - \xi_n \mathbb{1}_{(\tau, T]} \to 0$. Враховуючи визначення η_n, з умови $\tau \in (t_m, t_{m+1}]$ для деякого $m = m(\omega) \leq n$ виводимо

$$\int_0^T \left(\eta_n - \xi_n \mathbb{1}_{(\tau, T]}\right)^2 ds = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \xi_m^2 \left(1 - \mathbb{1}_{(\tau, T]}(s)\right)^2 ds \leq C \max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0.$$

Тоді $I_t(\eta_n) \xrightarrow{L_2(\Omega)} I_t(\xi)$, а для деякої підпослідовності і м.н. Внаслідок неперервності $I_t(\xi)$ маємо, що $I_t(\xi) = 0$ м.н. на $\{t \leq \tau\}$.

Для довільної $\xi \in M_T^2$ побудуємо $\xi_n = \xi \mathbb{1}_{\{|\xi| \leq n\}}$, тоді $\xi_n \to \xi$ м.н. і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\xi_n \xrightarrow{M_T^2} \xi$, а значить, за властивостями інтеграла Іто $I_t(\xi_n) \xrightarrow{L_2(\Omega)} I_t(\xi)$. Оскільки ξ_n обмежені і дорівнюють 0 на $\{t \leq \tau\}$, за доведеним вище $I_t(\xi_n) = 0$, звідки і $I_t(\xi) = 0$ на цій множині. □

Теорема 4.11 (про існування інтеграла Іто для P_T^2)**.** *Нехай $\xi \in P_T^2$ та ξ_N – локалізована послідовність, тоді існує неперервний м.н. процес*

$$X_t = \lim_{N\to\infty} I_t(\xi_N)$$

і ця границя не залежить від вибору локалізуючої послідовності.

Доведення. З леми про однакові до м.з. підінтегральні в.п. для $\xi \in P_T^2$ існує $\Omega' \subset \Omega$: $\mathsf{P}(\Omega') = 1$, що $\forall\omega \in \Omega' \cap \{t \le \tau_{N'}\}$ та $N \ge N'$ маємо

$$I_t(\xi_N) = I_t(\xi_{N'}), N' \in \mathbb{N}.$$

Тобто, послідовність $I_t(\xi_N)$ м.н. збігається рівномірно на обмеженому інтервалі і неперервність границі випливає з неперервності $I_t(\xi_N)$.

Покажемо, що границя не залежить від вибору локалізуючої послідовності. Нехай $\{\sigma_N\}$ – деяка інша локалізуюча послідовність для ξ і позначимо

$$\tilde{I}_t(\xi_N) = \int_0^t \xi_s \mathbb{1}_{\{\sigma_N > s\}} dW_s.$$

Оскільки $\{\tau_N\}$ та $\{\sigma_N\}$ – локалізуючі послідовності, для

$$\tilde{\Omega} = \cup_N \{\tau_N \ge T, \sigma_N \ge T\}$$

маємо $\mathsf{P}\left(\tilde{\Omega}\right) = 1$. Застосовуючи лему про однакові до м.з. підінтегральні в.п. для м.з. $\tau_N \wedge \sigma_N$, матимемо

$$\tilde{I}_t(\xi_N) = I_t(\xi_N), t \le \tau_N \wedge \sigma_N.$$

Тоді для $\omega \in \tilde{\Omega}$, починаючи з деякого N, $\tilde{I}_t(\xi_N) = I_t(\xi_N)$ для $t \le T$, а значить, м.н. збігаються відповідні границі. □

Зіставимо $X_t = \lim_{N\to\infty} I_t(\xi_N)$ та $I_t(\xi)$, якщо $\xi \in M_T^2$. За теоремами Фату та Лебега про мажоровану збіжність

$$\mathsf{E}\left|\lim_{N\to\infty}\int_0^t \xi_N dW_s - \int_0^t \xi_s dW_s\right| \le \lim_{N\to\infty} \mathsf{E}\int_0^t \left(1 - \mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}}\right)\xi_s^2 ds = 0.$$

Тобто маємо коректність такого означення.

Визначення. Інтегралом Іто в.п. $\xi \in P_T^2$ називають неперервний $\mathcal{F}_t$-вимірний в.п. $I_t(\xi)$, визначений як

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^t \xi_s \mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} dW_s.$$

Для тих ω, для яких ця границя не існує, визначимо $I_t(\xi) = 0$.

Тобто, можна довизначити інтеграл Іто з M_T^2 на множину P_T^2, при цьому властивість лінійності та неперервності інтегралу зберігається, а замість мартингальності маємо локальну мартингальність.

Визначення. Якщо для в.п. $\{X_t, t \in [0,T]\}$ узгодженого з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}$ існує неспадна м.н. послідовність марковських моментів $\{\tau_n\}$:

$$\mathsf{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n \geq T\}\right) = 1$$

та

$$\{X_{t\wedge\tau_n}, t \in [0,T]\}$$

є мартингал відносно $\{\mathcal{F}_t\}$, тоді X_t називають *локальним мартингалом.*

Теорема 4.12 (про рівномірно обмежений в середньому локальний мартингал)**.** *Будь-який локальний мартингал $\{X_t, t \in [0,T]\}$ такий, що*

$$\mathsf{E} \sup_{t\in[0,T]} |X_t| < \infty$$

є мартингал.

Доведення. За означенням локального мартингалу існує послідовність марковських моментів $\{\tau_n\}$, для якої

$$\mathsf{E}\left(X_{t\wedge\tau_n} | \mathcal{F}_s\right) = X_{\tau_n\wedge s}$$

та

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n\wedge t} = X_t \text{ м.н.}$$

Враховуючи інтегровність $\sup_{t\in[0,T]}|X_t|$ можемо застосувати в рівності $\mathsf{E}\left(X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s\right) = X_{\tau_n\wedge s}$ перехід до границі при $n \to \infty$, і потрібний результат випливатиме з теореми Лебега про мажоровану збіжність. □

Завдання 20. *Нехай $\left\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]}, \mathsf{P}\right\}$ – деякий простір з фільтрацією. На цьому просторі задамо $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$-вимірну невід'ємну в.в. з $\mathsf{E}\xi = \infty$, а також в.в.*

$$\eta \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

вимірну відносно $\mathcal{F}_{\frac{3}{4}}$ та незалежну від $\mathcal{F}_{\frac{3}{4}-}$. Показати, що

$$X_t = \xi\eta\mathbb{1}_{\left\{t\geq\frac{3}{4}\right\}}, t \in [0,1],$$

є локальний мартингал, але не мартингал.

Теорема 4.13 (про локальну мартингальність інтеграла Іто)**.** *Нехай $\xi \in P_T^2$, тоді*

$$X_t = \int_0^t \xi_s dW_s, t \in [0,T],$$

є локальний мартингал.

Доведення. За означенням інтегралу Іто

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \int_0^t \xi_N(s)\, dW_s,$$

де $\xi_N(s) = \xi_s \mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}}$ та τ_N – локалізуюча послідовність. Враховуючи що $\xi_N(s) \in M_T^2$, маємо що $\int_0^t \xi_N(s)\, dW_s$ – мартингал. Зафіксуємо деяке N_0 і розглянемо

$$X_{t\wedge\tau_{N_0}} = \lim_{N\to\infty} \int_0^T \mathbb{1}_{\left[0,t\wedge\tau_{N_0}\right]} \mathbb{1}_{[0,\tau_N)} \xi_s dW_s.$$

Оскільки $\tau_N \geq \tau_{N_0}$ для $N \geq N_0$, маємо

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \mathbb{1}_{\left[0,t\wedge\tau_{N_0}\right]} \mathbb{1}_{[0,\tau_N)} \xi_s dW_s = \int_0^T \mathbb{1}_{\left[0,t\wedge\tau_{N_0}\right]} \xi_s dW_s = \int_0^t \xi_{N_0}(s)\, dW_s.$$

Звідки випливає, що $\left\{X_{t\wedge\tau_{N_0}}, t \in [0,T]\right\}$ є також мартингал. □

Приклад (квадратична варіація процесу Іто з $b \in P_T^2$)**.** Нехай $\{X_t, t \in [0,T]\}$ – процес Іто з характеристиками a та b, при чому $b \in P_T^2$. Покажемо, що

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t b_s^2 ds, t \in [0,T].$$

Зафіксуємо величини $A, B, C > 0$ і визначимо м.з.

$$\tau_1 = \inf\left\{u \in [0,T] : \int_0^u |a_s|\, ds \geq A\right\}, \tau_2 = \inf\left\{u \in [0,T] : \int_0^u b_s^2 ds \geq B\right\},$$

$$\tau_3 = \inf\{u \in [0,T] : |I_u(b)| \geq C\}$$

(з $\inf\{\emptyset\} = T$) та

$$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \wedge t.$$

Нехай $\{t_k\}_{k=1}^n$ – послідовне розбиття відрізку $[0,t]$: $\max_k \Delta t_k \to 0$, тоді $\forall\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^n (\Delta X_{t_k})^2 - \int_0^t b_s^2 ds\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \mathsf{P}\{\tau > t\} +$$
$$+ \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^n (\Delta X_{t_k})^2 - \int_0^t b_s^2 ds\right| \geq \varepsilon, \tau \leq t\right\} \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\{\tau > t\} + \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^n (\Delta X_{t_k\wedge\tau})^2 - \int_0^{t\wedge\tau} b_s^2 ds\right| \geq \varepsilon\right\}.$$

Процес

$$\left\{\bar{X}_t = X_{t\wedge\tau}, t \in [0,T]\right\}$$

– процес Іто з характеристиками $\bar{a}_s = a_s \mathbb{1}_{\{s \le \tau\}}$ та $\bar{b}_s = b_s \mathbb{1}_{\{s \le \tau\}}$. Виходячи з означення м.з. τ, для $\bar{X}_t$ виконані умови обмеженості прикладу про квадратичну варіацію процесу Іто, тому одержуємо

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta X_{t_k\wedge\tau}\right)^2 - \int_0^{t\wedge\tau} b_s^2 ds\right| \ge \varepsilon\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta \bar{X}_{t_k}\right)^2 - \int_0^{t} \bar{b}_s^2 ds\right| \ge \varepsilon\right\} \to \infty,$$

якщо $n \to \infty$. Застосовуючи м.н. скінченність інтегралів, що визначають м.з. $\tau_{1,2,3}$, отримаємо що $\mathsf{P}\{\tau > t\} \to 0$, якщо $\min\{A, B, C\} \to \infty$.

Нехай X_t та Y_t – процеси Іто відповідно з характеристиками a, b та α, β. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i}\Delta Y_{t_i}\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i} + \Delta Y_{t_i}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i} - \Delta Y_{t_i}\right)^2.$$

Розглянемо процеси $U_t = X_t + Y_t$ та $V_t = X_t - Y_t$ – процеси Іто з характеристиками $(a+\alpha)$, $(b+\beta)$ та $(a-\alpha)$, $(b-\beta)$. Застосовуючи означення квадратичної варіації процесу Іто, маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i} + \Delta Y_{t_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Delta U_{t_i}^2 \xrightarrow{P} \langle U\rangle_t$$

та

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i} - \Delta Y_{t_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_{t_i}^2 \xrightarrow{P} \langle V\rangle_t,$$

якщо $\max \Delta t_i \to 0$. Отже, формула квадратичної варіації дає

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta X_{t_i}\Delta Y_{t_i}\right) \xrightarrow{P} \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle_t + \langle X-Y\rangle_t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^t \left(b_s+\beta_s\right)^2 ds - \int_0^t \left(b_s-\beta_s\right)^2 ds\right) = \int_0^t b_s\beta_s ds.$$

Отриману границю називають *коваріацією процесів Іто* і позначають $\langle X, Y\rangle_t$.

Вправа 4.15. Нехай X_t^1 та X_t^2 – два процеси Іто з характеристиками a^1, b^1 та a^2, b^2, відповідно та $b^1, b^2 \in P_T^2$. Показати, що якщо м.н. $X_t^1 = X_t^2$, $t \in [0, T]$, то $a^1 = a^2$ та $b^1 = b^2$ м.н. м.у. на $[0, t]$.

Інтегрування за мартингалами[28]

Нехай $\xi \in P_T^2$, тоді $X_t = \int_0^t \xi_s dW_s$ визначає деякий неперервний локальний мартингал на $[0,T]$. Постає питання: як можна визначити $\int_0^t \eta_s dX_s$ для деякого в.п. η та неперервного локального мартингалу X?

Приклад (неперервний справа підінтегральний в.п.). Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – деякий імовірнісний простір, на якому задано в.в.

$$\tau \sim Unif\,[0,1] : \mathsf{P}\{\tau < t\} = t, 0 \le t \le 1,$$

та незалежну від неї в.в.

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Визначимо в.п. (результат підкидання симетричної монети у момент τ)

$$X_t = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \xi, & t \ge \tau. \end{cases}$$

Цей процес є мартингал відносно фільтрації $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \le t\}$. В сенсі Лебега-Стільт'єса інтеграл

$$\int_0^1 X_s dX_s = X_\tau \times \xi = \xi^2 = 1$$

і процес $Y_t = \int_0^t X_s dX_s$ не буде мартингалом, оскільки $Y_0 = 0$ та $Y_1 = 1$ м.н. Джерелом проблеми є можливість реагувати миттєво у разі настання події.

Приклад вказує на те, що підінтегральний в.п. має бути вимірний відносно σ-алгебри, породженої множинами виду

$$(s,t] \times A,\ A \in \mathcal{F}_s, s \le t \in [0,T].$$

Так визначену σ-алгебру називають *передбачуваною* і позначають як $Pred$. Відмітимо, що цю σ-алгебру можна також визначити як σ-алгебру, породжену всіма узгодженими з фільтрацією неперервними зліва процесами.

Нехай $\{X_t, t \in [0,T]\}$ – неперервний локальний мартингал, тоді існує єдиний неперервний передбачуваний зростаючий в.п. $\{A_t, t \in [0,T]\}$ з $A_0 = 0$ м.н. та $X_t^2 - A_t$ – локальний мартингал.

Процес A називають процесом варіації для в.п. X і позначають як $\langle X \rangle_t$ (компенсатор). Можна показати, що

$$\sup_{s \le t} \left| V_{[0,s]}^{(2)}(X) - \langle X \rangle_s \right| \xrightarrow{P} 0.$$

[28] В цьому розділі більшість результатів наводимо без доведення та детального обґрунтування (деталі див., наприклад, Chapter 2 в *Durrett R.* Stochastics Calculus: A Practical Introduction. Boca Raton: CRC Press, 1996).

Для двох неперервних локальних мартингалів X, Y визначимо процес коваріації як

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t\right).$$

Для цього процесу маємо

$$\sup_{s\le t}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(X_{s\wedge t_k}-X_{s\wedge t_{k-1}}\right)\left(Y_{s\wedge t_k}-Y_{s\wedge t_{k-1}}\right)-\langle X, Y\rangle_s\right|\xrightarrow{P}0.$$

Крім того, процес коваріації – єдиний неперервний передбачуваний процес з локально обмеженою варіацією, що починається з нуля та $X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t$ є локальний мартингал.

Вправа 4.16. Показати, що

1. $\langle X, Y\rangle_t = \langle Y, X\rangle_t$
2. $\langle X+Y, Z\rangle_t = \langle X, Z\rangle_t + \langle Y, Z\rangle_t$
3. $\langle aX, bY\rangle_t = ab\,\langle X, Y\rangle_t$
4. $\langle X_{s\wedge\tau}, Y_{s\wedge\tau}\rangle_t = \langle X_s, Y_s\rangle_{t\wedge\tau}$.

Для простих передбачуваних в.п. виду

$$\eta_s(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega)\,\mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(s)\,,\eta_k\in\mathcal{F}_{t_k}$$

визначимо

$$I(\eta, X) = \int \eta_s dX_s = \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega)\,\Delta X_{t_k}$$

та

$$I_t(\eta, X) = \int \eta_s \mathbb{1}_{[0,t]} dX_s = \sum_{k=0}^{n-1}\eta_k(\omega)\,\Delta X_{t_k\wedge t}.$$

Мають місце такі властивості

- Подання η не є єдиним, проте вибір цього подання не впливає на значення $I(\eta, X)$.
- $I_t(\eta_1+\eta_2, X) = I_t(\eta_1, X) + I_t(\eta_2, X)$.
- $I_t(\eta, X_1+X_2) = I_t(\eta, X_1) + I_t(\eta, X_2)$.
- Якщо X – неперервний мартингал та η обмежений м.н., то $I_t(\eta, X)$ – неперервний мартингал.

- Якщо $X_{1,2}$ – обмежені неперервні мартингали та $\eta_{1,2}$ – обмежені прості передбачувані, тоді

$$\langle I(\eta_1, X_1), I(\eta_2, X_2)\rangle_t = \int_0^t \eta_1(s)\,\eta_2(s)\,d\langle X_1, X_2\rangle_s$$

$$\mathsf{E}\left(I_t(\eta_1, X_1)\,I_t(\eta_2, X_2)\right) = \mathsf{E}\int_0^t \eta_1(s)\,\eta_2(s)\,d\langle X_1, X_2\rangle_s$$

$$\mathsf{E}\left(I_t(\eta_1, X_1)\right)^2 = \mathsf{E}\int_0^t \eta_1^2(s)\,d\langle X_1\rangle_s.$$

Позначимо через $M_T^2(X)$ множину передбачуваних процесів η таких, що

$$\|\eta\|_{T,X} = \sqrt{\mathsf{E}\int_0^T \eta_s^2 d\langle X\rangle_s} < \infty.$$

Завдання 21. *На множинах виду $(s,t] \times A$, $A \in \mathcal{F}_s$, задамо відображення*

$$\mu((s,t] \times A) = \mathsf{E}\left(\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s\right) I_A.$$

Показати, що μ задає міру на $Pred$ (міру Долеана). Показати, що

$$M_T^2(X) = L_2(T \times \Omega, Pred, \mu).$$

Позначимо також через LM^2 множину мартингалів X відносно $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ таких, що

$$\|X\|_{LM^2} = \sqrt{\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}X_t^2} < \infty.$$

Лема 4.8. *Якщо $X \in LM^2$ та $\eta \in M_T^2(X)$, тоді існує послідовність простих передбачуваних та обмежених в.п. η_n, що*

$$\|\eta_n - \eta\|_{T,X} \to 0, n \to \infty.$$

Застосовуючи цю лему можемо визначити стохастичний інтеграл для підінтегральних функцій з $M_T^2(X)$, де X – обмежений неперервний мартингал. Дійсно, для η_n визначений $I_t(\eta_n, X)$ та

$$\begin{aligned}\|I_t(\eta_n, X) - I_t(\eta_m, X)\|_{LM^2} &= \|I_t(\eta_n - \eta_m, X)\|_{LM^2} = \\ &= \sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}I_t^2(\eta_n - \eta_m, X) = \\ &= \sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\int_0^t (\eta_n(s) - \eta_m(s))^2\,d\langle X\rangle_s =\end{aligned}$$

$$= \mathsf{E}\int_0^T \left(\eta_n(s) - \eta_m(s)\right)^2 d\langle X\rangle_s =$$
$$= \|\eta_n - \eta_m\|_{T,X} \to 0, n, m \to \infty$$

Звідки маємо фундаментальність $I_t(\eta_n, X)$ в LM^2, а значить, і збіжність, оскільки простір повний. Відповідну границю позначимо як

$$I_t(\eta, X) = \int_0^t \eta_s dX_s$$

і називатимемо *стохастичним інтегралом* η *по* X. Мають місце такі властивості:

- Вибір апроксимуючої послідовності не впливає на значення $I_t(\eta, X)$.
- Якщо X – обмежений неперервний мартингал та $\eta_{1,2} \in M_T^2(X)$, то $\eta_1 + \eta_2 \in M_T^2$ та
$$I_t(\eta_1 + \eta_2, X) = I_t(\eta_1, X) + I_t(\eta_2, X).$$
- Якщо $\eta \in M_T^2(X_1) \cap M_T^2(X_2)$, тоді $\eta \in M_T^2(X_1 + X_2)$ та
$$I_t(\eta, X_1 + X_2) = I_t(\eta, X_1) + I_t(\eta, X_2).$$
- Якщо $\eta \in M_T^2(X)$, де X – деякий обмежений неперервний мартингал, то $I_t(\eta, X) \in LM^2$ та є неперервним.
- Якщо $X_{1,2}$ – обмежені неперервні мартингали та $\eta_1 \in M_T^2(X_1)$, $\eta_2 \in M_T^2(X_2)$, тоді
$$\langle I(\eta_1, X_1), I(\eta_2, X_2)\rangle_t = \int_0^t \eta_1(s)\,\eta_2(s)\, d\langle X_1, X_2\rangle_s.$$

Довизначимо інтеграл для підінтегральних функцій з множини $P_T^2(X)$ – множини передбачуваних в.п. η:

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t \eta_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty\right\} = 1$$

та інтеграторів X – локально неперервних мартингалів.

Нехай T_n – деяка послідовність м.з.: $T_n \uparrow T$ м.н. та

$$T_n \le \tau_n = \inf\left\{t : |X_t| > n \text{ або } \int_0^t \eta_s^2 d\langle X\rangle_s > n\right\}.$$

Позначимо $\eta_n(s) = \eta_s \mathbb{1}_{\{s \le T_n\}}$ і визначимо

$$I_t(\eta, X) = I_t(\eta_n, X), t \le T_n.$$

Якщо X– неперервний локальний мартингал та $\eta \in P_T^2$, то $I_t(\eta, X)$ – неперервний локальний мартингал.

Теорема 4.14 (про стохастичний інтеграл для неперервної функції за неперервним локальним мартингалом). *Нехай X– неперервний локальний мартингал та η – неперервний узгоджений з фільтрацією в.п., тоді*

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{t_{i-1}^n} \left(X_{t_i^n \wedge t} - X_{t_{i-1}^n \wedge t} \right) \xrightarrow{P} \int_0^t \eta_s dX_s, \max \Delta t_i^n \to 0.$$

Вправа 4.17. Показати, що для неперервного локального мартингалу

$$\int_0^t 2X_s dX_s = X_t^2 - X_0^2 - \langle X \rangle_t .$$

Найбільшим класом процесів, відносно яких можемо ефективно визначити інтеграл Іто, є клас семімартингалів (*semimartingals*).

Визначення 4.1. В.п. X називають неперервним семімартингалом, якщо його можна подати як $M_t + A_t$, де

- M_t – неперервний локальний мартингал,
- A_t – неперервний узгоджений в.п. локально обмеженої варіації.

Теорема 4.15 (Єдиність подання неперервного семімартингала). *Нехай X – неперервний семімартингал. Якщо неперервні в.п. M_t та A_t вибрані так, що $A_0 = 0$ м.н., тоді декомпозиція*

$$X_t = M_t + A_t$$

єдина.

Позначимо через $\tilde{P}^2$ множину локально обмежених передбачуваних в.п. η:

- існує послідовність м.з. $\tau_n \uparrow \infty$,
- $|\eta_s(\omega)| \leq n$, для $\{s \leq \tau_n\}$.

Оскільки

$$\int_0^{\tau_n} \eta_s^2 d \langle M \rangle_s \leq n \langle M \rangle_{\tau_n} < \infty$$

та

$$\tau_n \uparrow \infty,$$

маємо $\tilde{P}^2 \subset P^2(M)$. Тобто, визначений $I_t(\eta, M)$. Крім того, визначений $I_t(\eta, A)$ як по-траєкторний інтеграл Лебега-Стільт'єса

$$\int_0^t \eta_s(\omega)\, dA_s(\omega).$$

Отже, можемо визначити $I_t(\eta, X)$ як

$$I_t(\eta, X) = I_t(\eta, M) + I_t(\eta, A).$$

При цьому $I_t(\eta, X)$ є неперервний семімартингал. Якщо $X_{1,2}$ – неперервні семімартингали та $\eta_{1,2} \in \tilde{P}^2$, то

$$I_t(\eta_1 + \eta_2, X_1) = I_t(\eta_1, X_1) + I_t(\eta_2, X_1).$$

$$I_t(\eta_1, X_1 + X_2) = I_t(\eta_1, X_1) + I_t(\eta_1, X_2).$$

$$\langle I(\eta_1, X_1), I(\eta_2, X_2)\rangle_t = \int_0^t \eta_1(s)\,\eta_2(s)\,d\,\langle X_1, X_2\rangle_s.$$

Тобто, маємо властивість лінійності як відносно підінтегрального в.п., так і в.п., за яким інтегруємо. Крім того, має місце аналог властивості ізометрії.

Приклад (інтегрування за процесом Пуассона)**.** Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес Пуассона з параметром λ, узгоджений з деякою неперервною справа фільтрацією,

$$\left\{\bar{N}_t = N_t - \lambda t, t \geq 0\right\}$$

– відповідний компенсований процес. Цей процес є мартингалом з cadlag траєкторіями. Оскільки процес має стрибки, компенсатор та квадратична варіація будуть відрізнятись. Нехай $\{t_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовне розбиття відрізку $[0, T]$, що $\max_{0\leq i\leq n-1}\Delta t_i^n \to 0$, $n \to \infty$. Тоді

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta\bar{N}_{t_i^n}\right)^2 \xrightarrow{L_2} \lambda T + \bar{N}_T = N_T.$$

Звідки отримаємо, що

$$\sum_{i=0}^{n-1}\bar{N}_{t_i^n-}\Delta\bar{N}_{t_i^n} \xrightarrow{L_2} \frac{1}{2}\left(\bar{N}_T^2 - N_T\right).$$

Знаходження стохастичного диференціалу

Відмітимо, що правила знаходження стохастичного диференціалу неідентичні правилам знаходження звичайного диференціалу для детермінованих функцій. Під час знаходження стохастичного диференціалу необхідно враховувати можливу наявність додаткових доданків.

Приклад (диференціал квадрату та добутку на t)**.** Знайдемо стохастичні диференціали для W_t^2 та tW_t.

З раніше отриманих результатів випливає, що

$$tW_t = \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s$$

та

$$W_t^2 = t + 2\int_0^t W_s dW_s = \int_0^t ds + \int_0^t 2W_s dW_s.$$

Звідки маємо, що

$$d\left(sW_s\right) = W_s ds + s dW_s$$

та

$$dW_s^2 = ds + 2W_s dW_s.$$

Безпосередньо з означення випливає, що стохастичний диференціал суми процесів Іто дорівнює сумі відповідних стохастичних диференціалів. Більш точно.

Лема 4.9 (про лінійність стохастичного диференціалу)**.** *Нехай X_t та Y_t – процеси Іто з характеристиками a, b та $\tilde{a}, \tilde{b}$ відповідно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$\alpha X_t + \beta Y_t$$

є процесом Іто з характеристиками $\alpha a + \beta \tilde{a}$ та $\alpha b + \beta \tilde{b}$.

Лема 4.10 (про стохастичний диференціал добутку)**.** *Нехай X_t та Y_t – процеси Іто з характеристиками a, b та $\tilde{a}, \tilde{b}$ відповідно. Тоді $X_t Y_t$ є процесом Іто зі стохастичним диференціалом*

$$d\left(X_s Y_s\right) = X_s dY_s + Y_s dX_s + b_s \tilde{b}_s ds.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що характеристики процесів є сталими, тоді

$$X_t = X_0 + at + bW_t$$

та

$$Y_t = Y_0 + \tilde{a}t + \tilde{b}W_t.$$

Звідки

$$\int_0^t X_s dY_s = X_0\left(Y_t - Y_0\right) + a\tilde{a}\frac{t^2}{2} + \tilde{a}b\int_0^t W_s ds + a\tilde{b}\int_0^t s dW_s + b\tilde{b}\int_0^t W_s dW_s.$$

Застосовуючи результати для стохастичних диференціалів квадрату та добутку на t отримаємо

$$\int_0^t X_s dY_s = X_0\left(\tilde{a}t + \tilde{b}W_t\right) + a\tilde{a}\frac{t^2}{2} + \left(\tilde{a}b - a\tilde{b}\right)\int_0^t W_s ds + a\tilde{b}tW_t + \frac{1}{2}b\tilde{b}\left(W_t^2 - t\right).$$

Аналогічно маємо, що

$$\int_0^t Y_s dX_s = Y_0\left(at + bW_t\right) + a\tilde{a}\frac{t^2}{2} + \left(a\tilde{b} - \tilde{a}b\right)\int_0^t W_s ds + \tilde{a}btW_t + \frac{1}{2}b\tilde{b}\left(W_t^2 - t\right).$$

Отже,

$$X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t b\tilde{b} ds = X_0Y_0 + X_0 \left(\tilde{a}t + \tilde{b}W_t\right) +$$
$$+ Y_0 \left(at + bW_t\right) + a\tilde{a}t^2 + \left(a\tilde{b} + \tilde{a}b\right) tW_t + b\tilde{b}W_t^2 =$$
$$= \left(X_0 + at + bW_t\right) \left(Y_0 + \tilde{a}t + \tilde{b}W_t\right) = X_tY_t.$$

Внаслідок лінійності стохастичного диференціалу відповідний результат можемо одержати також для кусково-сталих характеристик процесів і шляхом граничного переходу встановити шукану формулу для довільних процесів Іто. □

Ця лема дозволяє узагальнити формулу стохастичного диференціалу для степеневої функції.

Лема 4.11 (про стохастичний диференціал степені)**.** *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$dW_t^n = nW_t^{n-1} dW_t + \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2} dt.$$

Доведення. Доведемо зазначену формулу за математичною індукцією. Для $n = 1$ ця формула тривіальна. Покажемо, що формула має місце для $n + 1$, якщо вона коректна для $n \geq 1$. Застосовуючи лему про стохастичний диференціал добутку, маємо

$$dW_t^{n+1} = d\left(W_t^n \times W_t\right) = W_t dW_t^n + W_t^n dW_t + nW_t^{n-1} dt.$$

Тоді, застосовуючи припущення коректності формули, одержимо

$$dW_t^{n+1} = W_t \left(nW_t^{n-1} dW_t + \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2} dt\right) + W_t^n dW_t + nW_t^{n-1} dt =$$
$$= (n+1) W_t^n dW_t + \frac{(n+1)n}{2} W_t^{n-1} dt.$$

□

Лема 4.12 (про стохастичний диференціал для $f(W_t)$)**.** *Нехай* $f(x)$ *– деяка двічі неперервно диференційовна функція, тоді*

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt.$$

Доведення. Якщо $P(x)$ – деякий поліном, тоді, поєднуючи леми про лінійність стохастичного диференціалу та про стохастичний диференціал степені, отримаємо

$$dP(W_t) = P'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} P''(W_t) dt.$$

Нехай $\{P_n(x)\}$ – послідовність поліномів таких, що

$$P_n''(x) \to f''(x), P_n'(x) \to f'(x) \text{ та } P_n(x) \to f(x)$$

рівномірно на кожному скінченному проміжку. Переходячи до границі у рівності

$$P_n(W_t) = P_n(0) + \int_0^t P_n'(W_s)\, dW_s + \int_0^t \frac{1}{2} P_n''(W_s)\, ds,$$

отримаємо відповідну формулу. □

Лема 4.13 (про стохастичний диференціал для $F(t, W_t)$). *Нехай $F(t,x)$ – деяка двічі неперервно диференційовна по x та неперервно диференційовна по t функція, тоді*

$$dF(t, W_t) = F_t'(t, W_t)\, dt + F_x'(t, W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, W_t)\, dt.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок

$$F(t,x) = f(t)\, g(x),$$

де $g(x)$ – двічі неперервно диференційовна та $f(t)$ – неперервно диференційовна. Використовуючи лему про стохастичний диференціал добутку та лему про стохастичний диференціал для $f(W_t)$, виводимо таке співвідношення

$$\begin{aligned} F(t, W_t) = d(f(t)\, g(W_t)) = f(t)\, dg(W_t) + g(W_t)\, df(t) = \\ = f(t)\, g'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f(t)\, g''(W_t)\, dt + f'(t)\, g(W_t)\, dt, \end{aligned}$$

що відповідає шуканій формулі. За лемою про лінійність стохастичного диференціалу відповідна формула має місце для $F_n(t,x) = \sum_{k=1}^n f_k(t)\, g_k(x)$. Апроксимуємо $F(t,x)$ функціями $F_n(t,x)$ так, щоб $F_n(t,x) \to F(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial t} F_n(t,x) \to \frac{\partial}{\partial t} F(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x} F_n(t,x) \to \frac{\partial}{\partial x} F(t,x)$ та $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_n(t,x) \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t,x)$ рівномірно на скінченному інтервалі. Тоді, переходячи до границі по n, встановлюємо відповідне зображення стохастичного диференціалу для $F(t,x)$. □

Теорема 4.16 (про формулу Іто). *Нехай $F(t,x)$ – деяка двічі неперервно диференційовна по x та неперервно диференційовна по t функція, і нехай X_t – процес Іто з характеристиками a_t, b_t, тоді $F(t, X_t)$ – також процес Іто, причому*

$$dF(t, X_t) = \left(F_t'(t, X_t) + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, X_t)\, b_t^2 \right) dt + F_x'(t, X_t)\, dX_t.$$

Доведення. Якщо характеристики a та b сталі, тобто $X_t = X_0 + at + bW_t$, то $F(t, X_t)$ можна подати як $G(t, W_t)$, де $G(t, x) = F(t, X_0 + at + bx)$ – двічі неперервно диференційовна по x та неперервно диференційовна по t. Застосовуючи лему про стохастичний диференціал для $F(t, W_t)$, отримаємо

$$dG(t, W_t) = (F_t'(t, X_t) + F_x'(t, X_t)\,a)\,dt + bF_x'(t, X_t)\,dW_t + \frac{1}{2}b^2F_{xx}''(t, X_t).$$

Тобто, у випадку сталих характеристик формула для стохастичного диференціала доведена. А значить доведена і для кусково-сталих і граничним переходом встановлюємо відповідне співвідношення для загального процесу Іто. $\square$

Під час застосування формули Іто зручно керуватись таким алгоритмом: розкласти $F(t, x)$ в ряд Тейлора до похідних другого порядку, підставляючи X_t замість x та $a_t dt + b_t dW_t$ замість dx, і застосовуючи так звану таблицю Іто

$$\begin{array}{ccc} \times & dt & dW_t \\ dt & 0 & 0 \\ dW_t & 0 & dt \end{array}.$$

Вправа 4.18. Знайти стохастичний диференціал таких процесів $W_t^{5/3}$, te^{W_t}, $\sin(W_t)$ та $\cos\left(tW_t^2\right)$.

Як зазначалось раніше формула для диференціалу є лише спрощеним варіантом запису формул для інтегралу Іто.

Приклад (інтегрування по частинах)**.** Повернемось до випадку, коли $F(t, x)$ можна записати як $f(t)\,g(x)$, де f неперервно диференційовна, а g двічі неперервно диференційовна. Тоді

$$dF(t, W_t) = f'(t)\,g(W_t)\,dt + \frac{1}{2}f(t)\,g''(W_t)\,dt + f(t)\,g'(W_t)\,dW_t.$$

Звідки

$$\int_a^b dF(t, W_t) =$$
$$= \int_a^b f'(t)\,g(W_t)\,dt + \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,g''(W_t)\,dt + \int_a^b f(t)\,g'(W_t)\,dW_t.$$

Оскільки $\int_a^b dF(t, W_t) = f(t)\,g(W_t)\,|_a^b$, маємо

$$\int_a^b f(t)\,g'(W_t)\,dW_t =$$
$$= f(t)\,g(W_t)\,|_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(W_t)\,dt - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,g''(W_t)\,dt.$$

Цю формулу зручно застосовувати, якщо маємо інтеграл від добутку функції від t та функції від W_t, для якої маємо явну формулу первісної. Виділимо також два окремі випадки. Якщо $g(W_t) = W_t$, то

$$\int_a^b f(t)\, dW_t = f(t)\, W_t|_a^b - \int_a^b f'(t)\, W_t dt.$$

А якщо $f(t) = 1$, то

$$\int_a^b g'(W_t)\, dW_t = g(W_t)\, |_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\, g''(W_t)\, dt.$$

Застосовуючи лему про стохастичний диференціал добутку, маємо

$$\int_a^b d(X_t Y_t) = \int_a^b X_t dY_t + \int_a^b Y_t dX_t + \int_a^b dX_t dY_t.$$

Звідки одержуємо таке узагальнення формули інтегрування по частинах для процесів Іто X_t та Y_t:

$$\int_a^b X_t dY_t = X_t Y_t|_a^b - \int_a^b Y_t dX_t - \int_a^b dX_t dY_t.$$

Вправа 4.19. Застосовуючи формулу інтегрування по частинах, визначити $\int_0^t X_s dY_s$, якщо $X_t = W_t$, $Y_t = \sin W_t$.

Зазначимо, що формулу Іто можна отримати і в багатовимірному випадку. Для цього спочатку визначимо багатовимірну версію процесу Іто.

Нехай $\left\{W_t^i, t \geq 0, i = \overline{1,m}\right\}$ – незалежні процеси Вінера відносно $\{\mathcal{F}_t\}$. Вектор $W_t = \|W_t^i\|_{i=\overline{1,m}}$ називають m-вимірним процесом Вінера. Будемо говорити, що матричнозначний в.п. $\xi = \|\xi^{ij}\|_{i=\overline{1,k},j=\overline{1,m}}$ належить до P^2, якщо усі його елементи належать P^2. Позначимо через $I_t^j\left(\xi^{ij}\right)$ інтеграл Іто для ξ^{ij} відносно W_t^j, і визначимо інтеграл Іто для $\xi \in P^2$ як вектор $I_t(\xi) = \| \sum_{j=1}^m I_t^j\left(\xi^{ij}\right) \|_{i=\overline{1,k}}$.

Вправа 4.20. Показати, що

1) якщо $\xi = \|\xi^j\|_{j=\overline{1,m}} \in S^2$, то $\left(I_t^i\left(\xi^i\right), I_t^j\left(\xi^j\right)\right) = 0$, $i \neq j$;

2) якщо $\xi = \|\xi^j\|_{j=\overline{1,m}}$, $\eta = \|\eta^j\|_{j=\overline{1,m}} \in S^2$, то $(I_t(\xi), I_t(\eta)) = \mathsf{E}\int_0^t \xi_s^\top \eta_s ds$;

3) якщо $\xi = \|\xi^{ij}\|_{i=\overline{1,k},j=\overline{1,m}} \in P^2$, то $\mathsf{E}\,|I_t(\xi)|^2 = \mathsf{E}\int_0^t \mathrm{tr}\left(\xi_s \xi_s^\top\right) ds$.

Визначення. Нехай W_t – m-вимірний процес Вінера, $a = \|a^i(t,\omega)\|_{i=\overline{1,k}}$ – векторнозначний неупереджений в.п.:

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T |a|\, ds < \infty\right\} = 1,$$

$\forall T > 0$, де $|a| = \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^k)^2}$, та $b = \|b^{ij}(t,\omega)\|_{i=\overline{1,k},j=\overline{1,m}} \in P^2$. Тоді неперервний узгоджений в.п.

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + I_t(b)$$

називають k-вимірним процесом Іто. Скорочено позначають

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t$$

і називають dX_t стохастичним диференціалом.

Зазначимо, що у багатовимірному випадку таблиця Іто матиме вигляд

$$\begin{array}{ccc} \times & dt & dW_t^i \\ dt & 0 & 0 \\ dW_t^j & 0 & \delta_{ij}dt \end{array}.$$

Нехай $\tilde{W}_t$ та $\check{W}_t$ – незалежні процеси Вінера та ρ – деяке число таке, що $|\rho| \le 1$. Розглянемо процес

$$W_t = \rho\tilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}\check{W}_t,$$

який за властивостями незалежних нормальних в.в. є також процесом Вінера. За лемою про стохастичний диференціал добутку

$$d\left(W_t\tilde{W}_t\right) = W_t d\tilde{W}_t + \tilde{W}_t dW_t + \rho dt$$

або

$$W_t\tilde{W}_t = \int_0^t W_s d\tilde{W}_s + \int_0^t \tilde{W}_s dW_s + \rho t.$$

Звідки $\mathsf{E}\left(W_t\tilde{W}_t\right) = \rho t$, і значить ρ визначає коефіцієнт кореляції між W_t та $\tilde{W}_t$. Ці аргументи дозволяють розглядати також випадок, коли маємо залежні процеси Вінера $\left\{W_t^i\right\}_{i=1}^m$ з коефіцієнтами кореляції $\rho_{ij} = \rho_{W_t^i,W_t^j}$. Тоді таблицю Іто перепишемо як

$$\begin{array}{ccc} \times & dt & dW_t^i \\ dt & 0 & 0 \\ dW_t^j & 0 & \rho_{ij}dt \end{array}.$$

Теорема 4.17 (про формулу Іто, багатовимірний випадок). *Нехай функція $F(t,x_1,\ldots,x_m)$ задана на $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ неперервно диференційовна по t та двічі неперервно диференційовна по $x_1,\ldots,x_m$ та нехай $\left\{X_i, i=\overline{1,m}\right\}$ – процеси Іто, тоді*

$$dF(t,X_1,\ldots,X_m) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dX_i dX_j.$$

Приклад (диференціал для гармонійної функції). Нехай $F = F\left(W_t, \tilde{W}_t\right)$, де $W_t, \tilde{W}_t$ – незалежні процеси Вінера, тоді за теоремою про формулу Іто, багатовимірний випадок, отримаємо

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dW_t + \frac{\partial F}{\partial y} d\tilde{W}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(dW_t\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(d\tilde{W}_t\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dW_t d\tilde{W}_t =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} dW_t + \frac{\partial F}{\partial y} d\tilde{W}_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) dt.$$

Функцію F називають гармонійною, якщо її Лапласіан

$$\nabla F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Тобто, для гармонійної функції F стохастичний диференціал дорівнює

$$\frac{\partial F}{\partial x} dW_t + \frac{\partial F}{\partial y} d\tilde{W}_t.$$

Приклад (досягнення процесом Вінера меж кулі). Нехай $\{W_t, t \geq 0\}$ – m-вимірний процес Вінера, $\tau_B = \inf\{t > 0 : W_t \notin B\}$ – момент виходу з відкритої кулі

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^m : |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} < R\right\}, R > 0.$$

Застосовуючи аналогічні міркування як і в скалярному випадку, отримаємо що τ_B є марковський момент. Знайдемо очікуване значення цього моменту.

Розглянемо функцію

$$F(x) = \frac{1}{m}\left(R^2 - |x|^2\right)$$

і застосуємо формулу Іто для $F(W_t)$. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{2}{m} x_i$ та $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = -\frac{2}{m}$, маємо

$$F(W_t) = F(W_0) + \sum_{i=1}^m \left(-\frac{2}{m}\right)\int_0^t W_s^i dW_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \left(-\frac{2}{m}\right)\int_0^t ds =$$
$$= \frac{R^2}{m} - t - \frac{2}{m}\sum_{i=1}^m \int_0^t W_s^i dW_s^i.$$

Оскільки для $t \leq \tau_B$: $|W_t| \leq R$, маємо $0 \leq F\left(W_{t\wedge\tau_B}\right) \leq \frac{R^2}{m}$ та

$$\mathsf{E}\int_0^{t\wedge\tau_B} |W_s|^2 ds \leq R^2 t < \infty.$$

Тоді

$$\mathsf{E}F\left(W_{t\wedge\tau_B}\right)=\frac{R^2}{m}-\mathsf{E}\left(t\wedge\tau_B\right),$$

звідки

$$\mathsf{E}\left(t\wedge\tau_B\right)=\frac{R^2}{m}-\mathsf{E}F\left(W_{t\wedge\tau_B}\right),$$

зокрема, $\mathsf{E}\left(t\wedge\tau_B\right)\le\frac{R^2}{m}$ та $\mathsf{E}\tau_B\le\frac{R^2}{m}$, тобто τ_B є м.з. За теоремами Лебега про мажоровану та монотонну збіжність, перейшовши до границі при $t\to\infty$, остаточно отримаємо

$$\mathsf{E}\tau_B=\frac{R^2}{m}-\mathsf{E}F\left(W_{\tau_B}\right)=\frac{R^2}{m}.$$

Завдання 22. *Нехай $\{W_t,t\ge 0\}$ – двовимірний процес Вінера, τ_{B_0} – момент досягнення замкненої кулі*

$$B_0=\left\{x\in\mathbb{R}^2:|x-x_0|\le R\right\},$$

що не містить початку координат, з центром в точці x_0. Знати $\mathsf{P}\left\{\tau_{B_0}<\infty\right\}$.

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що $\int_0^t\cos\left(W_s\right)dW_s=\sin W_t+\frac{1}{2}\int_0^t\sin W_s ds$.
2. Показати, що $e^{W_t}=1+\int_0^t e^{W_s}dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s}ds$. Звідки знайти кореляцію між W_t та e^{W_t}.
3. Нехай X_t,Y_t – процеси Іто. Знайти $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$.
4. Нехай $\{W_s,s\ge 0\}$ та $\left\{\tilde{W}_s,s\ge 0\right\}$ – незалежні процеси Вінера. Показати, що для процесу $X_t=\sqrt{W_t^2+\tilde{W}_t^2}$ стохастичний диференціал дорівнює $\frac{dt+2W_tdW_t+2\tilde{W}_td\tilde{W}_t}{2\sqrt{W_t^2+\tilde{W}_t^2}}$.
5. Нехай $\{W_s,s\ge 0\}$ та $\left\{\tilde{W}_s,s\ge 0\right\}$ – незалежні процеси Вінера. Визначити стохастичний диференціал для $X_t=\begin{pmatrix}e^{W_t}\sin\left(\tilde{W}_t\right)\\ e^{W_t}\cos\left(\tilde{W}_t\right)\\ e^{W_t}\end{pmatrix}$.

4.3. Стохастичні диференціальні рівняння

Нехай маємо певну ємність з рідиною. Під впливом руху молекул рідини в ємності рухається деяка частинка. Припустимо, що в початковий момент часу частинка має координати $(0, 0, 0)$, а в момент t – (X_t, Y_t, Z_t).

Зробивши припущення, що координати змінюються незалежним чином, зосередимось лише на першій координаті. Якщо $a\,(t, x)$ визначає швидкість молекул рідини в точці x в момент t, тоді зміна координати дорівнює $a\,(t, x)\,\Delta t$ за час Δt. Припустимо, що рух прискорюється зі збільшенням температури в точці x в момент t з відповідних приростом координати $b\,(t, x)\,\Delta W_t$. Тобто загальний приріст першої координати на проміжку $[t, t + \Delta t]$, якщо $X_t = x$ дорівнює

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t \approx a\,(t, x)\,\Delta t + b\,(t, x)\,\Delta W_t.$$

Звідки маємо, що перший момент приросту в околі точки x буде

$$\mathsf{E}\,(\Delta X_t | X_t = x) = a\,(t, x)\,\Delta t,$$

а другий момент приросту протягом інтервалу часу довжиною Δt –

$$\mathsf{E}\left(\Delta X_t^2 | X_t = x\right) = b^2\,(t, x)\,\Delta t.$$

Отримані співвідношення вказують на те, що для малих проміжків часу як перший та і другий моменти зміни положення частинки в момент t в точці x пропорційні довжині інтервалу Δt з коефіцієнтами пропорційності a та b^2. Припустимо, що a та b є "гладкими" функціями, тоді рівняння приросту вказує на те, що X_t є наближено процесом Гаусса: якщо $X_t = x$, то ΔX_t має наближено нормальний розподіл з параметрами $a\,(t, x)\,\Delta t$ та $b^2\,(t, x)\,\Delta t$. Замінюючи Δt на dt, ΔW_t на dW_t, та ΔX_t, на dX_t, приходимо до рівняння

$$dX_t = a\,(t, X_t)\,dt + b\,(t, X_t)\,dW_t.$$

Це рівняння називають *стохастичним диференціальним рівнянням* (СДР), а функції a та b – коефіцієнтами рівняння (*знесення* та *дифузії*).

Відмітимо, що це рівняння інколи називають дифузійним або *рівнянням дифузії*. Можна визначити також більш загальне рівняння виду

$$dX_t = a\,(t)\,dt + b\,(t)\,dW_t,$$

де a, b – деякі узгоджені з фільтрацією в.п. такі, що $\int_0^T |a\,(t)|\,dt < \infty$ та $\int_0^T b^2\,(t)\,dt < \infty$ м.н., проте подальшому під СДР будемо розуміти саме рівняння дифузійні.

Визначення. В.п. $X = X_t\,(\omega)$ називають (строгим) розв'язком СДР з початковою граничною умовою $X_0 = \zeta$ на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$, якщо він задовольняє такі умови:

1. $X_t \in \mathcal{F}_t$, де $\{\mathcal{F}_t\}$ – повна фільтрація, породжена процесом Вінера W_t та початковою умовою ζ;

2. $\mathsf{P}\{X_0 = \zeta\} = 1$;

3. $\forall 0 \le t < \infty$: $\int_0^t \left(|a(s, X_s)| + b^2(s, X_s)\right) < \infty$;

4. М.н. має місце рівність $X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\,ds + \int_0^t b(s, X_s)\,dW_s$.

Приклад (міст Броуна)**.** Покажемо, що

$$X_t = t + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s,$$

якщо $0 \le t < 1$, задовольняє СДР

$$dX_t = \frac{1 - X_t}{1-t} dt + dW_t.$$

Зазначимо спочатку, що

$$\frac{1 - X_t}{1-t} = 1 - \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s.$$

Тоді, застосовуючи лему про стохастичний диференціал добутку, маємо

$$dX_t = dt + \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s \times d(1-t) + (1-t)\,d\left(\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right) =$$
$$= \left(1 - \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right) dt + dW_t = \frac{1-X_t}{1-t} dt + dW_t.$$

З теореми про гауссовість невизначеного інтеграла Вінера випливає, що X_t є процесом Гаусса з функцією середніх t та коваріаційною функцією $s \wedge t - st$. Зокрема, $X_t \sim N(t, t(1-t))$, тобто $\mathsf{D}X_t \to 0$, якщо $t \to 0$ або $t \to 1$, набуваючи максимального значення, якщо $t = \frac{1}{2}$. Крім того, за розподілом X_t, прямує до 1, якщо $t \to 1$. Застосовуючи теорему Дуба про максимальні нерівності для неперервного мартингалу, можемо показати, що ця збіжність має місце з імовірністю 1. Довизначивши $X_1 = 1$, отримаємо що процес $\{X_t, t \in [0,1]\}$ має неперервні м.н. траєкторії, і значить, визначає міст Броуна, що сполучає точки $(0,0)$ та $(1,1)$.

Вправа 4.21. Нехай $\{X_t, t \in [0,1]\}$ – міст Броуна, що сполучає точки $(0,0)$ та $(1,1)$, ξ – в.в. незалежна від X, що має нормальний розподіл з параметрами -1 та 1. Показати, що процес $X_t + t\xi$ визначає процес Вінера на $[0,1]$.

Наведений вище приклад вказує, що перевірка чи є деякий процес розв'язком певного СДР зводиться в першу чергу до задачі знаходження стохастичного диференціалу, де ключову роль відіграє теорема про формулу Іто. Проте взагалі-то питання полягає у тому, як цей розв'язок визначити відштовхуючись від самого рівняння. Як і для звичайних диференціальних рівнянь для СДР не існує єдиного загального алгоритму, який би дозволив знайти розв'язок, але в залежності від виду рівняння можна запропонувати низку технік пошуку цього розв'язку.

Наприклад, якщо коефіцієнти рівняння – деякі детерміновані функції, то $X_t - X_0$ є процесом Гаусса з функцією середніх $\int_0^t a(u)\,du$ та коваріаційною функцією $\int_0^{s\wedge t} b^2(u)\,du$.

Вправа 4.22. Визначити $\mathsf{P}\{X_1 < 2\}$, якщо X_t є розв'язком такого СДР:

$$e^{-t/2} dX_t = \sin(t)\,dt + \cos(t)\,dW_t, X_0 = 0.$$

У випадку, коли коефіцієнти рівняння $a = a(t, W_t)$ та $b = b(t, W_t)$, то розв'язок можемо знайти безпосереднім інтегруванням в такому вигляді

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, W_s)\,ds + \int_0^t b(s, W_s)\,dW_s.$$

Більш того, якщо існує двічі неперервно диференційовна функція $f(t, x)$ така, що

$$a(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ та } b(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x},$$

то, застосовуючи теорему про формулу Іто, матимемо $dX_t = df(t, W_t)$ або

$$X_t = f(t, W_t) + C_0,$$

де C_0 знаходимо виходячи з початкової умови. В цьому випадку СДР називають *точним.* Диференціюючи умову на $a(t, x)$ по x, та підставляючи умову на $b(t, x)$, отримаємо таку необхідну умову на коефіцієнти СДР

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.$$

Відмітимо, що ця умова відповідає рівнянню теплопровідності. Тут $b = b(t, x)$ визначає температуру в точці x в момент t, а $\frac{\partial a}{\partial x}$ є щільність джерела тепла. Саме $a = a(t, x)$ можна розглядати як потенціал, з якого щільність отримаємо як градієнт по x.

Вправа 4.23. Показати, що СДР

$$dX_t = \left(5t^4 W_t + W_t^2\right) dt + \left(t^5 + \frac{2}{3} W_t^3\right) dW_t, X_0 = 0,$$

є точним. Знайти відповідний розв'язок.

Приклад (лінійні за обома коефіцієнтами СДР)**.** Знайдемо розв'язок такого СДР

$$dX_t = (\delta_t X_t + \alpha_t)\,dt + (\sigma_t X_t + \beta_t)\,dW_t.$$

Застосуємо так званий метод інтегрувального множника. Візьмемо як інтегрувальний множник

$$Y_t = \exp\left\{-\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sigma_s^2 - \delta_s\right) ds\right\},$$

тоді, застосовуючи лему про стохастичний диференціал добутку, маємо

$$d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \left(dX_t\right)\left(dY_t\right).$$

За теоремою про формулу Іто виводимо

$$dY_t = Y_t\left(-\sigma_t dW_t + \left(\frac{1}{2}\sigma_t^2 - \delta_t\right) dt\right) + \frac{1}{2}Y_t\sigma_t^2 dt = Y_t\left(-\sigma_t dW_t + \left(\sigma_t^2 - \delta_t\right) dt\right).$$

Звідки

$$d\left(X_t Y_t\right) = Y_t\left(\alpha_t - \sigma_t\beta_t\right) dt + Y_t\beta_t dW_t$$

або в інтегральній формі

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s\left(\alpha_s - \sigma_s\beta_s\right) ds + \int_0^t Y_s\beta_s dW_s.$$

Отже,

$$X_t = X_0 Y_t^{-1} + \int_0^t \frac{Y_s}{Y_t}\left(\alpha_s - \sigma_s\beta_s\right) ds + \int_0^t \frac{Y_s}{Y_t}\beta_s dW_s.$$

Зокрема, до цього типу рівнянь відноситься так зване рівняння Блека-Шоулса:

$$dX_t = \delta X_t dt + \sigma X_t dW_t, \sigma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Для того, щоб проінтерпретувати це рівняння, запишемо його у різницевій формі

$$\Delta X_t = \delta X_t \Delta t + \sigma X_t \Delta W_t$$

або

$$\frac{\Delta X_t}{X_t} = \left(\delta + \sigma\frac{\Delta W_t}{\Delta t}\right)\Delta t.$$

Якщо X_t характеризує динаміку ціни деякого активу, тоді $\frac{\Delta X_t}{X_t}$ – відносний приріст ціни на деякому проміжку. Згідно рівняння цей приріст визначений сталою швидкістю δ, яка має поправку на "шум", при цьому коефіцієнт σ називають *волатильністю*. Застосовуючи формулу для розв'язку лінійного СДР з $\alpha_s = \beta_s = 0$, $\delta_s = \delta$ та $\sigma_s = \sigma$, виводимо що динаміка активу описується як

$$X_t = X_0 Y_t^{-1} = X_0 e^{\left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}.$$

Вправа 4.24. Нехай m та α – деякі константи. Знайти розв'язок такого СДР

$$dX_t = (m - X_t)\, dt + \alpha dW_t$$

і показати, що $\text{l.i.m.}_{t\to\infty} X_t = m$.

Зазначимо, що якщо коефіцієнт b СДР нульовий, отримаємо звичайне диференціальне рівняння. І як в теорії звичайних диференціальних рівнянь під час аналізу СДР важливими є такі питання: чи існує хоча б один розв'язок і, якщо так, чи цей розв'язок єдиний.

Приклад (СДР без розв'язків)**.** Розглянемо таке СДР

$$dX_t = X_t^3 dt + X_t^2 dW_t, X_0 = C > 0.$$

Припустимо, що існує розв'язок. Оскільки розв'язок м.н. неперервний, можемо припустити, що він строго додатний на деякому інтервалі $[0, T]$. Тоді за теоремою про формулу Іто з $F(x) = \frac{1}{x}$ маємо

$$dF(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}\left(X_t^3 dt + X_t^2 dW_t\right) + \frac{1}{X_t^3}\left(X_t^4 dt\right) = -dW_t.$$

Тобто $\frac{1}{X_t} = C^{-1} - \int_0^t dW_s$ або

$$X_t = \frac{1}{C^{-1} - W_t}.$$

Отриманий процес починається з C і прямує до нескінченності на будь-якому інтервалі з додатною ймовірністю. Це суперечить тому, що X_t визначений на $[0, T]$.

Приклад (СДР з нескінченною кількістю розв'язків)**.** Розглянемо таке СДР

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}} dt + 3X_t^{\frac{2}{3}} dW_t, X_0 = 0.$$

Зафіксуємо деяке число $a > 0$ і розглянемо в.п.

$$X_t^a = (W_t - a)^3\, \mathbb{1}_{\{t>a\}}.$$

Тоді за теоремою про формулу Іто з $F(x) = (x - a)^3$ для $t > a$ маємо

$$dX_t^a = 3(W_t - a)^2 dW_t + 3(W_t - a)\, dt = 3(X_t^a)^{\frac{2}{3}} dW_t + 3(X_t^a)^{\frac{1}{3}} dt.$$

Тобто,

$$X_t^a - X_a^a = \int_a^t 3(X_s^a)^{\frac{1}{3}} ds + \int_a^t 3(X_s^a)^{\frac{2}{3}} dW_s, t \ge a.$$

Більш того, це рівняння має місце і для $t < a$. Отже, маємо цілу сім'ю в.п., які є розв'язками даного СДР.

Як і для звичайних диференціальних рівнянь можемо визначити умови "регулярності", за яких можемо гарантувати існування розв'язку причому єдиного.

Визначення. Говорять, що функція $a = a(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняє *умову лінійного росту*, якщо $\exists C > 0$:

$$|a(t,x)| \leq C(1 + |x|), t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що з нерівностей

$$1 + |x|^2 \leq (1 + |x|)^2 \leq 2\left(1 + |x|^2\right)$$

випливає, що умову лінійного росту можемо записати як $\exists C_0 > 0$:

$$|a(t,x)|^2 \leq C_0\left(1 + |x|^2\right), t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Крім того, якщо функція a є 1-Гельдер неперервна (задовольняє *умову Ліпшиця*) по x рівномірно по t, тобто, якщо $\exists L > 0$:

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq L|x - y|,$$

то умова лінійного росту еквівалентна умові обмеженості $a(t, 0)$. Дійсно, з умови лінійного росту для $x = 0$ маємо $|a(t, 0)| \leq C$. Якщо $\exists K > 0$: $|a(t, 0)| \leq K$, то з нерівності

$$|a(t,x)| \leq |a(t,x) - a(t,0)| + |a(t,0)|$$

з урахуванням умови Ліпшиця отримаємо умову лінійного росту з $C = \max\{K, L\}$. Зокрема, якщо $a = a(x)$, то умова Ліпщиця є достатньою умовою лінійного росту.

Під час доведення аналогу теореми Пікара для звичайних диференційних рівнянь важливе значення мають такі допоміжні леми.

Лема 4.14 (Гронуолла). *Нехай $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – деяка інтегровна функція, $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ та*

$$\varphi(t) \leq a + b\int_0^t \varphi(s)\,ds,$$

тоді

$$\varphi(t) \leq ae^{bt}, t \geq 0.$$

Доведення. Позначимо

$$g(t) = a + b\int_0^t \varphi(s)\,ds,$$

тоді умова леми виглядатиме так $\varphi(t) \leq g(t)$. За означенням функція g є абсолютно неперервна, а значить, майже усюди диференційовна причому $g'(t) = b\varphi(t)$. Звідки одержуємо таку умову $g'(t) \leq bg(t)$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g(t)e^{-bt}\right) = e^{-bt}\left(g'(t) - bg(t)\right),$$

умову леми можемо записати як

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g(t)e^{-bt}\right) \leq 0.$$

Тобто $g(t)e^{-bt}$ є незростаючою функцією з $g(0) = a$. Це дає $g(t)e^{-bt} \leq a$, і, враховуючи нерівність $\varphi(t) \leq g(t)$, отримаємо потрібну оцінку зверху для φ. □

Лема 4.15 (Гронуолла для послідовності функцій)**.** *Нехай маємо послідовність дійсних інтегровних функцій* $\{\varphi_n(t), t \geq 0\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\varphi_0(t) \leq c$ *для деякого* $c > 0$. *Якщо для* $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ *має місце нерівність*

$$\varphi_n(t) \leq a + b\int_0^t \varphi_{n-1}(s)\,ds, \forall n \in \mathbb{N},$$

тоді

$$\varphi_n(t) \leq ae^{bt} + c\frac{(bt)^n}{n!}.$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Оскільки для $b, t \geq 0$: $1 \leq e^{bt}$, з нерівності

$$\varphi_1(t) \leq a + b\int_0^t \varphi_0(s)\,ds \leq ae^{bt} + c\frac{bt}{1!}$$

маємо коректність твердження для $n = 1$. Нехай потрібна нерівність має місце для деякого $n \geq 1$:

$$\varphi_n(t) \leq ae^{bt} + c\frac{(bt)^n}{n!},$$

тоді

$$\varphi_{n+1}(t) \leq a + b\int_0^t \left(ae^{bs} + c\frac{(bs)^n}{n!}\right)ds = ae^{bt} + c\frac{(bt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Теорема 4.18 (про існування та єдиність розв'язку СДР)**.** *Нехай коефіцієнти СДР є вимірні функції, що задовольняють умові Ліпшиця та лінійного росту, тоді СДР має неперервний розв'язок* X_t, *крім того, якщо* $\tilde{X}_t$ *– інший розв'язок, то* X_t *та* $\tilde{X}_t$ *нерозрізненні. Якщо* $\mathsf{E}\zeta_0^2 < \infty$, *то* $\mathsf{E}\int_0^\infty X_t^2 dt < \infty$.

Доведення. Доведемо спочатку єдиність розв'язку. Припустимо, що маємо два розв'язки СДР X_t та $\tilde{X}_t$ з $X_0 = \tilde{X}_0$, і позначимо для простоти запису

$$Y_t = X_t - \tilde{X}_t = \int_0^t \bar{a} ds + \int_0^t \bar{b} dW_s,$$

де $\bar{a} = a(s, X_s) - a\left(s, \tilde{X}_s\right)$ та $\bar{b} = b(s, X_s) - b\left(s, \tilde{X}_s\right)$. Для деякого $N > 0$ визначимо $\tau_N = \sup\{t \geq 0 : |Y_t| < N\}$, тоді

$$Y_{t\wedge\tau_N} = \int_0^t \bar{a}\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} ds + \int_0^t \bar{b}\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} dW_s.$$

Звідки для функції $\varphi_n(t) = \mathsf{E}(Y_{t\wedge\tau_N})^2$ матимемо

$$\varphi_N(t) \leq 2\mathsf{E}\left(\int_0^t \bar{a}\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} ds\right)^2 + 2\mathsf{E}\left(\int_0^t \bar{b}\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} dW_s\right)^2.$$

Застосовуючи для першого математичного сподівання нерівність Шварца, а для другого – властивість ізометрії для інтеграла Іто, отримаємо

$$\varphi_N(t) \leq 2t\mathsf{E}\int_0^t \bar{a}^2\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} ds + 2\mathsf{E}\int_0^t \bar{b}^2\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} ds.$$

Тому з урахуванням умови Ліпшиця

$$\varphi_N(t) \leq 2(t+1)L^2\int_0^t \mathsf{E}Y_s^2\mathbb{1}_{\{s<\tau_N\}} ds = 2(t+1)L^2\int_0^t \mathsf{E}Y_{s\wedge\tau_N}^2 ds.$$

Отже, маємо таку оцінку зверху

$$\varphi_N(t) \leq 2(t+1)L^2\int_0^t \varphi_N(s)\, ds$$

і за лемою Гронуолла $\varphi_N(t) \leq 0$, $\forall N > 0$. Переходячи до границі, коли $N \to \infty$, виводимо $\mathsf{E}Y_t^2 = 0$. Це дає, що $Y_t = 0$ м.н., $\forall t \geq 0$. Позначимо через Ω', множину тих ω, для яких $Y_t(\omega)$ неперервна, оскільки X_t та $\tilde{X}_t$ неперервні, $\mathsf{P}(\Omega') = 1$. Тоді для $\bar{\Omega} = \Omega' \cap \left(\cap_{t\in\mathbb{Q}_+}\{Y_t = 0\}\right)$ маємо $\mathsf{P}\left(\bar{\Omega}\right) = 1$ та $\forall\omega \in \bar{\Omega}$: $Y_t(\omega) \equiv 0$, що дає нерозрізненість розв'язків.

Доведемо існування. Побудуємо спочатку розв'язок з детермінованою початковою умовою $X_0(\omega) = x$, $x \in \mathbb{R}$, який позначимо як $\xi_x(t)$. Для цього застосуємо метод послідовних наближень: $\xi_x^0(t) = x$ та для $n \in \mathbb{N}$:

$$\xi_x^n(t) = x + \int_0^t a_{n-1} ds + \int_0^t b_{n-1} dW_s,$$

де $a_n = a(s, \xi_x^n(s))$ та $b_n = b(s, \xi_x^n(s))$. Оскільки $\xi_x^0(t) = x$ є неперервний і узгоджений, то a_0, b_0 – вимірні, узгоджені, локально обмежені функції, тоді

$\xi_x^1(t)$ також неперервний узгоджений з фільтрацією в.п., звідки такою є $\xi_x^2(t)$, тощо. Отже, $\{\xi_x^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ визначає послідовність неперервних та узгоджених в.п.

Покажемо, що ця послідовність є збіжною. З умови лінійного росту маємо $\exists C$:

$$|a(s,x)| \leq C(1+|x|) \text{ та } |b(s,x)|^2 \leq C\left(1+|x|^2\right).$$

Оскільки

$$(\xi_x^n(t))^2 \leq 3|x|^2 + 3\left(\int_0^t a_{n-1}ds\right)^2 + 3\left(\int_0^t b_{n-1}dW_s\right)^2,$$

отримаємо $\forall T>0\ \exists A_T, B_T>0$:

$$\mathsf{E}(\xi_x^n(t))^2 \leq A_T + B_T\int_0^t \mathsf{E}\left(\xi_x^{n-1}(s)\right)^2 ds, t\leq T,$$

тобто $\mathsf{E}(\xi_x^n(t))^2$ є локально обмеженою функцією. Розглянувши супремум для обох сторін отриманої нерівності, за лемою Гронуолла матимемо

$$\sup_{k\leq n}\mathsf{E}\left(\xi_x^k(t)\right)^2 \leq A_T e^{TB_T}, t\leq T.$$

Отже, $\sup_n \mathsf{E}(\xi_x^n(t))^2$ також є локально обмеженою. Позначимо

$$f_n(t) = \mathsf{E}\left(\xi_x^{n+1}(t) - \xi_x^n(t)\right)^2,$$

тоді повторюючи наведені вище аргументи, з умови Ліпшиця маємо $\forall T>0$ $\exists L_T>0$:

$$f_n(t) \leq L_T\int_0^t f_{n-1}(s)\,ds, t\leq T,$$

крім того,

$$f_0(t) = \mathsf{E}\left(\int_0^t a(s,x)\,ds + \int_0^t b(s,x)\,dW_s\right)^2 \leq C_T,$$

для деякого $C_T>0$. Звідки за лемою Гронуолла для послідовності функцій $f_n(t) \leq C_T\frac{(L_T t)^n}{n!}$, і значить, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\xi_x^{n+1}(t) - \xi_x^n(t)\right) + \xi_x^0(t)$$

є рівномірно збіжний в с.кв. на $[0,T]$, $\forall T>0$.

Далі покажемо, що

$$\xi_x(t) = \text{l.i.m.}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi_x^{k+1}(t) - \xi_x^k(t)\right) + \xi_x^0(t)\right) = \text{l.i.m.}_{n\to\infty}\xi_x^n(t)$$

задовольняє відповідне СДР. Позначимо $a^x = a(s, \xi_x(s))$ та $b^x = b(s, \xi_x(s))$, тоді $\forall T > 0\ \exists L_T > 0$: $\forall t \in [0, T]$ за умовою Ліпшиця

$$\mathsf{E}\left(\int_0^t a^x ds + \int_0^t b^x dW_s - \int_0^t a_n ds - \int_0^t b_n dW_s\right)^2 \le$$
$$\le L_T \mathsf{E}\int_0^t \left(\xi_x(s) - \xi_x^n(s)\right)^2 ds.$$

Тому

$$\mathsf{E}\left(\xi_x(t) - \left(x + \int_0^t a^x ds + \int_0^t b^x dW_s\right)\right)^2 =$$
$$= \mathsf{E}\left(\xi_x(t) - \xi_x^n(t) - \left(\int_0^t \left(a^x - a_{n-1}\right) ds + \int_0^t \left(b^x - b_{n-1}\right) dW_s\right)\right)^2 \le$$
$$\le 2\mathsf{E}\left(\xi_x(t) - \xi_x^n(t)\right)^2 + 2L_T\mathsf{E}\int_0^t \left(\xi_x(s) - \xi_x^{n-1}(s)\right)^2 ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, за означенням $\xi_x(t)$ є розв'язком СДР з детермінованою початковою умовою.

Аналогічно тому, як було доведено вище, для довільного $T > 0$ можемо довести існування деяких $A_T, B_T > 0$:

$$\mathsf{E}\left(\xi_x(t) - \xi_y(t)\right)^2 \le A_T\left|x - y\right| e^{TB_T}, t \le T.$$

Звідки виводимо стохастичну неперервність $\xi_x(t)$ за x, і значить, за теоремою про вимірність стохастично неперервної в.ф. існує вимірна модифікація. Отже, якщо підставити $X_0(\omega)$ замість x, можемо показати, що $\xi_{X_0}(t)$ є розв'язок СДР з випадковою початковою умовою. $\square$

Відмітимо, що результат теореми має місце також, якщо умови Ліпшиця та лінійного росту виконані локально: $\forall T > 0\ \exists L_T, C_T > 0$:

$$\left|a(t, x)\right|^2 + \left|b(t, x)\right|^2 \le C_T\left(1 + |x|^2\right), t \le T,$$

та

$$\left|a(t, x) - a(t, y)\right|^2 + \left|b(t, x) - b(t, y)\right|^2 \le L_T\left|x - y\right|^2, t \le T, |x|, |y| < T.$$

Нехай $0 \leq s \leq t$ і розглянемо рівняння

$$X_t = x + \int_s^t a\left(u, X_u\right) du + \int_s^t b\left(u, X_u\right) dW_u.$$

Позначимо через $\xi_t^{s,x}$ розв'язок цього рівняння, за побудовою він визначений значеннями $W_t - W_u$, $u \in [s,t]$, значить $\xi_t^{s,x}$ не залежить від $\mathcal{F}_s$. Тому

$$\mathsf{P}\left\{\xi_t^{s,X_s} \leq y|\mathcal{F}_s\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_t^{s,x} \leq y\right\}|_{x=X_s}, y \in \mathbb{R}.$$

Якщо X_t є розв'язок СДР

$$dX_t = a\left(t, X_t\right) dt + b\left(t, X_t\right) dW_t, X_0 = \zeta,$$

то за означенням

$$X_t = \zeta + \int_0^t a\left(u, X_u\right) du + \int_0^t b\left(u, X_u\right) dW_u =$$

$$= X_s + \int_s^t a\left(u, X_u\right) du + \int_s^t b\left(u, X_u\right) dW_u.$$

Крім того, це співвідношення задовольняє ξ_t^{s,X_s} і за умов єдиності розв'язку СДР маємо, що $X_t = \xi_t^{s,X_s}$. Тобто

$$\mathsf{P}\left\{X_t \leq y|\mathcal{F}_s\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_t^{s,x} \leq y\right\}|_{x=X_s}.$$

Внаслідок узгодженості X_s з фільтрацією $\{\mathcal{F}_s\}$ маємо

$$\mathsf{P}\left\{X_t \leq y|X_s\right\} = \mathsf{E}\left(\mathsf{P}\left\{X_t \leq y|\mathcal{F}_s\right\}|X_s\right) = \mathsf{P}\left\{X_t \leq y|\mathcal{F}_s\right\}.$$

Отже, X_t – марковський процес з функцією перехідних імовірностей

$$P_{s,x}\left(t, A\right) = \mathsf{P}\left\{X_t \in A|X_s = x\right\}.$$

Завдання 23. *Нехай $a(x)$, $b(x)$ – функції, що задовольняють умову Ліпшиця та $x \in \mathbb{R}$. Показати, що єдиний розв'язок СДР*

$$dX_t = a\left(X_t\right) dt + b\left(X_t\right) dW_t$$

є стаціонарний марковський процес. Тобто, що для функції перехідних імовірностей маємо

$$P_{s,x}\left(s+t, A\right) = P_{0,x}\left(t, A\right), A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right).$$

Приклад (стаціонарність розв'язку рівняння Блека-Шоулса)**.** Покажемо, що розв'язок рівняння

$$dX_t = \delta X_t dt + \sigma X_t dW_t, X_0 = x,$$

є стаціонарний.

Раніше було встановлено, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X_t = X_0 e^{\left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}.$$

Звідки

$$\xi_t^{s,x} = x e^{\left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)},$$

а значить,

$$\xi_{t+s}^{s,x} = x e^{\left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(W_{t+s} - W_s)}.$$

Оскільки $W_{t+s} - W_s$ має той самий розподіл, що і W_t, розподіл $\xi_{t+s}^{s,x}$ не залежить від s.

Приклад (Апроксимація розв'язку СДР)**.** Нехай $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ – розв'язок СДР

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dW_t,$$

X_0 – деяка детермінована величина. Як чисельне дискретне наближення розв'язку на $[0, T]$ можемо застосувати апроксимацію Ейлера-Маруйями, яке полягає у застосуванні замість диференціалів приростів.

Нехай точки $0 = t_0 < \ldots < t_n = T$ визначають деяке розбиття та $h = \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1})$. Задамо процес $\left\{X_t^h, t \in [0, T]\right\}$ в точках розбиття рекурентно

$$X_{t_{i+1}}^h = X_{t_i}^h + a\left(t_i, X_{t_i}^h\right) \Delta t_i + b\left(t_i, X_{t_i}^h\right) \Delta W_{t_i}, i = \overline{0, n-1}, X_{t_0}^h = X_0$$

і для точок t з відповідного проміжку розбиття довизначимо лінійною інтерполяцією

$$X_t^h = X_{t_i}^h + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta X_{t_i}^h, t \in [t_i, t_{i+1}).$$

Якщо розбиття взяти рівномірне з $h = \frac{T}{n}$ та врахувати, що $\Delta W_{t_i} \sim \sqrt{h}\zeta_i$, $i = \overline{0, n-1}$, де $\left\{\zeta_i, i = \overline{0, n-1}\right\}$ – незалежні $N(0, 1)$ розподілені в.в., маємо

$$X_{t_{i+1}}^h = X_{t_i}^h + a\left(t_i, X_{t_i}^h\right) \frac{T}{n} + b\left(t_i, X_{t_i}^h\right) \sqrt{\frac{T}{n}} \zeta_i, i = \overline{0, n-1}, X_{t_0}^h = X_0.$$

Зокрема, для рівняння Блека-Шоулса

$$X_{t_{i+1}}^h = X_{t_i}^h \left(1 + \delta \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \zeta_i\right), i = \overline{0, n-1},$$

див. рис. 4.1. та алгоритм 10.

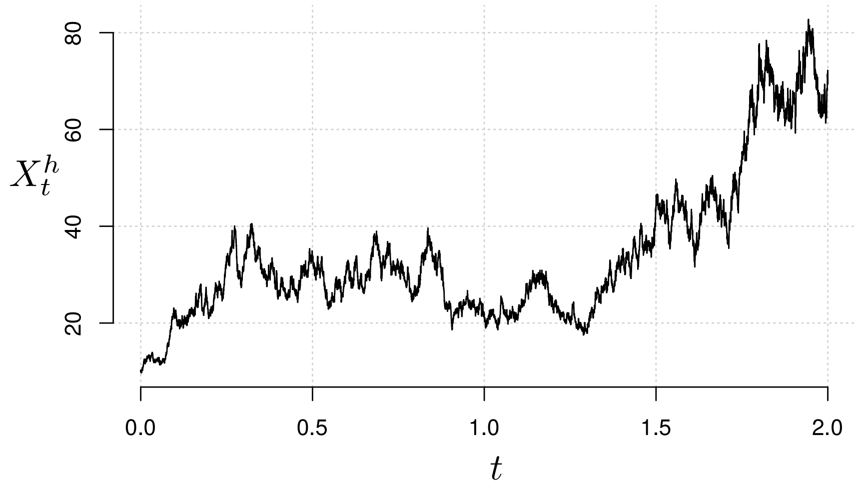


Рис. 4.1. Згенерована траєкторія для геометричного броунівського руху як розв'язку СДР

Алгоритм 10 Апроксимація Ейлера-Маруйями розв'язку рівняння Блека-Шоулса з параметрами $\delta = 1.5$, $\sigma = 1$, $X_0 = 10$

```
set.seed(112)
t<-2;n<-10000
delta<-1.5;sigma<-1;Xh<-10;h<-t/n
for (i in 1:n){
    next.value<-Xh[i]*(1+delta*h+sigma*sqrt(h)*rnorm(1))
    Xh=c(Xh,next.value) }
plot(seq(0,t,length=n+1),Xh,type="l")
```

Завдання для самоконтролю

1. Знайти відповідні стохастичні диференційні рівняння, які задовольняють процеси $X_t = \cos(W_t)$ та $Y_t = \sin(W_t)$.

2. Показати, що розв'язок СДР $dX_t = \delta X_t dt + \sigma X_t dW_t$, $X_0 = a$, такий що $\mathsf{P}\{X_t < y | X_s = x\} = \Phi\left(\left(\ln(y/x) - \left(\delta - \sigma^2/2\right)(t-s)\right) / \left(\sigma\sqrt{t-s}\right)\right)$, де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

3. Розв'язати таке СДР $dX_t = \left(t + \frac{1}{2}X_t\right)dt + e^t \sin(W_t)\, dW_t$.

4. Показати, що СДР $dX_t = f(t, X_t)\, dt + g(t)\, X_t dW_t$ заміною $Y_t = X_t \rho_t$, де $\rho_t = e^{-\int_0^t g(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds}$, можна звести до СДР $dY_t = \rho_t f\left(t, \frac{Y_t}{\rho_t}\right) dt$.

5. Розв'язати систему СДР $\begin{cases} dX_1(t) = dt + dW_1(t), \\ dX_2(t) = X_1(t)\, dt + dW_2(t), \end{cases}$ де $W_1(t)$ та $W_2(t)$ – незалежні процеси Вінера.

А. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ

А.1. Класи множин

В теорії випадкових процесів, як і в теорії ймовірностей, визначальним є так званий теоретико-множинний підхід, в рамках якого базові результати сформульовані в термінах теорії множин. Події асоціюють з певними множинами, що є підмножинами деякої загальної множини, яку називають простором.

Множини (події) позначатимемо символами $A, B, C, \ldots$. Множини, елементи яких є множинами, називатимемо класами множин і позначатимемо як $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$. Множину усіх підмножин деякої множини E позначатимемо $\mathscr{L}(E)$. На класах множин визначені стандартні операції об'єднання $\cup$, перетину $\cap$ та різниці $\backslash$.

Класи множин називають замкненими відносно певної операції, якщо результат використання відповідної операції до множин цього класу є множиною цього ж класу. В залежності від умов замкненості класів розрізняють певні типи, серед яких в першу чергу виділяють алгебри та σ-алгебри.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{A} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *алгеброю* (*полем*), якщо

- $\forall A \in \mathcal{A} : \bar{A} = E \backslash A \in \mathcal{A}$,
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Вправа А.1. Нехай $\mathcal{A} \subset \mathscr{L}(E)$ – деяка алгебра, показати, що

1) $\emptyset, E \in \mathcal{A}$;

2) $\forall n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}, i = \overline{1, n} : \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ та $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{E} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *σ-алгеброю*, якщо

- $\forall A \in \mathcal{E} : \bar{A} \in \mathcal{E}$,
- $\forall A_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N} : \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$.

Вправа А.2. 1. Показати, що класи множин $\{\emptyset, E\}$ та $\mathscr{L}(E)$ є σ-алгебрами (які називають, відповідно, *тривіальною* та *максимальною*).

2. Нехай $\mathcal{E} \subset \mathscr{L}(E)$ – деяка σ-алгебра, показати, що $\forall A_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}$:

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E},$$

$$\underline{\lim} A_k = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{E},$$

$$\overline{\lim} A_k = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}.$$

В подальшому σ-алгебри займають центральну роль, оскільки саме на цих класах задається міра, зокрема, ймовірнісна. Проте безпосереднє конструювання міри має зміст почати з більш "простих" класів множин, враховуючи що опис загального елемента σ-алгебри може бути непростою задачею.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{R} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *кільцем*, якщо

- $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \backslash B \in \mathcal{R}$,
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{R} : A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{N} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *напівкільцем*, якщо

- $\emptyset \in \mathcal{N}$,
- $\forall A, B \in \mathcal{N} : \exists n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{N}, i = \overline{1, n} : A \backslash B = \bigvee_{i=1}^{n} A_i$,
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{N} : A_1 \cap A_2 \in \mathcal{N}$.

Вправа А.3. 1. Нехай $E = \mathbb{R}$, позначимо

$$\mathcal{K} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Показати, що клас множин $\mathcal{K}$ є напівкільце, але не кільце.

2. Показати, що клас скінченних об'єднань обмежених інтервалів на $\mathbb{R}$ є кільцем, але не алгеброю.

Саме з напівкільця півінтервалів варто починати, визначаючи міру на множини дійсних чисел. При цьому, щоб гарантувати єдиність продовження міри на всю σ-алгебру, достатньо використати замкненість напівкільця відносно перетину.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{P} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *π-системою*, якщо $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}$:

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{P}.$$

Відмітимо, що саме замкненість відносно перетину класу множин, на якому задана ймовірність, відіграє ключову роль під час визначення поняття незалежності. Враховуючи властивості ймовірності, перевіряти певні факти нескладно для класів множин замкнених відносно об'єднань зліченної кількості несумісних множин, а також різниці вкладених множин.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{D} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *d-системою*[29], якщо

[29]Вживають також назви λ-система або система Динкіна

- $E \in \mathcal{D}$,
- $\forall A \subset B \in \mathcal{D} : B \backslash A \in \mathcal{D}$,
- $\forall A_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Виявляється, що умову замкненості відносно об'єднань зліченної кількості несумісних множин, можна замінити на умову замкненості відносно об'єднань зліченної кількості вкладених.

Визначення. Непорожній клас множин $\mathcal{M} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *монотонним* класом, якщо

- $\forall A_1 \subset A_2 \subset \ldots \in \mathcal{M} : \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$, або скорочено, $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$,
- $\forall A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{M} : \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$, або скорочено, $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.

Приклад (Альтернативне означення d-системи)**.** Покажемо, що якщо для класу $\mathcal{D}$ виконані такі умови

$$E \in \mathcal{D} \text{ та } \forall A \subset B \in \mathcal{D} : B \backslash A \in \mathcal{D},$$

то для того, щоб $\mathcal{D}$ був d-системою необхідно і достатньо, щоб він був монотонний.

Припустимо, що клас $\mathcal{D}$ є d-системою і розглянемо послідовність множин

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \in \mathcal{D}.$$

Визначимо множини A_i, $i \in \mathbb{N}$ як

$$A_1 = B_1, A_i = B_i \backslash B_{i-1}, i \geq 2,$$

тоді множини $A_i \in \mathcal{D}$ та несумісні, отже

$$\cup B_i = \vee A_i \in \mathcal{D}.$$

Для послідовності множин $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \in \mathcal{D}$ маємо

$$E \backslash B_1 \subset E \backslash B_2 \subset \ldots \in \mathcal{D}$$

та

$$\cap B_i = E \backslash \left(\cup \left(E \backslash B_i \right) \right) \in \mathcal{D}.$$

Тобто $\mathcal{D}$ є монотонний клас.

Припустимо тепер, що $\mathcal{D}$ – монотонний клас і розглянемо дві довільні несумісні множини $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$. Оскільки $A_1 \subset (E \backslash A_2)$, маємо

$$\bar{A}_2 \backslash A_1 \in \mathcal{D}$$

та
$$\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1 \in \mathcal{D},$$
отже
$$A_1 \vee A_2 = \overline{\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1} \in \mathcal{D}.$$
Аналогічно встановлюємо, що для довільних несумісних множин $A_i \in \mathcal{D}$, $i = \overline{1, n}$ маємо
$$A_1 \vee \ldots \vee A_n \in \mathcal{D}.$$
Якщо маємо послідовність несумісних множин $A_i, i \in \mathbb{N}$, то визначимо множини
$$B_i = \vee_{k=1}^{i} A_k, i \in \mathbb{N}.$$
Для цих множин маємо, що $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \in \mathcal{D}$, а значить
$$\vee_{k=1}^{\infty} A_k = \cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}.$$

За визначенням, імовірнісні міри задають на деякій σ-алгебрі. Якщо для побудови міри відштовхуватись від її значень на більш простому класі, виникає проблема, що міри $A \cup B$ і $A \cap B$ не можуть бути, загалом кажучи, визначені лише за мірами множин A і B. Для d-систем міра природно визначена в термінах мір множин, які беруть учать у дозволених в d-системі операціях, і відповідно важливе значення має умова коли d-система є σ-алгеброю.

Теорема А.1 (про замкнену відносно перетину d-систему)**.** *Нехай клас $\mathcal{D}$ є d-системою. Тоді $\mathcal{D}$ є π-системою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{D}$ є σ-алгеброю.*

Доведення. Якщо $\mathcal{D}$ є σ-алгеброю, тоді він є π-системою.

Нехай $\mathcal{D}$ є π-системою, тобто якщо $A, B \in \mathcal{D}$, то $A \cap B \in \mathcal{D}$ і, враховуючи що $\mathcal{D}$ є d-системою, маємо
$$A \backslash B = A \backslash (A \cap B) \in \mathcal{D}.$$
Більш того,
$$\forall A \in \mathcal{D} : \bar{A} = E \backslash A \in \mathcal{D}.$$
Для довільних $A_i \in \mathcal{D}$, $i \in \mathbb{N}$ можемо побудувати несумісні множини $B_i \in \mathcal{D}$:
$$B_1 = A_1, B_i = A_i \backslash \left(\vee_{k=1}^{i-1} B_i \right), i \geq 2.$$
А значить,
$$\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \vee_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{D}.$$
□

Вправа А.4. Показати, що алгебра $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю тоді і тільки тоді, коли вона є монотонний клас.

Вправа А.5. Доповнити діаграму співвідношень між класами (див. рис. А.1.) необхідними умовами.

Теорема А.2 (про перетин однотипних класів)**.** *Нехай*

- I *– непорожня множина індексів,*
- $\{\mathcal{K}_i, i \in I\}$ *– сім'я однотипних класів підмножин множини* E,

тоді для всіх типів перерахованих вище, окрім напівкілець, перетин сім'ї

$$\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i = \{A \in E : \forall i \in I, A \in \mathcal{K}_i\}$$

є класом відповідного типу.

Завдання 24. *Довести теорему про перетин однотипних класів.*

Вправа А.6. Показати, що об'єднання двох σ-алгебр, взагалі говорячи, не є σ-алгеброю.

Завдання 25. *Нехай* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ *– зростаюча послідовність* σ*-алгебр. Показати, що* $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ *є алгеброю, але не обов'язково* σ*-алгеброю.*

Визначення. Нехай

- $\mathcal{K}$ – деякий непорожній клас множин,
- $\{\mathcal{K}_i, i \in I\}$ – сім'я усіх однотипних класів, що $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_i$,

перетин сім'ї

$$\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$$

називають *породженим* (*найменшим*) класом відповідного типу. Позначатимемо через $\sigma(\mathcal{K})$, $\delta(\mathcal{K})$ та $\mu(\mathcal{K})$ породжені, відповідно, σ-алгебру, d-систему та монотонний клас.

Оскільки клас $\mathscr{L}(E)$ можна віднести до будь-якого з перерахованих типів та, враховуючи теорему про перетин однотипних класів, маємо, що визначення породженого класу коректне.

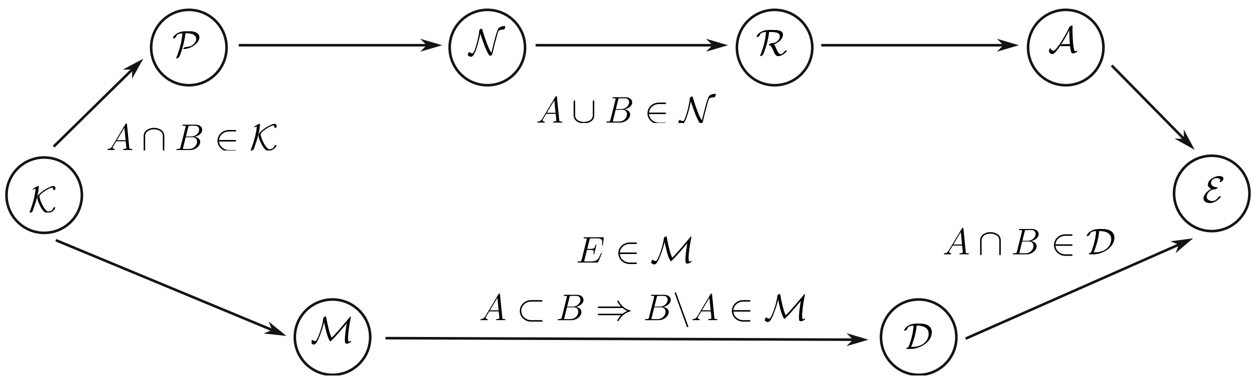


Рис. А.1. Співвідношення між класами

Теорема А.3 (про породжені класи)**.** *Нехай*

- $\mathcal{K}$ *– деякий клас множин,*
- $\mathcal{G}$ *– породжений ним клас деякого типу,*

тоді

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{G}.$$

Більш того, $\mathcal{K} = \mathcal{G}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{K}$ *має заданий тип.*

Якщо

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$$

та $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ *відповідні породжені класи заданого типу, тоді*

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2.$$

Вправа А.7. Довести теорему про породжені класи.

Для доведення низки тверджень зручно застосовувати *метод підхожих множин*, який полягає у розгляді класу множин, для яких необхідна властивість має місце і задача зводиться до доведення, що цей клас множин включає клас множин, для яких необхідно встановити твердження. Нехай

- $\mathcal{E}$ – клас множин на просторі E, для яких потрібно перевірити виконання певної властивості,
- $\mathcal{C}$ – клас множин простору E, для яких відповідна властивість виконана,
- $\mathcal{K}$ – підклас множин з $\mathcal{E}$, для яких перевірка потрібної властивості не є складною задачею.

Тоді включення $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, можна отримати, якщо $\mathcal{E}$ – породжений клас заданого типу для $\mathcal{K}$ і $\mathcal{C}$ може бути віднесений до цього типу.

Приклад (σ-алгебра на підпросторі)**.** Нехай $\mathcal{K}$ – деякий клас множин на просторі E та B – деяка підмножина E. Позначимо

$$\mathcal{K}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{K}\}$$

та

$$\sigma_B(\mathcal{K}) = \{A \cap B : A \in \sigma(\mathcal{K})\}$$

і покажемо, що

$$\sigma(\mathcal{K}_B) = \sigma_B(\mathcal{K}).$$

Покажемо спочатку, що $\sigma_B(\mathcal{K})$ є σ-алгеброю на просторі B. Дійсно,

$$\forall C \in \sigma_B(\mathcal{K}) : C = A \cap B,$$

де $A \in \sigma(\mathcal{K})$, тоді

$$B \backslash C = B \backslash (A \cap B) = \bar{A} \cap B \in \sigma_B(\mathcal{K})$$

та

$$\forall C_i \in \sigma_B(\mathcal{K}), i \in \mathbb{N} : \exists A_i \in \sigma(\mathcal{K}) : C_i = A_i \cap B,$$

звідки

$$\cup C_i = (\cup A_i) \cap B \in \sigma_B(\mathcal{K}).$$

Оскільки за побудовою $\mathcal{K}_B \subset \sigma_B(\mathcal{K})$, за теоремою про породжені класи маємо $\sigma(\mathcal{K}_B) \subset \sigma_B(\mathcal{K})$ і залишається довести, що $\sigma(\mathcal{K}_B) \supset \sigma_B(\mathcal{K})$.

Позначимо

$$\mathcal{C}_B = \{A \in \sigma(\mathcal{K}) : A \cap B \in \sigma(\mathcal{K}_B)\}$$

і покажемо, що $\mathcal{C}_B$ є σ-алгеброю на E. Нехай $A \in \mathcal{C}_B$, тоді $A \in \sigma(\mathcal{K})$ та $A \cap B \in \sigma(\mathcal{K}_B)$, звідки $E \backslash A \in \sigma(\mathcal{K})$ та

$$(E \backslash A) \cap B = B \backslash (A \cap B) \in \sigma(\mathcal{K}_B),$$

тобто $E \backslash A \in \mathcal{C}_B$.

Нехай $A_i \in \mathcal{C}_B$, $i \in \mathbb{N}$, тоді $A_i \in \sigma(\mathcal{K})$ та $A_i \cap B \in \sigma(\mathcal{K}_B)$, звідки $\cup A_i \in \sigma(\mathcal{K})$ та

$$(\cup_i A_i) \cap B = \cup_i (A_i \cap B) \in \sigma(\mathcal{K}_B),$$

тобто $\cup_i A_i \in \mathcal{C}_B$.

Залишається показати, що клас підхожих множин

$$\mathcal{C}_B \subset \sigma(\mathcal{K})$$

включає усі множини з $\sigma(\mathcal{K})$. Дійсно, $\forall A \in \mathcal{K}$:

$$A \cap B \in \mathcal{K}_B \subset \sigma(\mathcal{K}_B),$$

тоді $A \in \mathcal{C}_B$, тобто $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_B$. Звідки $\mathcal{C}_B = \sigma(\mathcal{K})$, а значить

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{K}) : A \cap B \in \sigma(\mathcal{K}_B)$$

та $\sigma_B(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K}_B)$.

Завдання 26. *Нехай $\mathcal{K}$ – деякий клас множин на просторі E та B – деяка підмножина E. Позначимо*

$$\mathcal{K}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{K}\}.$$

Визначити для яких типів клас $\mathcal{K}_B$ має той самий тип, що і $\mathcal{K}$.

Теорема А.4 (про $\pi - d$ систему Динкіна)**.** *Нехай клас* $\mathcal{K}$ *є* π*-системою, тоді*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \delta(\mathcal{K}).$$

Доведення. Оскільки $\sigma(\mathcal{K})$ є σ-алгеброю, то $\sigma(\mathcal{K})$ є також d-системою, і за теоремою про породжені класи

$$\delta(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K}).$$

Покажемо, що має місце включення і в іншу сторону. Для цього спочатку розглянемо клас множин

$$\mathcal{D}_C = \{A \in \delta(\mathcal{K}) : A \cap C \in \delta(\mathcal{K})\}, C \in \delta(\mathcal{K})$$

і покажемо, що цей клас є d-системою. Дійсно,

$$\forall C \in \delta(\mathcal{K}) : E \in \mathcal{D}_C,$$

оскільки $E \cap C = C \in \delta(\mathcal{K})$. Для множин $A \subset B \in \mathcal{D}_C$ маємо

$$(B \backslash A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C) \in \delta(\mathcal{K}).$$

Якщо $A_i \in \mathcal{D}_C$, $i \in \mathbb{N}$ несумісні множини, то

$$(\vee_{i \in \mathbb{N}} A_i) \cap C = \vee_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap C) \in \delta(\mathcal{K}).$$

Оскільки клас $\mathcal{K}$ є π-системою маємо, що $\forall C \in \mathcal{K}$ та $\forall A \in \mathcal{K} \subset \delta(\mathcal{K})$:

$$A \cap C \in \mathcal{K} \subset \delta(\mathcal{K}),$$

тобто $A \in \mathcal{D}_C$ або $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}_C$. Звідки за теоремою про породжені класи

$$\delta(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}_C, \forall C \in \mathcal{K},$$

тоді $\forall B \in \delta(\mathcal{K})$ та $\forall C \in \mathcal{K}$: $B \cap C \in \delta(\mathcal{K})$ або

$$\forall C \in \mathcal{K} : C \in \mathcal{D}_B, \forall B \in \delta(\mathcal{K}).$$

Отже, $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}_B$, $\forall B \in \delta(\mathcal{K})$ і, враховуючи що $\mathcal{D}_B$ є d-системою, маємо

$$\delta(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}_B, \forall B \in \delta(\mathcal{K}).$$

Значить,

$$\forall A, B \in \delta(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}_B : A \cap B \in \delta(\mathcal{K}),$$

тоді за теоремою про замкнену відносно перетину d-систему $\delta(\mathcal{K})$ є σ-алгеброю і $\delta(\mathcal{K}) \supset \sigma(\mathcal{K})$. $\square$

Наслідок A.1 (про монотонний клас)**.** *Нехай клас* $\mathcal{P}$ *є* π*-системою, а клас* $\mathcal{D}$ *є* d*-системою, тоді з*

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$$

випливає, що

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}.$$

Умову на клас $\mathcal{D}$ можна послабити, вимагаючи щоб він був лише монотонним класом. Це послаблення можливе за рахунок посилення умови, що $\mathcal{P}$ є алгеброю, а не просто π-системою.

Завдання 27. *Показати, що якщо клас* $\mathcal{A}$ *є алгеброю, тоді* $\mu(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

У деяких випадках початковий клас може не задовольняти умови алгебри. Наприклад, якщо розглянути клас замкнених множин, то він замкнений відносно скінченної кількості перетинів і об'єднань. Проте доповнення замкненої множини не обов'язково має бути замкненою. При цьому можна застосувати, що це доповнення завжди можна розглянути як границю зростаючої послідовності замкнених множин.

Приклад (альтернативний варіант наслідку про монотонний клас)**.** Нехай клас $\mathcal{K}$ такий, що $\forall A, B \in \mathcal{K}$ множини $\bar{A}$ та $A \cap B$ містяться в $\mu(\mathcal{K})$. Покажемо, що тоді

$$\sigma(\mathcal{K}) = \mu(\mathcal{K}).$$

За властивостями σ-алгебри безпосередньо отримаємо включення

$$\mu(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K}).$$

Для доведення зворотного включення покажемо, що $\mu(\mathcal{K})$ є алгеброю. Для перевірки умов алгебри використовуємо метод підхожих множин. Нехай

$$\mathcal{C} = \left\{A \in \mu(K) : \bar{A} \in \mu(\mathcal{K})\right\}.$$

За умовою $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$. Покажемо, що $\mathcal{C}$ – монотонний клас. Нехай $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, та $A_n \uparrow A$, тоді за означенням монотонного класу $A \in \mu(\mathcal{K})$ і $\bar{A} = \bigcap_n \bar{A}_n$. При чому за означенням класу $\mathcal{C}$ маємо $\bar{A}_n \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\bar{A}_n \downarrow \bar{A}$, отримаємо $\bar{A} \in \mu(\mathcal{K})$, а значить $A \in \mathcal{C}$. Аналогічно доводимо, що якщо $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, та $A_n \downarrow A$, то $A \in \mathcal{C}$. Отже, за теоремою про породжені класи $\mathcal{C} = \mu(\mathcal{K})$ і маємо замкненість $\mu(\mathcal{C})$ відносно доповнення.

Зафіксуємо тепер $B \in \mu(\mathcal{K})$ і визначимо

$$\mathcal{C}_B = \{A \in \mu(\mathcal{K}) : A \cap B \in \mu(\mathcal{K})\}.$$

За умовою $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_B$. Покажемо, що $\mathcal{C}_B$ – монотонний клас. Нехай $A_n \in \mathcal{C}_B$, $n \in \mathbb{N}$, та $A_n \uparrow A$. Оскільки $A \cap B = \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)$ та $A_n \cap B \uparrow A \cap B$, маємо $A \cap B \in \mu(\mathcal{K})$ та $A \in \mathcal{C}_B$. Аналогічно, якщо $A_n \in \mathcal{C}_B$, $n \in \mathbb{N}$, та

$A_n \downarrow A$, то $A \in \mathcal{C}_B$, тому за теоремою про породжені класи $\mathcal{C}_B = \mu(\mathcal{K})$. Отже, $A \cap B \in \mu(\mathcal{C})$ для всіх $A \in \mu(\mathcal{K})$ і $B \in \mathcal{K}$. Звідки, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}_A$ для будь-якого $A \in \mu(\mathcal{K})$. А значить, $\mathcal{C}_A = \mu(\mathcal{K})$ та

$$\forall A, B \in \mu(\mathcal{K}) : A \cap B \in \mu\left(\mathcal{K}\right).$$

Замкненість відносно доповнення та попарних перетинів вказує, що $\mu\left(\mathcal{K}\right)$ – алгебра. Тоді $\mu\left(\mathcal{K}\right) = \mu\left(\mu\left(\mathcal{K}\right)\right)$ – σ-алгебра, як монотонний клас породжений алгеброю, а це дає що $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mu(\mathcal{K})$.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай E – довільна непорожня множина. Показати, що клас множин A таких, що або A, або $\bar{A}$ є скінченною утворюють алгебру. Якщо E нескінчена, то цей клас не є σ-алгеброю.

2. Нехай $\mathcal{A}$ – деяка алгебра і $C \subset \Omega, C \notin \mathcal{A}$. Показати, що $\forall D \in \sigma\left(\mathcal{A} \cup C\right) : \exists A, B \in \mathcal{A}$: $D = \left(A \cap C\right) \cup \left(B \cap \bar{C}\right)$.

3. Нехай клас множин $\mathcal{A}$ утворює алгебру. Показати, що клас $\tilde{\mathcal{M}}$ множин $B \in \mu\left(\mathcal{A}\right) : \bar{B} \in \mu\left(\mathcal{A}\right)$ утворює монотонний клас.

4. Нехай клас множин $\mathcal{A}$ утворює алгебру. Позначимо через $\mathcal{M}_A$ клас множин $B \in \mu\left(\mathcal{A}\right) : A \cap B \in \mu\left(\mathcal{A}\right)$, де $A \in \mu\left(\mathcal{A}\right)$. Показати, що $\mathcal{M}_A$ утворює монотонний клас, та відповідно що $\mathcal{M}_A = \mu\left(\mathcal{A}\right)$.

5. Нехай $\mathcal{N}$ – напівкільце. Показати, що зліченне (скінченне) об'єднання множин з $\mathcal{N}$ можна подати як зліченне (скінченне) об'єднання несумісних множин з $\mathcal{N}$.

А.2. Вимірні простори

Визначення. Нехай

- E – деяка множина,
- $\mathcal{E}$ – σ-алгебра підмножин E,

тоді пару $\{E, \mathcal{E}\}$ називають *вимірним простором*, а множини з $\mathcal{E}$ *вимірними.*

Якщо множина E зліченна, то природно як σ-алгебру узяти множину усіх підмножин. Проте якщо множина E незліченна, то може виявитись, що $\mathscr{L}\left(E\right)$ є занадто "широкий" клас. В цьому випадку обирають "зручний" породжувальний клас підмножин і як множину вимірних множин беруть найменшу σ-алгебру для цього класу. Одним з важливих варіантів визначити породжувальний клас – застосувати топологію.

Визначення. Нехай I – деяка множина індексів (необов'язково злічення). Непорожній клас множин $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(E)$ називають *топологією*, якщо

- $\emptyset, E \in \mathcal{T}$,
- $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T} : G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$,
- $\forall G_i \in \mathcal{T}, i \in I : \cup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

Пару $\{E, \mathcal{T}\}$ називають *топологічним простором*. Множини з $\mathcal{T}$ називають *відкритими*, а доповнення до них – *замкненими*.

Вправа А.8. Нехай $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, показати що

$$\mathcal{T} = \{E, \emptyset,\ \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

є топологією. Знайти усі замкнені множини на цьому просторі та усі множини, які є замкненими та відкритими одночасно.

Вправа А.9. Нехай $\{E, \mathcal{T}\}$ – топологічний простір, $A \subset E$. Показати, що клас

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A, G \in \mathcal{T}\}$$

є топологією на A. Так визначену топологію називають *відносною*.

Вправа А.10. Нехай $\{E, \mathcal{T}\}$ – деякий топологічний простір. Визначимо внутрішність множини A як

$$\operatorname{int}(A) = \cup_{G \in \mathcal{T}, G \subset A} G,$$

замикання цієї множини як

$$\operatorname{cl}(A) = \cap_{G \in \mathcal{T}, A \subset \bar{G}} \bar{G},$$

та границю як

$$\partial A = \operatorname{cl}(A) \backslash \operatorname{int}(A).$$

Показати, що

$$\partial A = \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}\left(\bar{A}\right)$$

та

$$E \backslash \partial A = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}\left(\bar{A}\right).$$

Аналогом породжувального класу для вимірних множин слугує база. Тобто, для того щоб задати топологію, достатньо задати базу. Кожна база визначає однозначно топологію, проте топологія може мати різні бази.

Визначення. Клас множин $\mathscr{B}$ називають *базою* топології $\mathcal{T}$, якщо

$$\forall G \in \mathcal{T} : \exists U_i \in \mathscr{B}, i \in I : G = \cup_{i \in I} U_i.$$

Приклад (дискретна топологія)**.** Нехай E – деякий простір і розглянемо клас множин $\mathcal{T} = \mathscr{L}(E)$. Безпосередньо за означенням цей клас визначає топологію, яку називають *дискретною*. Тобто для простору $\{E, \mathcal{T}\}$ будь-яка підмножина множини E є відкритою та замкненою одночасно.

Покажемо, що базою цієї топології є клас усіх одноточкових множин з E. Дійсно, $\forall G \in \mathcal{T}$: $G = \cup_{x \in G} \{x\}$.

Приклад (евклідова топологія на $\mathbb{R}$)**.** Визначимо на $\mathbb{R}$ клас множин

$$\mathcal{T} = \{G \subset \mathbb{R} : \forall x \in G : \exists a < b : x \in (a, b) \subset G\}.$$

Покажемо, що цей клас є топологією.

За означенням $\emptyset \in \mathcal{T}$ та $\forall x \in \mathbb{R} : x \in (x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$, тобто також $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Нехай A_1, $A_2 \in \mathcal{T}$, тоді

$$\forall x \in A_1 \cap A_2 : \exists a < b : x \in (a, b) \subset A_1 \cap A_2,$$

тобто $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Якщо $A_i \in \mathcal{T}, i \in I$, то

$$\forall x \in \cup_{i \in I} A_i : \exists k \in I : x \in A_k,$$

тоді

$$\exists a < b : x \in (a, b) \subset A_k \subset \cup_{i \in I} A_i.$$

Отже, $\mathcal{T}$ – топологія. Цю топологію називають *евклідовою* і саме її розглядають на $\mathbb{R}$ за замовченням.

Якщо $G \in \mathcal{T}$, то $\forall x \in G\ \exists a_x < b_x : x \in (a_x, b_x) \subset G$, звідки

$$G \subset \cup_{x \in G} (a_x, b_x).$$

Якщо $y \in \cup_{x \in G} (a_x, b_x)$, тоді $\exists z \in G : y \in (a_z, b_z) \subset G$. Отже,

$$G = \cup_{x \in G} (a_x, b_x).$$

А значить, клас множин

$$\mathscr{B} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

є базою евклідової топології.

Введення на просторі топології дозволяє оперувати такими поняттями як сепарабельність, компактність, збіжність та неперервність.

Визначення. Топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$ називають *сепарабельним*, якщо існує зліченна множина $E_0 \subset E$, така що $\mathrm{cl}(E_0) = E$.

Якщо топологічний простір має зліченну базу, то він є сепарабельний і з будь-якого відкритого покриття простору можна вибрати скінченне або зліченне підпокриття.

Вправа A.11. Показати, що простір $\mathbb{R}$ з евклідовою топологією та зліченний простір з дискретною топологією сепарабельні.

Приклад (зв'язність евклідового простору)**.** Покажемо, що простір $\mathbb{R}$ з евклідовою топологією є зв'язний, тобто порожня множина та весь простір – єдині множини, які є замкненими та відкритими одночасно.

Припустимо, що множина A є відкритою та замкненою одночасно, проте $A \neq \mathbb{R}$ та $A \neq \emptyset$. Тоді існують точки $x \in A$ та $y \in \bar{A}$, і без втрати загальності можемо припустити, що $x < y$. Визначимо множину

$$B = A \cap [x, y]$$

та супремум по цій множині

$$\beta = \sup \{b, b \in B\},$$

який існує внаслідок обмеженості B зверху. Якщо припустити, що $\beta \notin B$, тобто $\beta \in \bar{B}$, то

$$\exists a < b : \beta \in (a, b) \subset \bar{B}$$

($\bar{B}$ є відкритою, як доповнення до перетину двох замкнених). Враховуючи, що $a < \beta$, а β – супремум, робимо висновок про існування $\alpha \in B : a < \alpha < \beta$, що суперечить включенню $(a, b) \in \bar{B}$. Отже, $\beta \in B$.

З приналежності $\beta \in B$ маємо, що $\beta \leq y$, і оскільки $y \notin B$, $\beta < y$. Виходячи з того, що A відкрита, та $\beta \in A$, виводимо існування

$$c < d : \beta \in (c, d) \subset A.$$

З нерівностей $\beta < y$ та $\beta < d$ випливає існування точки $\gamma \in A : \beta < \gamma < d \wedge y$, а значить,

$$\gamma \in A \cap [\beta, y] \subset B.$$

Отримана суперечність тому, що β – супремум по B. Отже, $A = \mathbb{R}$ або $\emptyset$.

Визначення. Множину $A \subset E$ називають *компактною*, якщо з будь-якого відкритого покриття множини можна вибрати скінченне підпокриття.

Приклад (компактність $[0, 1]$)**.** Покажемо, що відрізок $[0, 1]$ є компактним.

Нехай $\{G_i, i \in I\}$ – деяке відкрите покриття для $[0, 1]$, тоді

$$\forall x \in [0, 1] \, \exists i_x \in I : x \in G_{i_x}.$$

Оскільки $G_{i_x} \in \mathcal{T}$,

$$\exists a_x < b_x : x \in (a_x, b_x) \subset G_{i_x}.$$

Визначимо U як множину точок y з $[0, 1]$ таких, що існує скінченна кількість точок $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ і $[0, y] \subset \cup_{i=1}^{n} (a_{x_i}, b_{x_i})$. Для довільного $x \in U$ та $y \in (a_x, b_x)$ маємо $[x \wedge y, x \vee y] \subset (a_x, b_x)$, тоді

$$[0, y] \subset \cup_{i=1}^{n} (a_{x_i}, b_{x_i}) \cup (a_x, b_x),$$

а значить, $y \in U$. Звідки $\forall x \in [0,1] : (a_x, b_x) \cap U = (a_x, b_x)$ або $\emptyset$, тобто

$$U = \cup_{x \in U} (a_x, b_x) \cap [0,1]$$

та

$$[0,1] \setminus U = \cup_{x \in [0,1] \setminus U} (a_x, b_x) \cap [0,1] .$$

Отже, U є одночасно відкритою та замкненою множиною в $\left\{[0,1], \mathcal{T}_{[0,1]}\right\}$, і значить $U = [0,1]$ або $\emptyset$. Проте $0 \in U$, звідки $U = [0,1]$ та

$$[0,1] \subset \cup_{i=1}^{n} (a_{x_i}, b_{x_i}) \subset \cup_{k=1}^{n} G_{i_{x_k}}.$$

Визначення. Нехай на множині індексів I задане часткове впорядкування $\succeq$ та $\forall i, j \in I\ \exists k \succeq i, j$. *Сіткою* в топологічному просторі $\{E, \mathcal{T}\}$ називають деяку функцію $x : I \to E$ і для зручності позначають як $\{x_i\}_{i \in I}$, де $x_i = x(i)$.

Відмітимо, що у випадку $I = \mathbb{N}$ з частковим впорядкуванням $\geq$, сітку називають послідовністю.

Визначення. Говорять, що сітка $\{x_i\}_{i \in I}$ збігається до точки $x \in E$, якщо для будь-якої відкритої множини G_x, що містить точку x,

$$\exists i_0 \in I : \forall i \succeq i_0 : x_i \in G_x.$$

Завдання 28. *1. Показати, що топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$ компактний тоді і тільки тоді, коли кожна сітка $\{x_i\}_{i \in I}$ має хоча б одну точку x: $x \in \mathrm{cl}\left(\{x_i\}_{i \in I} \setminus \{x\}\right)$.*

2. Показати, що

$$\mathrm{cl}(A) = \left\{x \in E : \textit{існує сітка} \{x_i\}_{i \in I} \ \textit{елементів з } A : \{x_i\}_{i \in I} \to x\right\}.$$

Поняття границі корисне в першу чергу за умови однозначності, яка тісно пов'язана з "відокремленістю" точок простору.

Вправа А.12. Нехай маємо топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$, де $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$. Показати, що будь-яка послідовність цього простору є збіжною до будь-якої точки цього ж простору.

Визначення. Топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$ називають *простором Хаусдорфа*, якщо

$$\forall x \neq y \in E : \exists G_x, G_y \in \mathcal{T} : x \in G_x, y \in G_y, G_x \cap G_y = \emptyset.$$

Вправа А.13. Показати, що топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$ є простором Хаусдорфа тоді і тільки тоді, коли будь-яка збіжна сітка має рівно одну границю.

Визначення. Нехай $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$ – топологічні простори. Відображення $f : E_1 \to E_2$ називають неперервним, якщо

$$\forall G \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1.$$

Вправа А.14. Нехай $\mathscr{B}$ – база $\mathcal{T}_2$. Показати, що відображення $f : E_1 \to E_2$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1, \forall U \in \mathscr{B}.$$

Приклад (неперервність на $\mathbb{R}$)**.** Нехай $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ та $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ – евклідова топологія. Покажемо, що $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли виконана така умова

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in (x-\delta, x+\delta) : f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon).$$

Покажемо достатність умови. Візьмемо довільну відкриту множину $G \in \mathcal{T}$, якщо $f^{-1}(G) = \emptyset$, то $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$. Якщо $f^{-1}(G) \neq \emptyset$, то існує $x \in \mathbb{R}$: $x \in f^{-1}(G)$, причому $f(x) \in G$. Оскільки топологія $\mathcal{T}$ евклідова,

$$\exists a < b : f(x) \in (a, b) \subset G.$$

Визначимо

$$\varepsilon = (b - f(x)) \wedge (f(x) - a),$$

тоді

$$G_{f(x)} = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset G.$$

За умовою

$$\exists \delta > 0 : \forall y \in O_x = (x - \delta, x + \delta) \in \mathcal{T}, f(y) \in G_{f(x)} \subset G.$$

Значить $O_x \subset f^{-1}(G)$ та

$$f^{-1}(G) = \cup_{x \in f^{-1}(G)} O_x \in \mathcal{T}.$$

Покажемо необхідність умови. Нехай $x \in \mathbb{R}$ та $\varepsilon > 0$, позначимо

$$G_{f(x)} = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

Внаслідок неперервності $O_x = f^{-1}\left(G_{f(x)}\right) \in \mathcal{T}$, звідки

$$\exists a < b : x \in (a, b) \subset O_x.$$

Визначимо $\delta = (b - x) \wedge (x - a)$, тоді $(x - \delta, x + \delta) \subset O_x$, а значить,

$$\forall y \in (x - \delta, x + \delta) : f(y) \in f(O_x) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

Вправа A.15. Нехай $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$ – топологічні простори. Показати, що відображення $f : E_1 \to E_2$ неперервне тоді і тільки тоді, коли $\forall x \in E$ та сітки $\{x_i\}_{i \in I}$ збіжної до x сітка $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ збіжна до $f(x)$.

Вправа A.16. Нехай $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$ – топологічні простори. Показати, що якщо відображення $f : E_1 \to E_2$ неперервне та сюр'єктивне, множина $A \subset E$ компактна, то $f(A)$ також компактна.

Завдання 29. *Нехай маємо деякий топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$, введемо додаткову нову точку $\{\infty\}$ та позначимо $E^c = E \cup \{\infty\}$ і*

$$\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \cup \left\{\{\infty\} \cup \bar{K}, K - \textit{замкнений компакт з } E\right\}.$$

1. *Показати, що $\{E^c, \mathcal{T}^c\}$ є компактним топологічним простором, який називають* одноточковим компактним розширенням.

2. *Показати, що $\{E^c, \mathcal{T}^c\}$ є простором Хаусдорфа тоді і тільки тоді, коли E є* локально компактним *(для всіх точок простору існує окіл з компактним замиканням) простором Хаусдорфа.*

Визначення. Нехай $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$ – топологічні простори. Бієктивне неперервне відображення $f : E_1 \to E_2$ називають *гомеоморфізмом*, якщо обернене відображення f^{-1} також є неперервним.

Якщо для двох топологічних просторів визначений деякий гомеоморфізм, то простори називають гомеоморфними. Властивості сформульовані в термінах відкритих множин одночасно мають (або одночасно не мають) місце для гомеоморфних просторів.

Вправа A.17. Показати, що простори $(-1, 1)$ та $\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою гомеоморфні.

Важливим різновидом топологічних просторів є простори породжені деякою метрикою.

Визначення. Нехай маємо деякий непорожній простір E. Відображення $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ називають *метрикою*, якщо:

- $d(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

Якщо на E задана метрика d, то клас відкритих куль $\{B_r(x) : x \in E, r > 0\}$, де

$$B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) < r\},$$

є базою деякої топології $\mathcal{T}_d$, яку називають *породженою*.

Вправа А.18. Показати, що топологічний простір $\{E, \mathcal{T}_d\}$ є простором Хаусдорфа.

Завдання 30. *Показати, що дві метрики d_1 та d_2 на E є еквівалентними (топологічно), тобто породжують однакові топології на E, тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in E : d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

та

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in E : d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(x,y) < \varepsilon.$$

Якщо для топологічного простору $\{E, \mathcal{T}\}$ клас усіх відкритих куль відносно деякої метрики є базою топології $\mathcal{T}$, то говорять, що така топологія *метризовна*.

Приклад (метризовність дискретної та евклідової топологій)**.** На довільному просторі E задамо метрику

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

яку називають *дискретною*, тоді відкриті кулі матимуть вигляд

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1, \\ E, & r > 1. \end{cases}$$

Тобто, клас відкритих куль збігається з базою дискретної топології, а значить ця топологія метризовна.

Розглянемо на $\mathbb{R}$ метрику

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Оскільки клас відкритих інтервалів $(a,b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ є базою евклідової топології, отримаємо, що ця топологія також метризовна.

Визначення. Послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ називають *фундаментальною* (*послідовністю Коші*), якщо

$$d(x_n, x_m) \to 0, n, m \to \infty.$$

Метричний простір називають *повним*, якщо для будь-якої фундаментальної послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ існує $x \in E$:

$$d(x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

Завдання 31. *Показати, що простір $\{E, \mathcal{T}_d\}$ є компактним тоді і тільки тоді, коли він є повним та цілком обмеженим (для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна множина $A \subset E$, що $\forall x \in E \ \exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$).*

Визначення. Якщо топологічний простір $\{E, \mathcal{T}\}$ є сепарабельний, має метризовну топологію, і відносно відповідної метрики цей простір повний, то простір називають *польським.*

Приклад (числові польські простори). Найпростішими прикладами польських просторів є зліченні простори з дискретною топологією, зокрема простори $\{\mathbb{N}, \mathscr{L}(\mathbb{N})\}$ та $\{\mathbb{Z}, \mathscr{L}(\mathbb{Z})\}$. Дійсно, зліченність просторів гарантує сепарабельність. Будь-яка послідовність Коші в цих просторах відносно дискретної метрики є обов'язково сталою, починаючи з деякого номера, а значить збіжною до елементу з простору, що доводить повноту.

Розглянемо простір дійсних чисел з евклідовою топологією $\{\mathbb{R}, \mathcal{T}\}$, як було зазначено раніше ця топологія метризовна із звичайною відстанню $d(x, y) = |x - y|$. За критерієм Коші маємо повноту, крім того $\mathbb{Q}$ визначає зліченну усюди щільну підмножину. Отже, простір дійсних чисел зі звичайною топологією також є польським.

Твердження A.1 (Про підпростір польського простору). *Будь-яка замкнена підмножина польського простору є польським простором.*

Доведення. Нехай $\{E, \mathcal{T}\}$ – деякий польський простір та $F \subset E$ замкнена множина. Покажемо, що простір $\{F, \mathcal{T}_F\}$ є польським.

По-перше, доведемо що відносна топологія метризовна. Нехай $d(x, y)$ – повна метрика на E така, що клас відкритих куль $\mathscr{B}$ є базою топології $\mathcal{T}$. Тоді d є також метрикою на F та елементи класу відкритих куль на F можна подати як $B \cap F$, де $B \in \mathscr{B}$, тобто цей клас є базою топології $\mathcal{T}_F$. Більш того, довільна послідовність Коші з $F \subset E$ є збіжною і, оскільки F замкнена, границя належить F.

По-друге, встановимо сепарабельність підпростору. Нехай D зліченна усюди щільна в E множина. Позначимо через D_n множину усіх точок з D, які знаходяться від точок з F на відстані меншій за $1/n$. Внаслідок щільності D_n непорожня для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Для усіх точок x з D_n виберемо по одній точці y з F (можливо $y = x$): $d(x, y) < 1/n$ і позначимо отриману множину через D_F^n. Визначимо множину D_F як $\cup D_F^n$. За побудовою ця множина зліченна і усюди щільна в F. $\square$

За встановленим твердженням відрізок $[0, 1]$ зі звичайною топологією є ще одним прикладом польського простору. Для формування більш складних прикладів важливе значення має твердження, що декартів добуток польських просторів є польським[30].

[30] Див., наприклад, Proposition 18.2. в *Fristedt B.E.,* Gray L.F. A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997.

Приклад (продакт топологія). Нехай $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$ та $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$ – два топологічні простори, позначимо

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\}$$

та розглянемо клас множин

$$\mathscr{B} = \{G_1 \times G_2 : G_1 \in \mathcal{T}_1, G_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Покажемо, що цей клас не є топологією, проте є базою деякої топології.

Припустимо, що $\{E_i, \mathcal{T}_i\}$ – простори з евклідовою топологією на $\mathbb{R}$ і розглянемо дві множини $(-1,1) \times (-1,1)$ та $(3,4) \times (3,4)$ з класу $\mathscr{B}$. Якщо можна було б подати

$$A = (-1,1) \times (-1,1) \cup (3,4) \times (3,4)$$

як $G_1 \times G_2 : G_i \in \mathcal{T}_i$, то мало б бути, що $(-1,1) \subset G_1$ та $(3,4) \subset G_2$, проте точка $(0, 3.5) \in G_1 \times G_2$ але $(0, 3.5) \notin A$.

Покажемо, що $\mathscr{B}$ є базою деякої топології. Розглянемо клас множин $\mathcal{T} = \{\cup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathscr{B}\}$. За побудовою $\emptyset, E_1 \times E_2 \in \mathcal{T}$ та $\forall O_k \in \mathcal{T}, k \in K :$

$$\cup_{k \in K} O_k = \cup_{k \in K} \cup_{i \in I_k} B_i = \cup_{i \in \cup I_k} B_i \in \mathcal{T}.$$

Оскільки $\forall G_1, G_3 \in \mathcal{T}_1$ та $G_2, G_4 \in \mathcal{T}_2$ маємо, що

$$(G_1 \times G_2) \cap (G_3 \times G_4) = (G_1 \cap G_3) \times (G_2 \cap G_4),$$

а значить,

$$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B} : B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}.$$

Звідки $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} :$

$$O_1 \cap O_2 = (\cup B_i) \cap (\cup B_j) = \cup_{i,j} (B_i \cap B_j) \in \mathcal{T}.$$

Отже, $\mathcal{T}$ є топологією, яку позначають як $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Розглянемо відображення $\pi_i : E_1 \times E_2 \to E_i$, $i = 1, 2$, визначені як

$$\pi_i (x_1, x_2) = x_i.$$

Оскільки $\pi_1^{-1}(G_1) = G_1 \times E_2$ та $\pi_2^{-1}(G_2) = E_1 \times G_2$, маємо що π_i, $i = 1, 2$, є неперервними. Відмітимо, що $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ є мінімальною топологією, відносно якої π_1 та π_2 є неперервним відображенням[31].

Вправа А.19. Нехай $\left\{x_i = \left(x_i^1, x_i^2\right)\right\}_{i \in I}$ – деяка сітка в $\{E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\}$. Показати, що

$$\{x_i\}_{i \in I} \to x = \left(x^1, x^2\right) \in E_1 \times E_2$$

тоді і тільки тоді, коли $\left\{x_i^1\right\} \to x^1$ в $\{E_1, \mathcal{T}_1\}$ та $\left\{x_i^2\right\} \to x^2$ в $\{E_2, \mathcal{T}_2\}$.

[31] Див., наприклад, Section 2.2. в *Dudley R.M.* Real Analysis and Probability. N.Y.: Cambridge University Press, 2004.

Визначення. Нехай $\{E_i, \mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$ – сім'я топологічних просторів, топологію на $E_1 \times \ldots \times E_n$, базою якої є

$$\mathscr{B} = \left\{G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n : G_i \in \mathcal{T}_i, i = \overline{1,n}\right\},$$

називають *продакт топологією* і позначають як

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}_n.$$

Вправа А.20. Показати, що означення продакт топології коректне. А також показати, що як базу продакт топології можемо узяти клас множин

$$\left\{U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n : U_i \in \mathscr{B}_i, i = \overline{1,n}\right\},$$

де $\mathscr{B}_i$ – деякі бази топологій $\mathcal{T}_i$.

Завдання 32. *Нехай*

- $\{E_i, \mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$ *– сім'я метризовних топологічних просторів,*
- $d_i(x, y)$ *– метрики, що породжують відповідні топології $\mathcal{T}_i$, відносно яких простори E_i повні.*

Показати, що метрика

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} d_i(x_i, y_i)$$

на $\times_{i=1}^n E_i$ породжує топологію $\otimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i$, і що простір $\times_{i=1}^n E_i$ повний відносно цієї метрики.

Завдання 33. *Нехай $\{E_i, \mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$ – сім'я сепарабельних топологічних просторів. Показати, що простір $\{\times_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i\}$ також є сепарабельний.*

Визначення. Нехай $\{E, \mathcal{T}\}$ – топологічний простір, тоді σ-алгебру, породжену топологією $\mathcal{T}$, називають σ-алгеброю *борелевих множин* і позначають як $\mathcal{B}(E)$.

Борелеві множини, породжені евклідовою топологією, включають множини виду $\{a\}$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ та $[a, b]$, а також їх доповнення та об'єднання в зліченній кількості. Якщо інше не зазначено, в подальшому під $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ будемо розуміти саме σ-алгебру борелевих множин, породжену евклідовою топологією.

Вправа А.21. Показати, що клас множин

$$\mathscr{B} = \{(a, b], a < b \in \mathbb{R}\}$$

є базою деякої топології $\mathcal{T}_1$ на $\mathbb{R}$, відмінної від евклідової, проте класи борелевих множини для обох топологій однакові.

Вправа А.22. Показати, що для топологічного простору, який має зліченну базу $\mathscr{B}$, σ-алгебра борелевих множин збігається з $\sigma(\mathscr{B})$.

Завдання 34. *Показати, що σ-алгебра, породжена класом відкритих куль відносно метрики*

$$d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

збігається з $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Визначення. Нехай $\{E_i, \mathcal{E}_i\}_{i=1}^n$ – сім'я вимірних просторів, *продакт σ-алгеброю* на $\times_{i=1}^n E_i$ називають

$$\sigma\left\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{E}_i, i = \overline{1,n}\right\}$$

і позначають як $\otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$. Якщо усі простори, які формують продакт простір, однакові $\{E_i, \mathcal{E}_i\} = \{E, \mathcal{E}\}$, $i = \overline{1,n}$, то записуватимемо $\{\times_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i\}$ як $\{E^n, \mathcal{E}^n\}$.

Теорема А.5 (про продакт σ-алгебру борелевих множин). *Нехай $\{E_i, \mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$ – непорожні простори Хаусдорфа зі зліченною базою, тоді*

$$\mathcal{B}(\times_{i=1}^n E_i) = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(E_i).$$

Доведення. Позначимо через $\mathscr{B}_i$ бази відповідних топологій. Оскільки бази зліченні, маємо, що будь-яка відкрита множина G в $\times_{i=1}^n E_i$ може бути подана як об'єднання зліченної кількості множин виду $U_1 \times \ldots \times U_n$, $U_i \in \mathscr{B}_i \subset \mathcal{B}(E_i)$, $i = \overline{1,n}$. Звідки $G \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(E_i)$, а отже, і

$$\mathcal{B}(\times_{i=1}^n E_i) \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(E_i).$$

Розглянемо клас *вимірних прямокутників*

$$B_1 \times \ldots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(E_i), i = \overline{1,n},$$

і покажемо, що цей клас міститься в $\mathcal{B}(\times_{i=1}^n E_i)$. Оскільки довільний вимірний прямокутник можна подати як

$$B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \cap \ldots \cap E_1 \times E_2 \times \ldots \times B_n,$$

достатньо довести, що

$$B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in \mathcal{B}(\times_{i=1}^n E_i).$$

Розглянемо

$$\mathcal{K} = \{B_1 \in \mathcal{B}(E_1) : B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in \mathcal{B}(\times_{i=1}^n E_i)\}.$$

Цей клас множин є σ-алгеброю, оскільки

$$\bar{B}_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \overline{B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}$$

та

$$(\cup B_{i1}) \times E_2 \times \ldots \times E_n = \cup \left(B_{i1} \times E_2 \times \ldots \times E_n \right),$$

більш того, $\forall B_1 \in \mathcal{T}_1$:

$$B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i.$$

Звідки за теоремою про породжені класи $\mathcal{K} = \mathcal{B}(E_1)$ і значить

$$B_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \in \mathcal{B}\left(\times_{i=1}^n E_i\right), \forall B_1 \in \mathcal{B}(E_1).$$

Отже маємо, що $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}\left(\times_{i=1}^n E_i\right)$. □

Завдання 35. *Показати, що σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, породжена класом відкритих куль відносно метрики*

$$d_n(x, y) = \sum_{i=1}^n 2^{-i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

збігається з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Завдання 36. *Нехай маємо простір Хаусдорфа $\{E, \mathcal{T}\}$ потужності більшої за потужність континуум. Показати, що множина $\{(x, x) : x \in E\}$ замкнена в E^2, проте не належить $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$.*

Якщо маємо зліченну кількість просторів $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, то їх декартів добуток, позначений як

$$\times_{i=1}^{\infty} E_i = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in E_i, i \in \mathbb{N}\},$$

визначає простір послідовностей, елементами яких є елементи відповідних просторів. При цьому для того, щоб задати топологію (σ-алгебру), визначальним є клас послідовностей, перші елементи яких належать деяким відкритим (вимірним) множинам.

Визначення. *Продакт топологією* на $\times_{i=1}^{\infty} E_i$ називають топологію $\otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i$, базою якої є

$$\mathscr{B} = \{G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \times E_{n+1} \times \ldots : G_i \in \mathcal{T}_i, n \in \mathbb{N}\},$$

а *продакт σ-алгеброю* на $\times_{i=1}^{\infty} E_i$ називають σ-алгебру $\otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i$, породжену класом, так званих *вимірних циліндрів* на просторі послідовностей з прямокутною основою, тобто множин виду

$$A_1 \times \ldots \times A_n \times E_{n+1} \times \ldots,$$

де $A_i \in \mathcal{E}_i$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\{E_i, \mathcal{E}_i\} = \{E, \mathcal{E}\}$, $i \in \mathbb{N}$, то позначатимемо $\{\times_{i=1}^{\infty} E, \otimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}\}$ як $\{E^{\infty}, \mathcal{E}^{\infty}\}$.

Вправа A.23. 1. Показати, що теорема про продакт σ-алгебру борелевих множин має місце і для $n = \infty$.

2. Показати, що у завданнях 32 та 33 можна взяти $n = \infty$.

Приклад (нескінченно вимірний куб). Розглянемо простір $\left\{[0,1]^{\infty}, \mathcal{T}^{\infty}_{[0,1]}\right\}$, оскільки він визначений як зліченний добуток просторів $\left\{[0,1], \mathcal{T}_{[0,1]}\right\}$, кожен з яких польський, то цей простір є також польським. Більш того, за теоремою Тихонова[32] як добуток компактних просторів він компактний.

Нехай маємо деякий польський простір $\{E, \mathcal{T}\}$ з відповідною метрикою d та $\{x_n\}$ – зліченна усюди щільна підмножина E. Розглянемо відображення $f : E \to [0,1]^{\infty}$ визначене як

$$f(x) = (d(x, x_1) \wedge 1, d(x, x_2) \wedge 1, \ldots).$$

Оскільки метрика – неперервне відображення своїх аргументів, маємо що f неперервне. Можна показати, що f^{-1} також є неперервним відображенням, крім того, $f(E)$ є борелевою множиною, а $f : E \to f(E)$ є бієкцією (тобто f – гомеоморфізм). Отже, будь-який польський простір гомеоморфний деякій борелевій множині з нескінченно вимірного куба[33].

У випадку, коли маємо незлічену сім'ю вимірних просторів $\{E_t, \mathcal{E}_t\}_{t\in T}$, під добутком $\times_{t\in T} E_t$ розуміємо множину функцій $x = x(t), t \in T$, таких що $x(t) \in E_t, t \in T$. Позначимо через

$$Cyl_{t_1,\ldots,t_n}(B), t_i \in T, i = \overline{1,n}, B \in \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{t_i},$$

множину функцій $x \in \times_{t\in T} E_t$, для яких

$$(x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in B.$$

Так визначену множину називають *вимірним циліндром* (*на просторі функцій з основою* B).

Вправа A.24. 1. Показати, що клас вимірних циліндрів утворює алгебру, але не σ-алгебру.

2. Показати, що клас вимірних циліндрів з прямокутною основою $Cyl_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n)$, $t_i \in T$, $B_i \in \mathcal{E}_{t_i}$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$ (див. рис. A.2.) утворює напівкільце.

Визначення. *σ-алгеброю циліндричних множин* називають σ-алгебру, породжену класом вимірних циліндрів і позначають як $\otimes_{t\in T} \mathcal{E}_t$. Якщо $\forall t \in T$: $\{E_t, \mathcal{E}_t\} = \{E, \mathcal{E}\}$, то позначатимемо $\{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T} \mathcal{E}_t\}$ як $\left\{E^T, \mathcal{E}^T\right\}$.

[32] Див., наприклад, Theorem 2.2.8 в *Dudley R.M.* Real Analysis and Probability. N.Y.: Cambridge University Press, 2004.

[33] *Fristedt B.E., Gray L.F.* A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997. P. 350

Вправа А.25. Нехай $\{\mathcal{K}_t, t \in T\}$ – сім'я класів множин таких, що $\sigma(\mathcal{K}_t) = \mathcal{E}_t$, $t \in T$. Показати, що клас множин

$$Cyl_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n), t_i \in T, B_i \in \mathcal{K}_{t_i}, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N},$$

є породжуючий для $\otimes_{t \in T} \mathcal{E}_t$.

Нехай $I \subset J \subset T$ – деякі непорожні множини. Розглянемо відображення (*канонічне проектування*)

$$\pi_I^J : \times_{j \in J} E_j \to \times_{i \in I} E_i,$$

визначивши $\pi_I^J(x)$, $x \in \times_{j \in J} E_j$, як звуження $x|_I$ на множину I функції, заданої на множині J. Позначатимемо

$$\pi_I = \pi_I^T$$

та

$$\pi_t = \pi_{\{t\}}, t \in T.$$

Вправа А.26. Показати, що

1. $\pi_I = \pi_I^J \circ \pi_J$.
2. $\forall B \in \otimes_{i \in I} \mathcal{E}_i : \left(\pi_I^J\right)^{-1}(B) \in \otimes_{j \in J} \mathcal{E}_j$.
3. $\otimes_{t \in T} \mathcal{E}_t = \sigma\left\{\pi_t^{-1}(B_t), B_t \in \mathcal{E}_t, t \in T\right\}$.

Якщо σ-алгебра породжена деяким класом множин, тоді кожна множина σ-алгебри визначена зліченною кількістю множин цього класу.

Теорема А.6 (про структуру породженої σ-алгебри)**.** *Нехай E – деякий простір, $\mathcal{K}$ – непорожній клас підмножин з E, тоді $\sigma(\mathcal{K})$ можна розглядати як клас множин $A \subset E : A \in \sigma(\mathcal{I})$, для деякого не більш ніж зліченного підкласу $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$.*

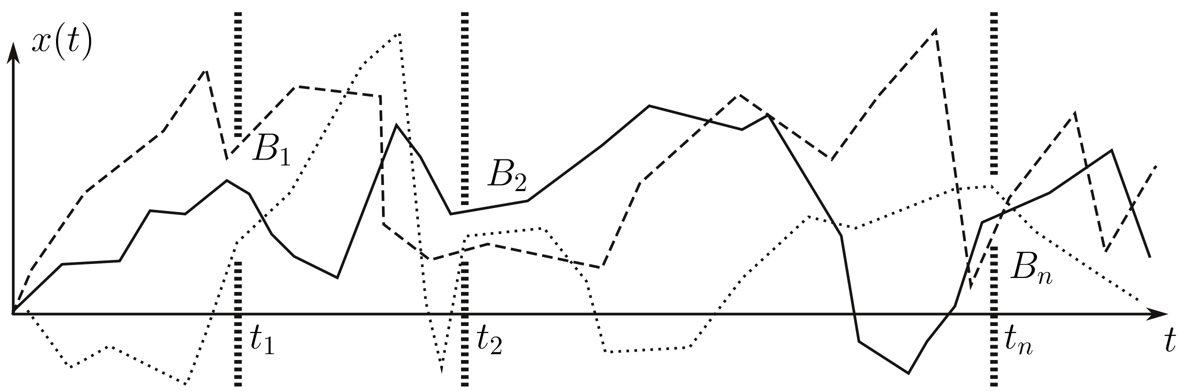


Рис. А.2. Вимірний циліндр на просторі функцій з прямокутною основою

Доведення. Позначимо через $\mathcal{E}$ клас множин, визначений в умові теореми, і покажемо, що

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{K}).$$

Дійсно, для будь-якого $B \in \mathcal{K}$, $B \in \sigma(\mathcal{I})$, де $\mathcal{I} = \{B\} \subset \mathcal{K}$, тобто $B \in \mathcal{E}$. Для будь-якого $A \in \mathcal{E}$, $A \in \sigma(\mathcal{I})$, де $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$, отже $A \in \sigma(\mathcal{K})$.

Далі, покажемо, що клас $\mathcal{E}$ утворює σ-алгебру. Дійсно, якщо $A \in \mathcal{E}$: $A \in \sigma(\mathcal{I})$, для деякого зліченного $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$, тоді $\bar{A} \in \sigma(\mathcal{I})$, а значить $\bar{A} \in \mathcal{E}$. Нехай $A_i \in \mathcal{E}$, $i \in \mathbb{N}$, тоді існують зліченні підкласи $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{K}$, $i \in \mathbb{N}$, що $A_i \in \sigma(\mathcal{I}_i)$. Позначимо $\mathcal{I} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{I}_i$, так визначений клас є зліченним підкласом класу $\mathcal{K}$ та $\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i \in \sigma(\mathcal{I})$, тобто, $\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i \in \mathcal{E}$. □

Наслідок А.2 (про структуру σ-алгебри циліндричних множин)**.** *Нехай маємо непорожні простори Хаусдорфа $\{E_t, \mathcal{T}_t\}_{t\in T}$ зі зліченною базою. Для довільної множини A з σ-алгебри циліндричних множин $\otimes_{t\in T}\mathcal{B}(E_t)$ існує не більше ніж зліченна множина індексів $t_1, t_2, \ldots$ з T та множина $B \in \otimes_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}(E_{t_i})$ такі, що*

$$A = \{x \in \times_{t\in T}E_t : (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots) \in B\}.$$

Завдання 37. *Показати, що*

$$\otimes_{t\in T}\,\mathcal{E}_t = \sigma\left\{\cup_{I\subset T, I-\text{скінченне}}\left\{\pi_I^{-1}(B), B \in \otimes_{i\in I}\mathcal{E}_i\right\}\right\} = \\ = \cup_{I\subset T, I-\text{зліченне}}\left\{\pi_I^{-1}(B), B \in \otimes_{i\in I}\mathcal{E}_i\right\}.$$

Приклад (простір дійсних функцій)**.** Нехай $T = [0, \infty)$ та $\{E_t, \mathcal{E}_t\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, $\forall t \in T$, тоді $\mathbb{R}^T$ визначає простір дійсних функцій $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Покажемо, що σ-алгебра циліндричних множин $\otimes_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ не містить множину всіх функцій обмежених по модулю деякою константою $c > 0$.

Позначимо через

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^T : |x(t)| < c, \forall t \in T\right\}$$

згідно наслідку про структуру σ-алгебри циліндричних множин існують $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ з T та $B \in \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{B}(\mathbb{R})$, що

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^T : (x(t_1), x(t_2), \ldots) \in B\right\}.$$

За побудовою функція $y(t) = c/2$ належить A, а значить $(y(t_1), y(t_2), \ldots) \in B$. Розглянемо функцію

$$z(t) = \begin{cases} c/2, & t \in \{t_i\}, \\ 2c, & t \notin \{t_i\}. \end{cases}$$

За побудовою даної функції $(y(t_1), \ldots) = (z(t_1), \ldots)$, а значить,

$$z \in \left\{x \in \mathbb{R}^T : (x(t_1), x(t_2), \ldots) \in B\right\},$$

проте $z \notin A$. Одержана суперечність вказує на хибність припущення, що A є елементом σ-алгебри циліндричних множин.

Вправа А.27. Показати, що множина усіх дійсних функцій неперервних в точці $t_0 \in T$ не є елементом σ-алгебри циліндричних множин.

Наведений приклад демонструє, що σ-алгебра циліндричних множин на $\mathbb{R}^T$ є недостатньо "багатою", ціла низка важливих множин невимірні. Звуження класу розглядуваних функцій дозволяє розв'язати проблему.

Позначимо через $C_{[0,\infty)}$ множину усіх дійсних неперервних на $[0,\infty)$ функцій, а через $\mathcal{E}$ відповідну σ-алгебру циліндричних множин. Задамо топологію на $C_{[0,\infty)}$, що має базу відкритих куль в метриці

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\left(\sup_{0\le t\le n} \mid x(t) - y(t) \mid, 1\right).$$

В цьому випадку отримаємо топологію рівномірної збіжності на компактних множинах. Позначимо також через $\mathcal{B}\left(C_{[0,\infty)}\right)$ відповідну σ-алгебру борелевих множин.

Завдання. *Показати, що*

$$d_0\left(f,g\right) = \sup_{t\in[0,\infty)} \left(1 \wedge \left|f\left(t\right) - g\left(t\right)\right|\right)$$

визначає метрику на $C_{[0,\infty)}$. Показати, що збіжність послідовності функцій за цієї метрики еквівалентна рівномірній збіжності на $[0,\infty)$, а також показати, що простір з топологією, породженою цією метрикою, не сепарабельний. Показати, що

$$d\left(f,g\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{t\in[0,n]} \left(1 \wedge \left|f\left(t\right) - g\left(t\right)\right|\right)$$

визначає метрику на $C_{[0,\infty)}$. Довести, що збіжність послідовності функцій за цієї метрики еквівалентна рівномірній збіжності на будь-якій компактній підмножині $[0,\infty)$, а також показати, що відповідний простір сепарабельний.

Теорема А.7 (про σ-алгебру циліндричних множин для неперервних функцій)**.** *На просторі неперервних функцій σ-алгебра циліндричних множин збігається з σ-алгеброю борелевих множин, породженою топологією рівномірної збіжності на компактних множинах.*

Доведення. Внаслідок зліченності бази евклідової топології на $\mathbb{R}^n$ як породжуючий клас для σ-алгебри циліндричних множин можемо взяти клас вимірних циліндрів з основами виду $G_1 \times \ldots \times G_n$, де G_i – відкриті множини на $\mathbb{R}$. Покажемо, що

$$Cyl_{t_1,\ldots,t_n}\left(G_1 \times \ldots \times G_n\right) \in \mathcal{T}_d.$$

Нехай $x, x_n \in C_{[0,\infty)}$: $d\left(x_n, x\right) \to 0$, $n \to \infty$, і припустимо, що $x_n\left(t_0\right)$ не збігається до x_{t_0} в евклідовій топології для деякого $t_0 \geq 0$. Тобто, що

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n_N \geq N : \left|x_{n_N}\left(t_0\right) - x_{t_0}\right| \geq \varepsilon.$$

Визначимо k_0 як мінімальне ціле, що $t_0 \in [0, k_0]$. Тоді, з однієї сторони,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\sup_{t\in[0,k]}\left|x_n\left(t\right) - x_t\right| \wedge 1\right) \to 0, n \to \infty.$$

Але, з іншої, $\forall N\ \exists n_N \geq N$:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\sup_{t\in[0,k]}\left|x_{n_N}\left(t\right) - x_t\right| \wedge 1\right) \geq$$
$$\geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\left|x_{n_N}\left(t_0\right) - x_{t_0}\right| \wedge 1\right) \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2^{k_0-1}}.$$

Значить, $\forall t \geq 0$ відображення $\pi_t : C_{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$ визначене як $\pi_t\left(x\right) = x_t$ неперервне. Звідки для довільної відкритої множини G з $\mathbb{R}$ маємо $\pi_t^{-1}\left(G\right) \in \mathcal{T}_d$ і для довільних $G_1, \ldots, G_n$ відкритих в $\mathbb{R}$ та $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ отримаємо, що

$$\cap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}\left(G_i\right) = \left\{x \in C_{[0,\infty)} : \left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\right) \in G_1 \times \ldots \times G_n\right\} \in \mathcal{T}_d.$$

Отже, $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}\left(C_{[0,\infty)}\right)$.

Покажемо також, що $\mathcal{B}\left(C_{[0,\infty)}\right) \subset \mathcal{E}$. Внаслідок сепарабельності $\left\{C_{[0,\infty)}, \mathcal{T}_d\right\}$ достатньо показати, що для довільної функції $x \in C_{[0,\infty)}$ та числа $r > 0$ куля $B_r\left(x\right) = \{y \in C_{[0,\infty)} : d\left(x, y\right) < r\}$ належить $\mathcal{E}$. Це включення випливає з того, що на просторі неперервних функцій відкриту кулю можемо подати як

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\in\mathbb{N}} \cap_{t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{Q}_+} \left\{y \in C_{[0,\infty)} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k\left(y\right)}{2^k} < r - \frac{1}{n}\right\} =$$
$$= \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\in\mathbb{N}} \cap_{t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{Q}_+} Cyl_{t_1,\ldots,t_m}\left(B^m\right)$$

для деяких $B^m \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^m\right)$, де $a_k\left(y\right) = \max_{i=\overline{1,m}: t_i\in[0,k]} \left|x_{t_i} - y_{t_i}\right| \wedge 1$. □

Відмітимо, що клас функцій, для якого має місце доведена теорема, можна розширити до $D_{[0,T]}$ – класу функцій на $[0, T]$ неперервних справа та зі скінченними границями зліва. В цьому випадку необхідно застосувати топологію Скорохода[34], породжену метрикою

$$d(x,y)=\inf_{\Lambda}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(\lambda(t))|+\sup_{t\neq s\in[0,T]}\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right\},$$

де Λ – клас строго зростаючих неперервних функцій $\lambda(t)\,, t\in[0,T]$: $\lambda(0)=0$, $\lambda(T)=T$.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай E – довільна непорожня множина, та топологія $\mathcal{T}=\{\emptyset,E\}$. Показати, що $\partial A=\begin{cases}\emptyset, & A=\emptyset,\\ E\backslash A, & A=\{x\}\,,\\ E, & |A|\geq 2.\end{cases}$

2. Показати, що клас множин $\mathscr{B}$ є базою топології $\mathcal{T}$ тоді і тільки тоді, коли $\forall x\in E\ \forall G_x\in\mathcal{T}\ \exists O\in\mathscr{B}$: $x\in O\subset G_x$.

3. Показати що клас множин $\mathscr{B}$ простору E є базою деякої топології тоді і тільки тоді, коли: 1) $\forall x\in E:\exists O\in\mathscr{B}:x\in O$; 2) $\forall O_1,O_2\in\mathscr{B},\forall x\in O_1\cap O_2,\exists O\in\mathscr{B}:x\in O\subset O_1\cap O_2$.

4. Показати, що множина $\left\{x\in R^\infty:\exists\lim\limits_{m\to\infty}x_m<\infty\right\}$ належить $\mathcal{B}(R^\infty)$.

5. Нехай $T=[0,1]$. Показати, що множина $\left\{x\in\mathbb{R}^T:\exists t\in[0;1]:x_t=0\right\}$ не належить $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^T\right)$.

A.3. Простори з мірою

Визначення. Нехай $\{E,\mathcal{E}\}$ – вимірний простір, *мірою* на $\{E,\mathcal{E}\}$ називають невід'ємне відображення ν, задане на множинах з $\mathcal{E}$, і яке задовольняє такі умови:

$$\nu(\emptyset)=0$$

та

$$\nu\left(\vee_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i)\,,$$

для довільних несумісних множин $A_i\in\mathcal{E},i\in\mathbb{N}$.

Приклад (дискретна міра). Нехай простір E зліченний або скінченний, $\mathcal{E}=\mathscr{L}(E)$ і нехай $\{\nu_x\}_{x\in E}$ – сукупність невід'ємних чисел. Тоді відображення

$$\nu(A)=\sum_{x\in A}\nu_x$$

[34] Див. детальніше Chapter 3 в *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. Toronto: John Wiley & Sons, 1999.

визначає міру на $\{E, \mathcal{E}\}$. Числа ν_x називають *масою* точок $x \in E$. Якщо маса усіх точок дорівнює одиниці, то міру ν називають *рахуючою*.

Визначення. Міру ν називають *скінченною*, якщо $\nu(E) < \infty$. Міру ν називають *σ-скінченною*, якщо існує розбиття простору E на вимірні множини скінченної міри ν.

Завдання 38. *Нехай*

- *ν та ν' – дві σ-скінченні міри на $\{E, \mathcal{E}\}$,*
- *клас $\mathcal{K}$ є π-системою такою, що $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$,*
- *існує розбиття $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ простору E таке, що $E_i \in \mathcal{K}$ та $\nu(E_i) < \infty$.*

Показати, що з рівності $\nu = \nu'$ на $\mathcal{K}$ випливає рівність $\nu = \nu'$ на $\mathcal{E}$.

Для того, щоб побудувати міру достатньо її задати на деякому напівкільці $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$, що породжує σ-алгебру вимірних множин. При цьому ключовим є таке узагальнення теореми Каратеодорі[35].

Теорема А.8 (про продовження міри з напівкільця). *Нехай відображення ν_0, задане на напівкільці $\mathcal{N}$ зі значеннями з $[0, \infty]$, таке що*

$$\nu_0(\emptyset) = 0$$

і для довільних несумісних множин $A_i \in \mathcal{N} : A = \vee_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{N}$:

$$\nu_0(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_0(A_i)$$

та

$$\exists E_n \in \mathcal{N} : E_n \uparrow E, \nu_0(E_n) < \infty.$$

Тоді ν_0 можна однозначно довизначити до σ-скінченної міри ν на $\{E, \sigma(\mathcal{N})\}$:

$$\nu(A) = \nu_0(A), \forall A \in \mathcal{N}.$$

Зауважимо, що замість умови зліченної адитивності в теоремі можемо вимагати адитивність та зліченну напівадитивність.

Завдання 39. *Показати, що з теореми про продовження міри з напівкільця випливає теорема Каратеодорі: нехай відображення ν_0, задане на кільці $\mathcal{R}$ зі значеннями з $[0, \infty]$, таке що*

$$\nu_0(\emptyset) = 0$$

[35] Див. Theorem 1.53 в *Klenke A.* Probability theory: a comprehensive course. London: Springer, 2013.

і для довільних несумісних множин $A_i \in \mathcal{R}$, $A = \vee_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$*:*

$$\nu_0(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_0(A_i)$$

та

$$\exists E_n \in \mathcal{R} : E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \nu_0(E_n) < \infty.$$

Тоді існує єдина σ*-скінченна міра* ν *на* $\sigma(\mathcal{R})$*:*

$$\nu(A) = \nu_0(A), \forall A \in \mathcal{R}.$$

Вправа А.28. Показати, що скінченне відображення ν_0 на кільці $\mathcal{R}$, яке є скінченно адитивним та неперервним в нулі на $\mathcal{R}$, є зліченно адитивним на $\mathcal{R}$.

Приклад (міра Лебега-Стільт'єса)**.** Нехай функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неспадна та неперервна зліва (*узагальнена функція розподілу*), а $\mathcal{N}$ – напівкільце інтервалів $[a,b)$, $a \leq b$. Визначимо на $\mathcal{N}$ відображення ν_F^0 як

$$\nu_F^0([a,b)) = F(b) - F(a).$$

Так визначене відображення на $\mathcal{N}$ є невід'ємним, скінченно адитивним та $\nu_F^0(\emptyset) = 0$. Внаслідок неперервності зліва функції F для довільних $[a_i, b_i) \in \mathcal{N}$, $i \in \mathbb{N}$ та $[a,b) \in \mathcal{N}$: $[a,b) \subset \cup_{i\in\mathbb{N}}[a_i,b_i)$ маємо

$$\nu_F^0([a,b)) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_F^0([a_i,b_i)).$$

Тобто ν_F^0 є зліченно напіваддитивне. Більш того, дійсну пряму можемо подати як $\mathbb{R} = \vee_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1)$ і $F(n+1) - F(n) < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$. Звідки отримаємо σ-скінченність ν_F^0.

Отже, за теоремою про продовження міри з напівкільця існує єдина σ-скінченна міра ν_F на $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ така, що

$$\nu_F(A) = \nu_F^0(A), \forall A \in \mathcal{N}.$$

Під час побудови продовження застосовують зовнішню міру

$$\nu_*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_F^0(A_i) : A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{N}\right\}.$$

Єдиність випливає з того, що напівкільце є π-системою, і для будь-якої іншої міри ν', такої що

$$\nu'(A) = \nu_F^0(A), \forall A \in \mathcal{N},$$

будемо мати

$$\nu'(A) = \nu(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Отриману міру ν_F називають мірою Лебега-Стільт'єса, а якщо $F(x) = x$, то просто – мірою Лебега, яку позначатимемо як ℓ.

Аналогічно можемо задати міру Лебега-Стільт'єса на $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Для цього розглянемо функцію $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що задовольняє такі умови: вона неперервна зліва по кожному аргументу та $\Delta_{a_1 b_1} \ldots \Delta_{a_n b_n} F(x) \geq 0$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, де

$$\Delta_{a_i b_i} F(x) = F(x_1, \ldots, b_i, \ldots x_n) - F(x_1, \ldots, a_i, \ldots x_n).$$

Тоді на напівкільці множин виду $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ міра ν_F визначена як $\Delta_{a_1 b_1} \ldots \Delta_{a_n b_n} F(x)$.

Вправа A.29. Нехай $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – простори з мірами Лебега-Стільт'єса. Показати, що існує єдина σ-скінченна міра ν на $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ (*продакт міра*) така, що $\forall a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$,$i = \overline{1,n}$:

$$\nu([a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)) = \nu_1([a_1, b_1)) \times \ldots \times \nu_n([a_n, b_n)).$$

Нехай $\{E, \mathcal{E}\}$ – вимірний простір та припустимо, що одноточкові множини вимірні. Точку $x \in E$ називають атомом міри ν, якщо

$$\nu(\{x\}) > 0.$$

Міру називають *неперервною*, якщо вона не має атомів. Міру називають *атомарною*, якщо множина атомів D зліченна, та

$$\nu(E \backslash D) = 0.$$

Наприклад, міра Лебега неперервна, а міра Дірака

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0, & x_0 \notin A, \\ 1, & x_0 \in A, \end{cases}$$

атомарна. Будь-яку σ-скінченну міру можна подати як суму атомарної та неперервної мір[36].

Важливою властивістю скінченної міри на польському просторі є регулярність (inner regularity).

Теорема A.9 (про наближення компактом довільної борелевої множини)**.** *Нехай*

[36]Див., наприклад, Theorem 2.1. в *Johnson R.A.* Atomic and Nonatomic. Measures. Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 25. P. 650–655.

- $\{E, \mathcal{T}\}$ – *польський простір,*
- $\mathcal{E}$ – *σ-алгебра борелевих множин,*
- ν – *скінченна міра.*

Для довільної множини $A \in \mathcal{E}$ та для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує компакт $K_\varepsilon \subset A$, що

$$\nu\left(A \backslash K_\varepsilon\right) \leq \varepsilon.$$

Доведення. Нехай d – метрика, що породжує $\mathcal{T}$, та $\{x_n\}$ – зліченна усюди щільна множина з E. Розглянемо сім'ю замкнених куль

$$B_{n,k} = \operatorname{cl}\left(B_{1/k}\left(x_n\right)\right).$$

Оскільки $\{x_n\}$ усюди щільна множина, маємо $\cup_{n=1}^{\infty} B_{n,k} = E$. Позначимо

$$B_n^k = \cup_{i=1}^{n} B_{i,k}.$$

Так визначена послідовність множин є неспадною та $\cup_{n=1}^{\infty} B_n^k = E$, тоді за неперервністю міри ν маємо

$$\nu\left(E\right) = \lim_{n \to \infty} \nu\left(B_n^k\right).$$

Звідки,

$$\forall k : \exists n_k : \nu\left(E\right) - \nu\left(B_{n_k}^k\right) \leq \varepsilon / 2^{k+1}.$$

Позначимо

$$K_\varepsilon = \cap_{k=1}^{\infty} B_{n_k}^k$$

і покажемо, що ця множина є цілком обмежена. Для довільного $\delta > 0$ визначимо скінченну множину A як $\{x_i\}_{i=1}^{n_m}$, $m = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, тоді

$$\forall x \in K_\varepsilon \exists y \in A : d\left(x, y\right) < \delta.$$

Дійсно, якщо $x \in K_\varepsilon$, то $x \in B_{n_m}^m$ та існує $i_0 \leq n_m$: $x \in B_{i_0,m}$, звідки $d\left(x, x_{i_0}\right) \leq \frac{1}{m} < \delta$. Враховуючи що K_ε замкнена множина, робимо висновок що K_ε компакт. Покажемо, що K_ε наближає відповідним чином множину E:

$$\nu\left(E \backslash K_\varepsilon\right) = \nu\left(E \backslash \cap B_{n_k}^k\right) = \nu\left(\cup_k \left(E \backslash B_{n_k}^k\right)\right) \leq$$
$$\leq \sum_k \nu\left(E \backslash B_{n_k}^k\right) = \sum_k \left(\nu\left(E\right) - \nu\left(B_{n_k}^k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \varepsilon.$$

Замкнена підмножина польського простору є польським простором, тобто теорема має місце для будь-якої замкненої множини. Покажемо, що твердження теореми має місце для довільної множини з $\mathcal{E}$.

По-перше, позначимо через $\mathcal{A}$ клас множин $B \in \mathcal{E}$, які мають таке подання

$$B = \cup_n F_n = \cap_m G_m,$$

де F_n – деякі замкнені множини та G_m – деякі відкриті множини, і покажемо, що цей клас є алгеброю. Дійсно,

$$\forall B \in \mathcal{A} : \bar{B} = \cap_n \bar{F}_n = \cup_m \bar{G}_m \in \mathcal{A}.$$

Крім того, для довільних $B = \cup_n F_n = \cap_m G_m$ та $B' = \cup_l F'_l = \cap_k G'_k$ маємо

$$B \cap B' = \cup_{n,l} \left(F_n \cap F'_l\right) = \cap_{m,k} \left(G_m \cap G'_k\right) \in \mathcal{A}.$$

Покажемо також, що клас $\mathcal{A}$ містить усі замкнені множини. Нехай F – деяка замкнена множина, тоді

$$F = F \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots = \cap_m G_m,$$

де $G_m = \cup_{x \in F} B_{1/m}(x)$ – відкриті множини, звідки $F \in \mathcal{A}$.

По-друге, розглянемо клас $\mathcal{K}$ підхожих множин $B \subset E$, для яких існує компакт K_ε, що

$$\nu\left(B \backslash K_\varepsilon\right) \leq \varepsilon,$$

і покажемо, що він монотонний. Нехай маємо зростаючу послідовність множин $B_n \subset B_{n+1} \in \mathcal{K}$, тоді існує послідовність компактів $K_n \subset B_n$:

$$\nu\left(B_n \backslash K_n\right) \leq \varepsilon/2^{n+1}.$$

Позначимо $B = \cup_n B_n$, за властивістю неперервності міри $\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n)$, тоді існує номер n_0, для якого

$$\nu(B) - \nu\left(B_{n_0}\right) < \varepsilon/2.$$

Визначимо K_ε як $\cup_{n=1}^{n_0} K_n$, так визначена множина є компактом, причому з $K_n \subset B_n$ маємо, що $K_\varepsilon \subset B_{n_0}$. Більш того,

$$\begin{aligned}\nu\left(B \backslash K_\varepsilon\right) = \nu\left(\left(B \backslash B_{n_0}\right) \cup \left(B_{n_0} \backslash K_\varepsilon\right)\right) = \nu\left(B \backslash B_{n_0}\right) + \nu\left(B_{n_0} \backslash \left(\cup_{n=1}^{n_0} K_n\right)\right) \leq \\ \leq \varepsilon/2 + \nu\left(\left(\cup_{n=1}^{n_0} B_n\right) \backslash \left(\cup_{n=1}^{n_0} K_n\right)\right) \leq \varepsilon/2 + \nu\left(\cup_{n=1}^{n_0}\left(B_n \backslash K_n\right)\right) \leq \\ \leq \varepsilon/2 + \sum_{n=1}^{n_0} \nu\left(B_n \backslash K_n\right) \leq \varepsilon/2 + \sum_{n=1}^{n_0} \varepsilon/2^{n+1} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Звідки, $B \in \mathcal{K}$, аналогічно маємо, що перетин спадаючої послідовності також міститься в $\mathcal{K}$.

Покажемо далі, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. Дійсно,

$$\forall B \in \mathcal{A} : B = \cup_n F_n = \cup_n \left(\cup_{k=1}^{n} F_k\right) = \cup_n F'_n,$$

де $F_n' = \cup_{k=1}^n F_k$ – замкнені множини. Раніше було доведено, що замкнені множини належать класу $\mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K}$ монотонний, він містить також і об'єднання зростаючої послідовності замкнених множин F_n', тобто $B \in \mathcal{K}$. За теоремою про породжені класи $\mu(\mathcal{A}) \subset \mu(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, а оскільки монотонний клас, породжений алгеброю, є σ-алгеброю, маємо $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$. Враховуючи, що клас $\mathcal{A}$ містить усі замкнені множини, одержимо що $\sigma(\mathcal{A})$ містить усі відкриті множини, тобто $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Отже, $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$. $\square$

Визначення. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ – деякий вимірний простір. Скінченну міру P задану на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, для якої $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, називають *імовірнісною*, а сам простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ імовірнісним.

Вправа A.30. Нехай ν_F – міра Лебега-Стільт'єса на $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, для якої функція розподілу задовольняє додаткову умову $\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(-x)) = = 1$. Показати, що тоді $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu_F\}$ – імовірнісний простір. Визначити умову на $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, за якої простір $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \nu_F\}$ імовірнісний.

Завдання 40.

1. *Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір та $\mathcal{A}$ – алгебра множин з Ω, причому $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Застосовуючи метод підхожих множин, довести, що $\forall \varepsilon > 0$ та $B \in \mathcal{F}$ $\exists A \in \mathcal{A}$:*

$$\mathsf{P}(A \Delta B) \le \varepsilon.$$

2. *Показати, що ця властивість має місце також, якщо $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – довільний простір зі σ-скінченною мірою, яка є σ-скінченною і на $\mathcal{A}$, та $\mathsf{P}(B) < \infty$.*

Вправа A.31. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір. Визначимо клас $\bar{\mathcal{F}}$ множин виду $A \cup B$, де $A \in \mathcal{F}$ та $B \subset \Omega$: $\exists C \in \mathcal{F}$, $B \subset C$ та $\mathsf{P}(C) = 0$. Показати, що $\bar{\mathcal{F}}$ утворює σ-алгебру, та співвідношення

$$\bar{\mathsf{P}}(A \cup B) = \mathsf{P}(A)$$

довизначає ймовірнісну міру на $\bar{\mathcal{F}}$.

Вказівка. Застосувати, що для $A, B \subset C$:

$$A \backslash B = (A \backslash C) \cup (A \cap C \backslash B)$$

та

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \backslash B.$$

Вправа A.32. Нехай

$$B \in \mathcal{F}, A \subset \Omega : A \Delta B \subset C, \mathsf{P}(C) = 0,$$

показати, що тоді

$$A \in \bar{\mathcal{F}}.$$

Визначення. Імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ називають *повним*, якщо $\mathcal{F}$ збігається з $\bar{\mathcal{F}}$.

Повнота ймовірнісного простору означає, що σ-алгебра подій містить усі підмножини множин нульової ймовірності. Розгляд саме повного простору в багатьох випадках виправдане тим, що це дозволяє вивчати ймовірності більш широкого класу подій. Відмітимо, що коли розглядають деяку під-σ-алгебру $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, то для її поповнення включають усі підмножини множин нульової ймовірності з $\mathcal{F}$ (а не $\mathcal{F}_0$).

Приклад (множини Лебега). Нехай

$$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \{[0,1], \mathcal{B}([0,1]), \ell\},$$

де ℓ – міра Лебега: $\ell([a,b]) = b - a$. Поповнення $\bar{\mathcal{F}}$ називають σ-алгеброю множин Лебега. Покажемо, що існують множини Лебега, які не є борелевими.

Нехай функція $f : [0,1] \to [0,2]$ визначена як сума функції Кантора $c(x)$[37] та $g(x) = x$ (див. рис. A.3.). Ця функція є строго зростаючою та неперервною, тому образ борелевої множини є борелева множина. Дійсно, позначимо

$$\mathcal{K} = \{A \subset [0,1] : f(A) \in \mathcal{B}([0,2])\}.$$

За властивостями образів функції цей клас утворює σ-алгебру. Крім того, враховуючи що для довільного замкненого відрізку $[a,b] \subset [0,1]$: $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (за теоремою про проміжне значення неперервної функції), виводимо що цей клас містить усі замкнені множини. Звідки, $\mathcal{B}[0,1] \subset \mathcal{K}$.

Далі, нехай C – множина Кантора, тоді $f(C)$ борелева множина (оскільки C замкнена). Позначимо через I_k інтервали, на яких функція Кантора стала, тоді з однієї сторони

$$\ell(f([0,1] \setminus C)) = \ell(\vee_k f(I_k)) = \sum_k \ell(I_k) = 1.$$

А з іншої сторони,

$$2 = \ell([0,2]) = \ell(f[0,1]) = \ell(f([0,1] \setminus C)) + \ell(f(C)) = 1 + \ell(f(C)).$$

[37]Функція Кантора $c(x)$ ставить у відповідність числу $0.a_1a_2\ldots$ у трійковій системі числення число $0.b_1b_2\ldots$ у двійковій системі, де b_i визначені за таким алгоритмом. Позначимо $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i = 1\}$ та покладемо $i_0 = \infty$, якщо $a_i \neq 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, тоді $b_i = \begin{cases} 0, & a_i = 0, \\ 1, & a_i = 2, \end{cases}$ для $i < i_0$, та якщо $i_0 < \infty$: $b_{i_0} = 1$ і $b_i = 0$ для $i > i_0$. Так визначена функція є неспадною неперервною з майже усюди рівною нулю похідною. Множина, на якій похідна не визначена, є множиною Кантора.

Для графічного зображення функції Кантора зручно застосувати послідовність функцій $c_n(x)$, визначених рекурентно (див. алгоритм 11)

$$c_n(x) = \begin{cases} \frac{c_{n-1}(3x)}{2}, & 0 \le x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1 + c_{n-1}(3x-2)}{2}, & \frac{2}{3} \le x \le 1, \end{cases} n \in \mathbb{N}; c_0(x) = x.$$

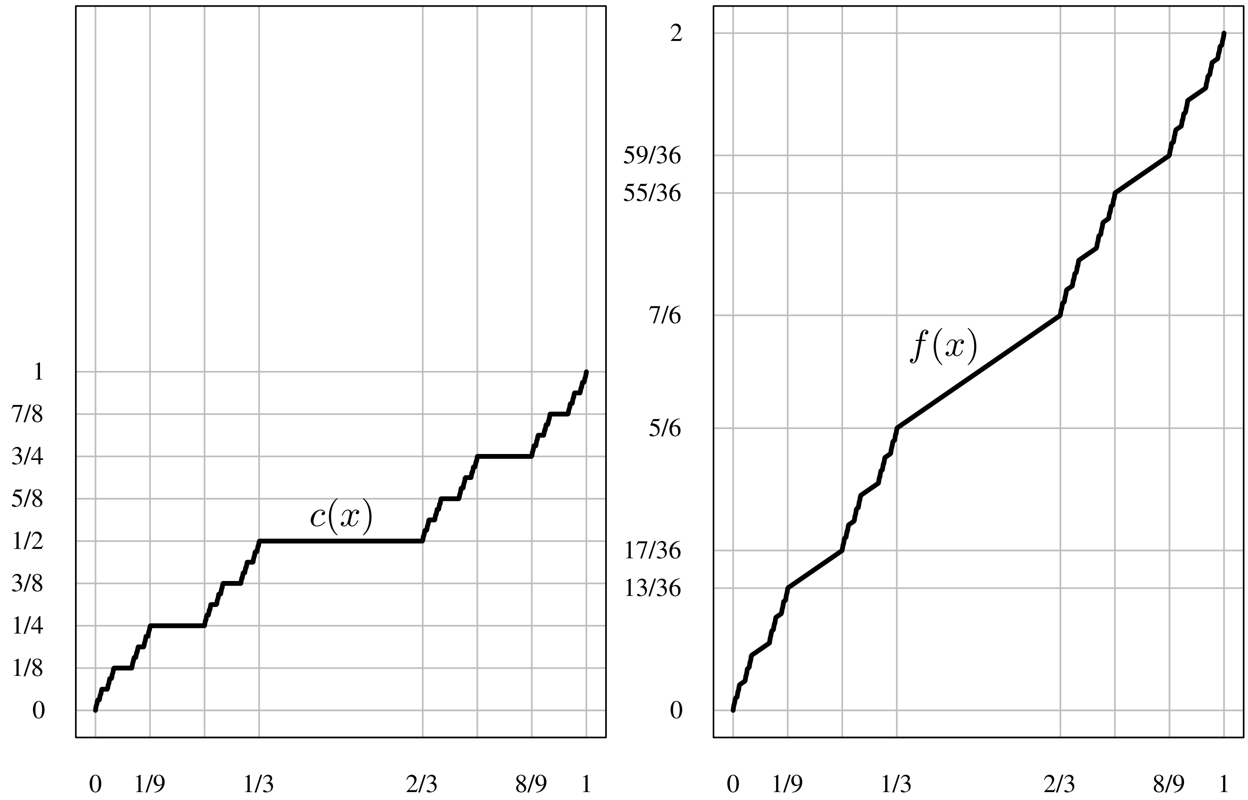


Рис. А.3. Функція Кантора та її перетворення

Отже, $\ell\left(f\left(C\right)\right) = 1$.

Оскільки будь-яка множина додатної міри містить невимірну підмножину (наприклад, множину Віталі[38]), маємо що існує невимірна множина $V \subset f\left(C\right)$ і, враховуючи що f бієктивна, одержуємо $f^{-1}\left(V\right) \subset C$. Множина Кантора має міру Лебега 0 і будь-яка підмножина множини міри 0 є множиною Лебега міри 0, тобто $\bar{\ell}\left(f^{-1}\left(V\right)\right) = 0$. Проте, $f^{-1}\left(V\right)$ – не борелева множина, в іншому випадку $f\left(f^{-1}\left(V\right)\right) = V$ мала бути борелевою, що суперечить визначенню V. Отже, $f^{-1}\left(V\right)$ є множиною Лебега, яка не є множиною Бореля.

Завдання 41. *Нехай* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\} = \left\{[0,1], \bar{\mathcal{B}}\left([0,1]\right), \bar{\ell}\right\}$, *де* $\bar{\mathcal{B}}\left([0,1]\right)$ – σ*-алгебра множин Лебега. Показати, що продакт простір* $\{\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathsf{P} \times \mathsf{P}\}$ *не є повний.*

Завдання 42. *Нехай* $\{E_i, \mathcal{E}_i, \nu_i\}$ *– простори з мірою,* $\bar{\mathcal{E}}_i$ *– поповнені* σ*-алгебри за мірою* ν_i, $i = 1, 2$. *Показати, що поповнення продакт* σ*-алгебр* $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ *та* $\bar{\mathcal{E}}_1 \otimes \bar{\mathcal{E}}_2$ *збігаються.*

Розглянемо побудову ймовірнісної міри на продакт-просторі. Нехай маємо сім'ю польських просторів $\{\Omega_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_i$ – σ-алгебри борелевих

[38] Розглянемо клас множин $A_x = \{\mathrm{frac}(x+r), r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$, де $\mathrm{frac}\,(x)$ – дробова частина числа x. Відмітимо, що частина множин збігається між собою, зокрема, $A_{r_1} = A_{r_2}$, $\forall r_1, r_2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Індекси таких множин утворюють клас еквівалентності. Виберемо по одному x для кожного класу еквівалентності і позначимо отриману множину як V. Припустимо, що $V \in \mathcal{B}([0,1])$ та $\ell(V) = m$. Визначимо $V_x = \{\mathrm{frac}\,(x+v), v \in V\}$, внаслідок інваріантності по зсуву міри Лебега маємо $\ell(V_x) = m$. Крім того, $\vee_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} V_x = [0,1]$, тоді $\sum_{x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} m = 1$, що неможливо для будь-якої сталої m.

Алгоритм 11 Побудова наближення функції Кантора

```
cantorstairs<-function(x,n){
if (n==0){return(x)} else{
  if(0 <= x & x < 1/3){
     return(cantorstairs(3*x,n-1)/2)
 } else if(1/3 <= x & x < 2/3){
     return(1/2)
 } else {
     return((1+cantorstairs(3*x-2,n-1))/2)}}}
x<-seq(0,1,0.001)
c_x <- sapply(x, cantorstairs, n = 10)
f_x<-c_x+x
plot(c_x~x,type="l")
plot(f_x~x,type="l")
```

множин, і нехай $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$ – імовірнісні міри на $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1\}$, $\{\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2\}$, $\ldots$, які задовольняють *умову узгодженості*:

$$\mathsf{P}_{n+1}\left(B^n \times \Omega_{n+1}\right) = \mathsf{P}_n\left(B^n\right), \forall B^n \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i, n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через B^* вимірний циліндр в просторі $\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$ з основою $B^n \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, тобто

$$B^* = \left\{\omega \in \times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}.$$

Відмітимо, що маючи скінченну кількість вимірних циліндрів, можемо вважати, що їх основи мають однакову розмірність. Дійсно, нехай маємо два циліндри A^* та B^* з відповідними основами $A \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ та $B \in \otimes_{i=1}^{n+k} \mathcal{F}_i$, $n, k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $C = A \times \Omega_{n+1} \times \cdots \times \Omega_{n+k}$ та через C^* циліндр з основою C. Оскільки $C^* = A^*$, узявши до розгляду замість A^* множину C^*, отримаємо ту ж саму пару циліндрів, проте вже з однаковою розмірністю основ.

Теорема А.10 (Данієля про продовження міри на $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i\}$). *Існує едина ймовірнісна міра* P *на* $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i\}$ *така, що для довільного вимірного циліндру* B^* *в просторі* $\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i$ *з основою* $B \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, $n \in \mathbb{N}$, *маємо*

$$\mathsf{P}\left(B^*\right) = \mathsf{P}_n\left(B\right).$$

Доведення. Визначимо відображення P на вимірних циліндрах B^* з основами B розмірності n як $\mathsf{P}\left(B^*\right) = \mathsf{P}_n\left(B\right)$. Узгодженість мір P_n забезпечує коректність такого означення. Розглянемо циліндри B_i^* з основами B_i, $i = 1, \ldots, k$, як було зазначено раніше можемо вважати, що усі основи мають однакову розмірність, скажімо, n. Довизначимо P для об'єднання циліндрів як $\mathsf{P}_n\left(\cup_{i=1}^k B_i\right)$. Якщо циліндри несумісні, маємо що основи також мають бути несумісними, тому

$$\mathsf{P}\left(\vee_{i=1}^{k}B_i^*\right)=\mathsf{P}_n\left(\vee_{i=1}^{k}B_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathsf{P}_n\left(B_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathsf{P}\left(B_i^*\right).$$

Тобто, P є скінченно адитивним на алгебрі скінченних об'єднань вимірних циліндрів. Якщо показати, що P є зліченно-адитивним на цій алгебрі, тоді за теоремою про продовження міри з напівкільця його можна буде однозначно продовжити до ймовірнісної міри на $\otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i$. Для цього достатньо показати неперервність в нулі.

Припустимо, що існує послідовність циліндрів $B_n^*\downarrow\emptyset$, проте

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(B_n^*\right)=\delta>0.$$

Позначимо через m_n розмірності основ для B_n^*, і без втрати загальності припустимо, що $\{m_n\}$ – зростаюча послідовність. Оскільки основи борелеві, за теоремою про наближення компактом довільної борелевої множини існують компакти $C_n\subset B_n$:

$$\mathsf{P}_{m_n}\left(B_n\backslash C_n\right)\le\delta/2^{n+1}.$$

Позначимо через C_n^* циліндри з основами C_n, тоді

$$\mathsf{P}\left(B_n^*\backslash C_n^*\right)\le\delta/2^{n+1}.$$

Визначимо циліндр D_n^* як $\cap_{k=1}^{n}C_k^*$ і нехай D_n визначає основу цієї множини. Враховуючи, що множини B_n^* спадають, маємо

$$\mathsf{P}\left(B_n^*\backslash D_n^*\right)\le\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(B_n^*\backslash C_k^*\right)\le\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left(B_k^*\backslash C_k^*\right)\le\delta/2.$$

Звідки виводимо

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(D_n^*\right)\ge\delta/2>0.$$

Покажемо, що це суперечить тому, що $D_n^*\downarrow\emptyset$.

Виберемо в кожній множині D_n^* по одній точці

$$x_n=\left(x_n\left(1\right),x_n\left(2\right),\dots\right),$$

тоді $\forall k\in\mathbb{N}$ послідовність $\left\{\left(x_n\left(1\right),\dots,x_n\left(m_k\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ міститься в D_k. Оскільки D_1 – компакт, з приналежності $\left(x_n\left(1\right),\dots,x_n\left(m_1\right)\right)\in D_1$ маємо що існує збіжна підпослідовність

$$\left(x_{n_i^1}\left(1\right),\dots,x_{n_i^1}\left(m_1\right)\right)\to\left(y_1,\dots,y_{m_1}\right)\in D_1.$$

Знов, оскільки усі $\left(x_{n_i^1}(1), \ldots, x_{n_i^1}(m_2)\right)$ належать компакту D_2, існує збіжна підпослідовність

$$\left(x_{n_i^2}(1), \ldots, x_{n_i^2}(m_2)\right) \to (y_1, \ldots, y_{m_2}) \in D_2,$$

тощо. Позначимо $l_k = n_k^k$ (тобто, розглянемо діагональну послідовність), тоді

$$x_{l_k}(i) \to y_i, i \in \mathbb{N},$$

причому послідовність

$$(y_1, y_2, \ldots) \in D_n^*, \forall n \in \mathbb{N},$$

що суперечить припущенню, що $D_n^* \downarrow \emptyset$. Отримана суперечність доводить неперервність відображення P в нулі. $\square$

Приклад (імовірнісні міри на просторі числових послідовностей)**.** Нехай $\Omega = \mathbb{R}^\infty$ і нехай маємо функції розподілу $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, визначені на $\mathbb{R}$. Задамо функцію розподілу на $\mathbb{R}^n$ як

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$$

і позначимо через P_n відповідні розподіли на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Отримана сім'я ймовірнісних мір узгоджена і тому за теоремою Даніеля про продовження міри на $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i\}$ існує єдина ймовірнісна міра на $\{\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\}$, для якої $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: $\mathsf{P}\{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \ldots, x_n) \in B\} = \mathsf{P}_n(B)$, зокрема, маємо що

$$\mathsf{P}\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n\} = G_n(y_1, \ldots, y_n).$$

Наприклад, якщо узяти як $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ функції розподілу Бернуллі:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ q, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

тоді P визначає ймовірнісну міру на просторі послідовностей $\left\{\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\Omega)\right\}$, для якої

$$\mathsf{P}\{\omega : \omega_1 = \varepsilon_1, \ldots, \omega_n = \varepsilon_n\} = (1-q)^{\sum \varepsilon_i} q^{n-\sum \varepsilon_i},$$

де $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Якщо ж

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

то P визначає ймовірнісну міру на $\{[0,1]^\infty, \mathcal{B}([0,1]^\infty)\}$, яка циліндрам з прямокутною основою $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$, $0\le a_i<b_i\le 1$, в кубі нескінченної розмірності ставить у відповідність міру Лебега цих прямокутників:

$$\mathsf{P}\left\{x\in[0,1]^\infty : x_i\in[a_i,b_i], i=\overline{1,n}\right\}=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

Теорема Данієля про продовження міри на $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i\}$ має місце для довільних польських просторів, і за додаткових обмежень на міри P_n твердження можна узагальнити на будь-які вимірні простори. Якщо відштовхуватись лише від умови узгодженості, то гарантувати існування міри для випадку довільних вимірних просторів не вдасться.

Приклад (істотність умов теореми Данієля)**.** Візьмемо як простір Ω інтервал $(0,1]$, і задамо на ньому відображення

$$f_n(\omega)=\begin{cases}0, & \omega\notin(0,1/n),\\ 1, & \omega\in(0,1/n).\end{cases}$$

Визначимо послідовність класів $\mathcal{K}_n$ множин $A\subset\Omega$, для яких $\exists B_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,n}$, що

$$A=\{\omega : (f_1(\omega),\ldots,f_n(\omega))\in B_1\times\ldots\times B_n\}.$$

Враховуючи, що

$$\{(f_1,\ldots,f_n)\in B_1\times\ldots\times B_n\}=\{(f_1,\ldots,f_n,f_{n+1})\in B_1\times\ldots\times B_n\times\mathbb{R}\},$$

маємо $\mathcal{K}_n\subset\mathcal{K}_{n+1}$. На множинах A класу $\mathcal{K}_n$ визначимо відображення

$$\mathsf{P}_n(A)=\begin{cases}1, & (1,\ldots,1)\in B_1\times\ldots\times B_n,\\ 0, & (1,\ldots,1)\notin B_1\times\ldots\times B_n.\end{cases}$$

Відмітимо, що так визначена сім'я відображень задовольняє умові узгодженості:

$$\forall A\in\mathcal{K}_n : \mathsf{P}_{n+1}(A)=\mathsf{P}_n(A).$$

Цю сім'ю відображень можемо довизначити до ймовірнісних мір на $\{\Omega,\mathcal{F}_n\}$, де $\mathcal{F}_n=\sigma(\mathcal{K}_n)$, для яких виконується умова узгодженості. Припустимо, що існує міра P на $\{\Omega,\mathcal{F}\}$, де $\mathcal{F}=\sigma(\cup_n\mathcal{F}_n)$, для якої $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}_n(A)$, $\forall A\in\mathcal{F}_n$. Тоді $\forall n\in\mathbb{N}$ множини

$$A_n=\{\omega : f_1(\omega)=\cdots=f_n(\omega)=1\}\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F} : \mathsf{P}(A_n)=\mathsf{P}_n(A_n)=1.$$

Проте $A_n=(0,1/n)\downarrow\emptyset$, що суперечить неперервності в нулі міри P. Основна причина суперечності полягає у неповноті простору Ω.

Розглянемо тепер випадок незліченної кількості польських просторів $\{\Omega_t, \mathcal{T}_t\}_{t\in T}$, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебри борелевих множин, і нехай для кожного скінченного набору різних точок $t_1, \ldots, t_n \in T$ задані ймовірнісні міри $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ на $\{\Omega_{t_1} \times \ldots \times \Omega_{t_n}, \mathcal{F}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{t_n}\}$, які задовольняють такі умови узгодженості:

1. (Інваріантність за перестановками). Для довільних різних $t_1, \ldots, t_n \in T$, множин $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ та перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ індексів $(1, \ldots, n)$ маємо

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathsf{P}_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_n}).$$

2. (Інваріантність за проекціями). Для довільного $m \le n$

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,,t_m,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times \Omega_{t_m} \times \ldots \times B_n) = \\ = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_{m-1},t_{m+1},\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_{m-1} \times B_{m+1} \times \ldots \times B_n).$$

Завдання 43. *Нехай $(i_1, \ldots, i_n)$ визначає перестановку індексів $(1, \ldots, n)$, g_n та h_n відображення визначені на T^n як*

$$g_n(t_1, \ldots, t_n) = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) \quad \text{та } h_n(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

а G_n та H_n визначені на $\times_{i=1}^n \Omega_{t_i}$ як

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \quad \text{та} \quad H_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Показати, що узгодженість сім'ї ймовірнісних розподілів $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ еквівалентна виконанню таких рівностей

$$\mathsf{P}_{g_n(t_1,\ldots,t_n)} = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n} \circ G_n^{-1} \quad \text{та} \quad \mathsf{P}_{h_n(t_1,\ldots,t_n)} = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n} \circ H_n^{-1}.$$

Завдання 44. *Нехай $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ і B^I позначає множину функцій, заданих на множині I: $x(t_i) \in B_{t_i} \in \mathcal{F}_{t_i}$, $i = \overline{1,n}$. Покладемо*

$$\mathsf{P}_I\left(B^I\right) = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}).$$

Показати, що з умов узгодженості випливає, що

$$\mathsf{P}_I\left(B^I\right) = \mathsf{P}_J \circ \left(\pi_I^J\right)^{-1}\left(B^I\right),$$

для довільної скінченної множини $J \subset T$, яка містить I.

Умови узгодженості дозволяють визначити міру на $\{\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t\}$ так, щоб міра циліндрів з основами $B \in \mathcal{F}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{t_n}$ збігалась з мірами $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ цих основ.

Теорема А.11 (Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір)**.** *Існує єдина ймовірнісна міра P на $\{\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t\}$ така, що $\forall n \in \mathbb{N}$, різних $t_i \in T$ та $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $i = \overline{1,n}$:*

$$\mathsf{P}\{x \in \times_{t\in T}\Omega_t : x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\} = \mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n).$$

Доведення. Нехай $B^* \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$, тоді за теоремою про структуру σ-алгебри циліндричних множин існує не більше ніж злічення множина індексів $S = \{s_i\}_{i=1}^N \subset T$, $N \le \infty$, та множина $B \in \otimes_{i=1}^N \mathcal{F}_{s_i}$ такі, що

$$B^* = Cyl_S(B) = \{x \in \times_{t\in T}\Omega_t : (x(s_i), i \le N) \in B\}.$$

Для фіксованої множини індексів S за теоремою Данієля про продовження міри на $\{\times_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i, \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i\}$ на $\otimes_{i=1}^N \mathcal{F}_{s_i}$ визначена ймовірнісна міра P_S, для якої

$$\mathsf{P}_S\left\{x \in \times_{i=1}^N \Omega_{s_i} : x(s_1) \in B_1, \ldots, x(s_n) \in B_n\right\} = \mathsf{P}_{s_1,\ldots,s_n}(B_1 \times \ldots \times B_n),$$

$B_i \in \mathcal{F}_{s_i}, i = \overline{1,n}$, $n \le N$.

Визначимо відображення P для B^* як

$$\mathsf{P}(B^*) = \mathsf{P}_S(B)$$

і покажемо, що це відображення не залежить від подання B^*. Дійсно, нехай S' та S'' – не більше ніж зліченні множини індексів з T, та $B' \in \otimes_{s'\in S'}\mathcal{F}_{s'}$ і $B'' \in \otimes_{s''\in S''}\mathcal{F}_{s''}$ такі, що

$$B^* = Cyl_{S'}(B') = Cyl_{S''}(B'').$$

Тоді визначимо множини $S = S' \cup S''$ та $B \in \otimes_{s\in S}\mathcal{F}_s$, для яких $B^* = Cyl_S(B)$. Звідки, застосовуючи умови узгодженості, маємо

$$\mathsf{P}_{S'}(B') = \mathsf{P}_S(B) = \mathsf{P}_{S''}(B'').$$

Отже, $\mathsf{P}(B^*)$ не залежить від способу подання B^*.

Для того, щоб назвати відображення P мірою, залишається перевірити умову зліченної адитивності. Розглянемо несумісні множини $B_n^* \in \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$, як і раніше існує не більше ніж злічення множина індексів S, та множини $B_n \in \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{s_i}$ такі, що $B_n^* = Cyl_S(B_n)$. Оскільки P_S є ймовірнісною мірою, маємо

$$\mathsf{P}(\vee B_n^*) = \mathsf{P}(\vee Cyl_S(B_n)) = \mathsf{P}_S(\vee B_n) = \sum \mathsf{P}_S(B_n) = \sum \mathsf{P}(B_n^*).$$

□

Відмітимо, що умова узгодженості для P_I із завдання 44 дозволяє сформулювати теорему так: існує єдина ймовірнісна міра P на $\{\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t\}$:

$$\mathsf{P} \circ \pi_I^{-1} = \mathsf{P}_I$$

для довільної скінченної множини $I \subset T$[39].

[39]Див. Theorem 14.36 в *Klenke A.* Probability theory: a comprehensive course. London: Springer, 2013.

Вправа А.33. Нехай на множині параметрів T заданий частковий порядок $\succeq$. Показати, що для того, щоб задати узгоджену сім'ю ймовірнісних мір достатньо задати інваріантні за проекціями ймовірнісні міри $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ на $\left\{\times_{i=1}^n \Omega_{t_i}, \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_{t_i}\right\}$ для $t_n \succeq \ldots \succeq t_1 \in T$.

Приклад (міра Вінера)**.** Нехай $T = [0, \infty)$ і визначимо міру на просторі дійсних функцій $\left\{\mathbb{R}^T, \otimes_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$ таким чином. Спочатку задамо сім'ю ймовірнісних розподілів на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ як $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T, B = B_1 \times \ldots \times B_n$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B) = \int_{B_1} \ldots \int_{B_n} f_{t_1}(y_1|0)\, f_{t_2-t_1}(y_2|y_1) \ldots f_{t_n-t_{n-1}}(y_n|y_{n-1})\, dy_n \ldots dy_1,$$

де

$$f_t(y|x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left\{-(y-x)^2 / (2t)\right\}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Величину $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B)$ можна інтерпретувати як імовірність того, що в моменти t_i координата положення певної частинки належить B_i. При цьому множники $f_{t_k-t_{k-1}}(y_k|y_{k-1})\, dy_k$ – як імовірність того, що частинка, яка виходить з точки y_{k-1}, за час $t_k - t_{k-1}$ попадає в область dy_k точки y_k. А сам добуток цих множників – як незалежність приростів руху чистинки на несумісних інтервалах часу.

Так побудована сім'я мір є узгодженою і відповідно за теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір може бути продовжена однозначно до міри P_W на $\left\{\mathbb{R}^T, \otimes_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$. Отримана міра має назву міри Вінера.

Завдання 45. *Нехай маємо сім'ю*

$$\left\{P_t(x, B), t \in T, x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\},$$

елементи якої $P_t(x, B)$ *є вимірні функції по* x *та ймовірнісні міри по* B, *для яких має місце співвідношення*

$$P_{s+t}(x, B) = \int_{\mathbb{R}} P_t(y, B)\, P_s(x, dy)$$

та для $t = 0$*:*

$$P_0(x, B) = \mathbb{1}_B(x).$$

Показати, що

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B) = \int_{B_n} \ldots \int_{B_1} P_{t_1}(0, dy_1)\, P_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) \ldots P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n),$$

де $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T, B = B_1 \times \ldots \times B_n$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, *визначає сім'ю узгоджених імовірнісних мір.*

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що міра Лебега усіх інтервалів, на яких функція Кантора є сталою, дорівнює одиниці.

2. Нехай $\{E, \mathcal{E}, \nu\}$ – простір зі σ-скінченною мірою і нехай $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$, де $\mathcal{A}$ – деяка алгебра. Показати, що на $\mathcal{A}$ міра ν може і не бути σ-скінченною.

3. Нехай $\{E, \mathcal{E}\}$ – вимірний простір і нехай $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$, де $\mathcal{A}$ – деяка алгебра. Показати, що невід'ємне скінчено-адитивне відображення ν на $\mathcal{A}$: $\nu(\emptyset) = 0$, може і не бути продовжене до міри на $\mathcal{E}$.

4. Нехай $\left\{\mathbb{R}^T, \otimes_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}\right\}$ – простір дійсних функцій з імовірнісною мірою, позначимо $\mathsf{P}_{t_1,\dots t_n}(B) = \mathsf{P}(Cyl_{t_1,\dots,t_n}(B))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Показати, що сім'я $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots t_n}, t_i \in T\}$ є узгодженою сім'єю ймовірнісних мір.

А.4. Випадкові елементи

Визначення. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ та $\{E, \mathcal{E}\}$ – два вимірні простори. Відображення $f : \Omega \to E$ називають $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-*вимірними* позначають як $f \in \mathcal{F}/\mathcal{E}$, якщо $\forall B \in \mathcal{E}$:

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Якщо $\{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, то вимірність відображення позначають $f \in \mathcal{F}$.

Вправа А.34. 1. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, $\{E, \mathcal{E}\}$, $\{H, \mathcal{H}\}$ – вимірні простори, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{E}$ та $g \in \mathcal{E}/\mathcal{H}$. Показати, що $g \circ f \in \mathcal{F}/\mathcal{H}$.

2. Показати, що відображення $f : \Omega \to E$ є $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірним тоді і тільки тоді, коли для деякого класу $\mathcal{K}$: $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$ маємо, що $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{K}$.

Вказівка. Застосувати метод підхожих множин.

3. Нехай $\mathcal{F}$ та $\mathcal{E}$ – борелеві σ-алгебри, показати що неперервне відображення $f : \Omega \to E$ є $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірним.

Вказівка. Застосувати результат попереднього пункту з $\mathcal{K}$, який визначений як топологія, що породжує $\mathcal{E}$.

4. Показати, що образ вимірної множини для вимірного відображення необов'язково вимірна множина.

Вказівка. Розглянути $\{\Omega, \mathcal{F}\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, $\{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\}\}$, та як f узяти тотожне відображення.

5. Нехай $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1\}$, $\{\Omega_2, \mathcal{F}_2\}$, $\{E, \mathcal{E}\}$ – вимірні простори, відображення $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to E$ є $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2/\mathcal{E}$-вимірним. Показати, що $f(x_0, y) \in \mathcal{F}_2/\mathcal{E}$ для довільного $x_0 \in \Omega_1$.

Вказівка. Подати $f(x_0, y) = f \circ g(y)$, де $g(y) = (x_0, y)$, і показати, що $g \in \mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Завдання 46. *Нехай $\mathcal{F}$ та $\mathcal{E}$ – борелеві σ-алгебри, показати що множина точок, в яких відображення $f : \Omega \to E$ не є неперервним є борелевою.*

Приклад (монотонний клас дійсних функцій)**.** Позначимо через M множину функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, що задовольняє такі умови:

- $f(x) \equiv 1 \in M$;
- для довільних обмежених функцій f та g з M та довільних чисел $a, b \in \mathbb{R}$ функція $af + bg \in M$;
- для довільної монотонно збіжної послідовності невід'ємних функцій $\{f_n\}$ з M гранична функція $f \in M$.

Покажемо, що якщо $\mathcal{P}$ – деяка π-система, яка породжує $\mathcal{F}$ та

$$\mathbb{1}_A \in M, \forall A \in \mathcal{P},$$

тоді M включає усі обмежені та усі невід'ємні $\mathcal{F}$-вимірні функції.

Покажемо спочатку, що $\mathbb{1}_A \in M$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Позначимо через

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{1}_A \in M\}$$

клас підхожих множин. Враховуючи, що $\mathbb{1}_\Omega \equiv 1 \in M$ маємо $\Omega \in \mathcal{D}$. Далі, $\forall A \subset B \in \mathcal{D}$:

$$\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \in M,$$

а також $\forall A_i \in \mathcal{D}$:

$$\mathbb{1}_{\vee A_i} = \sum \mathbb{1}_{A_i} \in M.$$

Звідки виводимо, що $\mathcal{D}$ є d-системою. Оскільки $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$, за наслідком про монотонний клас $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.

Оскільки M включає індикатори, ця множина також містить усі прості функції

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{1}_{A_i},$$

де x_i – деякі дійсні числа, а $\{A_i\}_{i=1}^m$ – множини з $\mathcal{F}$, які утворюють розбиття Ω. Прості функції є $\mathcal{F}$-вимірними і для довільної невід'ємної $\mathcal{F}$-вимірної функції f існує послідовність простих невід'ємних функцій $f_n \uparrow f$. Оскільки $f_n \in M$, за означенням множини M функція f міститься в M. Якщо f – обмежена $\mathcal{F}$-вимірна функція, тоді її можна подати як $f^+ - f^-$, де f^+, f^- – невід'ємні обмежені $\mathcal{F}$-вимірні функції, а отже f як різниця двох функцій з M міститься в M.

Визначення. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір, тоді $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-вимірне відображення називають *випадковим елементом* зі значеннями в просторі E.

Якщо $\{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, то випадковий елемент називають випадковою величиною (в.в.), якщо $\{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$, то – дійсним випадковим вектором, $\{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\}$, то – дійсною випадковою послідовністю, а якщо $\{E, \mathcal{E}\} = \left\{\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \otimes_{t\in[0,\infty)}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$, то – дійсним випадковим процесом (в.п.).

Позначимо через

$$\mathcal{F}^X = \left\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{E}\right\},$$

і враховуючи властивості прообразів, маємо що цей клас визначає σ-алгебру, яку будемо називати σ-алгеброю породженою випадковим елементом X. Відмітимо, що відображення X буде випадковим елементом тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}^X \subset \mathcal{F}$.

Вправа A.35. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\} = \{E, \mathcal{E}\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, $X(\omega) = \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(\omega)$. Описати $\mathcal{F}^X$.

Завдання 47. *Нехай X, Y – випадкові елементи зі значеннями в польських просторах з борелевими σ-алгебрами, $\{E, \mathcal{E}\}$ та $\{H, \mathcal{H}\}$ відповідно. Показати, що*

$$X \in \mathcal{F}^Y/\mathcal{E}$$

тоді і тільки тоді, коли існує вимірне відображення $f : H \to E$ таке, що

$$X = f \circ Y.$$

Нехай $\{E, \mathcal{E}\} = \{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t\}$, де $\{E_t, \mathcal{E}_t\}_{t\in T}$ – сім'я вимірних просторів, тоді випадковий елемент X називають випадковою функцією (в.ф.). Для відображення

$$\pi_t : \times_{t\in T} E_t \to E_t, t \in T,$$

визначеного як $\pi_t(x) = x_t$, маємо

$$\pi_t^{-1}(B_t) = Cyl_t(B_t) \in \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t, \forall B_t \in \mathcal{E}_t,$$

тому π_t є $\otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t/\mathcal{E}_t$-вимірне $\forall t \in T$, а значить $\forall t \in T$: $X(t, \omega) = \pi_t X(\omega)$ є $\mathcal{F}/\mathcal{E}_t$-вимірним по ω. Тобто, $X(t, \omega)$ є випадковим елементом в E_t. Має місце і зворотнє твердження.

Якщо $\{X(t, \omega)\}_{t\in T}$ – сім'я випадкових елементів в $\{E_t, \mathcal{E}_t\}$, тоді $X(\omega) = X(\cdot, \omega)$ визначає в.ф. на просторі $\{\times_{t\in T} E_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{E}_t\}$. Дійсно,

$$\{\omega : X(\omega) \in Cyl_t(B_t)\} = \{\omega : X(t, \omega) \in B_t\} \in \mathcal{F},$$

тобто прообрази елементарних циліндрів вимірні. Оскільки

$$Cyl_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}) = \cap_{i=1}^n Cyl_{t_i}(B_{t_i}),$$

маємо $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для довільної множини B з класу вимірних циліндрів, а значить і для будь-якої множини з σ-алгебри циліндричних множин $\mathcal{E}$. Тобто, $X(\cdot)$ є в.ф., і отже, має місце таке твердження.

Теорема А.12 (про еквівалентне означення в.ф.). *Сім'я* $\{X_t(\omega), t \in T\}$ *відображень з* Ω *в* E_t *є сім'єю випадкових елементів тоді і тільки тоді, коли відображення* $X(\omega) = X_\cdot(\omega)$ *є в.ф.*

Приклад (в.п. з м.н. неперервними траєкторіями). Нехай $\{X_t, t \in [0,T]\}$ – дійсна в.ф. така, що майже напевно $X_\cdot \in C_{[0,T]}$. Покажемо, що випадковий елемент $X(\omega) = X_\cdot(\omega)$ є $\mathcal{F}/\mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)$-вимірним відображенням.

Як породжуючий клас для $\mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)$ візьмемо клас множин

$$B_r(x) = \left\{y \in C_{[0,T]} : \sup_{t\in[0,T]} |x_t - y_t| \le r\right\}.$$

Позначимо $\tilde{\Omega} = \left\{X \in C_{[0,T]}\right\}$, тоді

$$X^{-1}(B_r(x)) = \left\{\omega \in \Omega\backslash\tilde{\Omega} : X_\cdot(\omega) \in B_r(x)\right\} \cup \left\{\omega \in \tilde{\Omega} : X_\cdot(\omega) \in B_r(x)\right\}.$$

За умовою $\mathsf{P}\left(\tilde{\Omega}\right) = 1$ і, враховуючи повноту ймовірнісного простору, для довільної $B \subset \Omega\backslash\tilde{\Omega}$: $B \in \mathcal{F}$. Тобто, перша множина об'єднання є вимірною. Внаслідок властивостей неперервних функцій, другу можемо подати як

$$\cap_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}} \left\{\omega \in \tilde{\Omega} : |x(t) - X_t(\omega)| \le r\right\}$$

і, оскільки $X_t \in \mathcal{F}$, за теоремою про еквівалентне означення в.ф. ця множина також належить $\mathcal{F}$.

Вправа А.36. Показати, що для в.ф. $\{X_t, t \in [0,T]\}$ такої, що м.н. $X_\cdot \in C_{[0,T]}$, $X_T^+ = \sup_{t\in[0,T]} X_t$ є в.в.

Вказівка. Показати, що супремум неперервної функції на відрізку є неперервним функціоналом.

Основною характеристикою випадкового елементу є його розподіл.

Визначення. Нехай випадковий елемент X заданий на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ зі значеннями у вимірному просторі $\{E, \mathcal{E}\}$. *Розподілом* X називають імовірнісну міру P_X визначену на $\mathcal{E}$ рівністю

$$\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P} \circ X^{-1}(B) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{E}.$$

Вправа А.37. Показати, що означення розподілу випадкового елемента коректне. А також показати, що якщо на вимірному просторі $\{E, \mathcal{E}\}$ задана деяка ймовірнісна міра Q, то можна визначити ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ та випадковий елемент X на ньому такий, що $\mathsf{P}_X = \mathsf{Q}$.

Нехай $\{E_t, \mathcal{E}_t\}_{t\in T}$ – польські простори з відповідними σ-алгебрами борелевих множин, тоді за теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір для того, щоб задати розподіл в.ф. $\{X_t, t \in T\}$ достатньо задати так звані *скінченно вимірні розподіли* – сім'ю узгоджених імовірнісних мір $\{\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}, t_i \in T\}$, які визначають розподіл вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$:

$$\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathsf{P}\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}, B_i \in \mathcal{E}_{t_i}.$$

При цьому, задачу визначення розподілу можна звести до визначення одновимірних розподілів, якщо припустити, що функція має незалежні значення.

Визначення. Класи множин $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n \subset \mathcal{F}$, які містять простір Ω, називають *незалежними*, якщо $\forall A_i \in \mathcal{K}_i$, $i = \overline{1,n}$:

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1) \times \ldots \times \mathsf{P}(A_n).$$

Сім'ю класів $\{\mathcal{K}_t \subset \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{K}_t, t \in T\}$ називають незалежною, якщо $\forall t_i \in T$, $i = \overline{1,n}$: $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, класи $\mathcal{K}_{t_1}, \ldots, \mathcal{K}_{t_n}$ незалежні.

Випадкові елементи $\{X_t, t \in T\}$ зі значеннями в $\{E, \mathcal{E}\}$ називають незалежними, якщо $\forall t_i \in T, B_i \in \mathcal{E}, i = \overline{1,n} : t_i \neq t_j, i \neq j$:

$$\mathsf{P}\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{X_{t_k} \in B_k\}.$$

В.ф. $\{X_t, t \in T\}$ незалежна від σ-алгебри $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, якщо незалежні $\mathcal{F}^X$ та $\mathcal{G}$.

Теорема А.13 (про незалежні π-системи)**.** *Нехай π-системи $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n \subset \mathcal{F}$ незалежні та містять Ω, тоді незалежними також є σ-алгебри породжені цими π-системами. Крім того, поповнення σ-алгебр також незалежні.*

Доведення. Розглянемо такий клас підхожих множин

$$\mathcal{D}_1 = \{A_1 \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1) \times \ldots \times \mathsf{P}(A_n), A_i \in \mathcal{P}_i, i = \overline{2,n}\}.$$

Так визначений клас є d-системою, що містить $\mathcal{P}_1$, тоді за наслідком про монотонний клас $\sigma(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{D}_1$. Аналогічно розглянемо клас множин

$$\mathcal{D}_2 = \{A_2 \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1) \times \ldots \times \mathsf{P}(A_n), \\ A_1 \in \sigma(\mathcal{P}_1), A_i \in \mathcal{P}_i, i = \overline{3,n}\},$$

для якого $\sigma(\mathcal{P}_2) \subset \mathcal{D}_2$. Продовжуючи таким саме чином, встановлюємо що $\sigma(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{D}_n$. Отже,

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathsf{P}(A_1) \times \ldots \times \mathsf{P}(A_n)$$

для довільних $A_i \in \sigma(\mathcal{P}_i)$. Друга частина теореми випливає з означення поповненої σ-алгебри. □

Вправа А.38. Довести незалежність поповнень незалежних σ-алгебр.

Теорема А.14 (Ломницького-Улама)**.** *Нехай* $\{\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_t\}_{t\in T}$ *– сім'я довільних імовірнісних просторів, тоді існує ймовірнісний простір* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ *та сім'я незалежних випадкових елементів* $\{X_t, t \in T\}$ *таких, що* $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{P}_t$ *на* $\mathcal{F}_t$*,* $t \in T$[40]*.*

Під час визначення та вивчення розподілу дійсних в.ф. може виявитись досить продуктивним аналіз деяких інтегральних перетворень відповідного розподілу.

Нехай $\{E, \mathcal{E}, \nu\}$ – деякий простір з мірою, функцію $f : E \to \mathbb{R}$ називають простою, якщо її можна подати в такому вигляді

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i}(x),$$

де $b_i \in \mathbb{R}$, $\vee_{i=1}^{n} B_i = E$ та $B_i \in \mathcal{E}$. Для довільної невід'ємної простої функції визначена сума

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \nu(B_i) \in [0, \infty],$$

яку називають інтегралом Лебега від простої функції і позначають як

$$\int_E f(x)\, \nu(dx).$$

Для довільної невід'ємної $f \in \mathcal{E}$ *інтеграл Лебега* визначений як

$$\int_E f(x)\, \nu(dx) = \sup_{0 \le h \le f, h \text{ - проста}} \int_E h(x)\, \nu(dx).$$

Довільну $f \in \mathcal{E}$ можна подати як $f = f^+ - f^-$, де $f^+ = f \vee 0$ та $f^- = -(f \wedge 0)$. Якщо хоча б один з інтегралів $\int_E f^{\pm}(x)\, \nu(dx)$ скінченний, то інтеграл Лебега визначений для f як

$$\int_E f^+(x)\, \nu(dx) - \int_E f^-(x)\, \nu(dx).$$

Якщо простір $\{E, \mathcal{E}, \nu\} = \{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ є ймовірнісним, то інтеграл Лебега називають *математичним сподіванням* і позначають як

$$\mathsf{E} f = \int_E f(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega).$$

[40] Див. Corollary 5.18 в *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. Berlin: Springer, 1997.

Завдання 48. *Нехай* $\{E, \mathcal{E}, \nu\}$ *– деякий простір з мірою,* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *та* $g \in \mathcal{E}$*, тоді*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \nu \circ g^{-1}(dx) = \int_E f \circ g(x)\, \nu(dx),$$

якщо хоча б один з інтегралів у рівності визначений.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\} = \{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ та в.в. визначені як $\xi_1(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \le 0, \\ 1, & \omega > 0, \end{cases}$ та $\xi_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \le 0, \\ 1/2, & 0 < \omega \le 1, \\ 1, & \omega > 1. \end{cases}$ Проаналізувати вимірність однієї в.в. відносно σ-алгебри породженої іншою в.в.

2. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ – імовірнісний простір, $\{E, \mathcal{E}\}$ – польський простір, T – деяка параметрична множина та $F \subset E^T$. Показати, що відобрження $X : \Omega \to E$ є $F \cap \mathcal{E}^T$-вимірне тоді і тільки тоді, коли $X_t : \Omega \to E$ є $\mathcal{E}$-вимірне для довільного $t \in T$.

3. Показати, що σ-алгебра містить лише тривіальні події тоді і тільки, коли не залежить від себе.

4. Навести приклад двох незалежних класів множин, для яких відповідні породжені σ-алгебри не є незалежними.

5. Показати, що якщо σ-алгебри $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, незалежні, то $\cap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\cup_{i=1}^n \mathcal{F}_i\right)$ є тривіальною σ-алгеброю.

A.5. Збіжність

Однією з важливих властивостей сім'ї ймовірнісних розподілів є збіжність. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ – польський простір з σ-алгеброю борелевих множин, на якому задані ймовірнісні міри P_1, P_2, $\ldots$ та P. Для подальших міркувань зафіксуємо метрику d, яка породжує відповідну топологію на Ω.

Визначення. Говорять, що послідовність імовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *слабко збігається* до ймовірнісної міри P, якщо для будь-якої неперервної та обмеженої числової функції f на Ω:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega)\, \mathsf{P}_n(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega).$$

Позначатимемо цей факт як

$$\mathsf{P}_n \stackrel{w}{\to} \mathsf{P}.$$

Лема А.1 (про критерій слабкої збіжності)**.** *Для того, щоб послідовність імовірнісних мір* $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *слабко збігалась до ймовірнісної міри* P *необхідно і достатньо, щоб для довільної неперервної обмеженої функції* f*:*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}_n(d\omega)\le\int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)\,.$$

Доведення. Необхідність випливає безпосередньо з означення слабкої збіжності. Доведемо достатність. Якщо f – довільна неперервна обмежена функція, то $(-f)$ також неперервна обмежена, тоді

$$\overline{\lim}\int_\Omega(-f(\omega))\,\mathsf{P}_n(d\omega)\le\int_\Omega(-f(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)\,.$$

Звідки

$$\underline{\lim}\int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}_n(d\omega)\ge\int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$$

і, поєднуючи з умовою леми, маємо, що існує $\lim\int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}_n(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$. □

Приклад (збіжність слабка та в основному)**.** Розглянемо сім'ю ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathsf{P}_n\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)=1,$$

тоді для довільної обмеженої неперервної функції f отримаємо, що

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathsf{P}_n(d\omega)=f\left(\frac{1}{n}\right)\to f(0)\,,n\to\infty.$$

Тобто, $\mathsf{P}_n\xrightarrow{w}\mathsf{P}$, де $\mathsf{P}(\{0\})=1$. Візьмемо відкриту множину $G=(0,\infty)$ та замкнену множину $F=(-\infty,0]$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(F)=0<1=\mathsf{P}(F)$$

та

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(G)=1>0=\mathsf{P}(G)\,,$$

тобто $\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(F)\neq\mathsf{P}(F)$ та $\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(G)\neq\mathsf{P}(G)$. Відмітимо, що $\mathsf{P}(\partial F)=\mathsf{P}(\partial G)=1\neq 0$, якщо ж для випадкової події $\mathsf{P}(\partial A)=0$, то $\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(A)=\mathsf{P}(A)$.

Визначення. Послідовність імовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *збігається в основному* до ймовірнісної міри P, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(A)=\mathsf{P}(A)\,,\forall A\in\mathcal{F}:\mathsf{P}(\partial A)=0.$$

Позначатимемо цей факт як

$$\mathsf{P}_n\Longrightarrow\mathsf{P}.$$

Теорема А.15 (Александрова про еквівалентність слабкої збіжності та збіжності в основному). *Наведені нижче твердження еквівалентні*

1. $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$;

2. $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(F) \le \mathsf{P}(F)$, *для довільної замкненої множини* F;

3. $\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(G) \ge \mathsf{P}(G)$, *для довільної відкритої множини* G;

4. $\mathsf{P}_n \Longrightarrow \mathsf{P}$.

Доведення. (1. ⇒ 2.) Для довільної замкненої множини F та довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо функцію

$$f_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 1, & d(\omega, F)/\varepsilon = 0, \\ 1 - d(\omega, F)/\varepsilon, & d(\omega, F)/\varepsilon \in (0,1), \\ 0, & d(\omega, F)/\varepsilon \ge 1, \end{cases}$$

де

$$d(\omega, F) = \inf\{d(\omega, \omega'), \omega' \in F\}.$$

Так визначена функція обмежена неперервна та $f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathbb{1}_F$, тоді

$$\mathsf{P}_n(F) = \int \mathbb{1}_F \mathsf{P}_n(d\omega) \le \int f_\varepsilon \mathsf{P}_n(d\omega)$$

та

$$\overline{\lim}\mathsf{P}_n(F) \le \overline{\lim}\int f_\varepsilon \mathsf{P}_n(d\omega) = \int f_\varepsilon \mathsf{P}(d\omega).$$

Застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, за $\varepsilon \to 0$ отримуємо

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(F) \le \mathsf{P}(F).$$

(2. ⇒ 1.) Нехай f – неперервна обмежена функція і припустимо, що

$$0 < f(\omega) < 1, \forall\omega \in \Omega.$$

Для довільного $k \in \mathbb{N}$ визначимо замкнені множини

$$F_i = \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) \ge \frac{i}{k}\right\}, i = \overline{0, k}$$

та їх послідовні різниці

$$B_i = F_{i-1} \backslash F_i = \left\{\omega \in \Omega : \frac{i-1}{k} \le f(\omega) < \frac{i}{k}\right\}, i = \overline{1, k},$$

тоді

$$\int_\Omega f\mathsf{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f\mathsf{P}(d\omega).$$

Враховуючи що

$$\frac{i-1}{k}\mathsf{P}\left(B_i\right) \le \int_{B_i} f\left(\omega\right)\mathsf{P}\left(d\omega\right) \le \frac{i}{k}\mathsf{P}\left(B_i\right)$$

та

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\mathsf{P}\left(B_i\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i\left(\mathsf{P}\left(F_{i-1}\right) - \mathsf{P}\left(F_i\right)\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{P}\left(F_i\right),$$

виводимо

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{P}\left(F_i\right) \le \int f\mathsf{P}\left(d\omega\right) \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{P}\left(F_i\right).$$

Аналогічна нерівність має місце і для P_n. Отже,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_\Omega f\left(\omega\right)\mathsf{P}_n\left(d\omega\right) \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\overline{\lim}\sum\mathsf{P}_n\left(F_i\right) \le$$
$$\le \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum\mathsf{P}\left(F_i\right) \le \frac{1}{k} + \int f\mathsf{P}\left(d\omega\right).$$

Оскільки ця нерівність має місце для довільного k, то для функції $0 < f < 1$ потрібний результат встановлено. Якщо f – довільна неперервна та обмежена: $m \le f\left(x\right) \le M$, тоді

$$g\left(x\right) = \frac{f\left(x\right) - m + \varepsilon}{M - m + 2\varepsilon}, \varepsilon > 0,$$

неперервна та $0 < g\left(x\right) < 1$, значить,

$$\overline{\lim}\int g\mathsf{P}_n\left(d\omega\right) \le \int g\mathsf{P}\left(d\omega\right).$$

А отже, умови леми про критерій слабкої збіжності виконуються і для f, тобто маємо, що $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Якщо G – деяка відкрита множина, то $F = \overline{G}$ замкнена і

$$\overline{\lim}\mathsf{P}_n\left(F\right) \le \mathsf{P}\left(F\right)$$

дає

$$\overline{\lim}\left(1 - \mathsf{P}_n\left(G\right)\right) \le 1 - \mathsf{P}\left(G\right),$$

тобто $\underline{\lim}\mathsf{P}_n\left(G\right) \ge \mathsf{P}\left(G\right)$. В іншу сторону доводимо аналогічно.

(1. $\Rightarrow$ 4.) Для довільної вимірної множини A: $\mathsf{P}\left(\partial A\right) = 0$ маємо, що

$$\mathsf{P}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right) = \mathsf{P}\left(A\right) = \mathsf{P}\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right).$$

Звідки

$$\mathsf{P}(\operatorname{int}(A)) \le \underline{\lim}\mathsf{P}_n(\operatorname{int}(A)) \le \underline{\lim}\mathsf{P}_n(A) \le$$
$$\le \overline{\lim}\mathsf{P}_n(A) \le \overline{\lim}\mathsf{P}_n(\operatorname{cl}(A)) \le \mathsf{P}(\operatorname{cl}(A)).$$

З отриманого ланцюга нерівностей виводимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(A) = \mathsf{P}(A).$$

(4. $\Rightarrow$ 1.) Для довільної замкненої множини F та $\varepsilon > 0$ позначимо

$$F_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : d(\omega, F) < \varepsilon\}.$$

Відмітимо, що $\partial F_\varepsilon \subset \{\omega : d(\omega, F) = \varepsilon\}$, тому $\partial F_\varepsilon \cap \partial F_{\varepsilon'} = \emptyset$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Звідки нерівність $\mathsf{P}(\partial F_\varepsilon) > 0$ може мати місце лише для зліченної кількості чисел ε, а значить можемо вибрати послідовність

$$\varepsilon_k \downarrow 0 : \mathsf{P}(\partial F_{\varepsilon_k}) = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Тоді з умови 4. теореми маємо

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathsf{P}_n(F) \le \overline{\lim}\mathsf{P}_n(F_{\varepsilon_k}) \le \mathsf{P}(F_{\varepsilon_k}).$$

Застосовуючи неперервність імовірності, перехід до границі за $k \to \infty$ дає виконання умови 2. теореми і, з урахуванням доведеної еквівалентності умов 1. та 2., одержуємо що $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$. □

Завдання 49. *Показати, що* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини* A*:* $\mathsf{P}(\partial A) = 0$*,* $\mathsf{P}_n(A) \to \mathsf{P}(A)$*.*

Якщо задана послідовність імовірнісних мір, то під час розгляду питання про слабку збіжність до деякої міри інколи виникає необхідність визначити чи збігається хоча б якась підпослідовність. Так, наприклад, послідовність $\{\mathsf{P}_n\} : \mathsf{P}_{2n} = \mathsf{Q}$, $\mathsf{P}_{2n+1} = \mathsf{P}$, де P та Q деякі ймовірнісні міри, не є збіжною проте має збіжні підпослідовності.

Вправа A.39. Показати, що сім'я ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}$ на $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$: $\mathsf{P}_n(\{n\}) = 1$ не містить жодної збіжної в слабкому сенсі підпослідовності.

Визначення. Сім'я ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in A\}$ на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ називається *відносно компактною*, якщо будь-яка послідовність мір з цієї сім'ї містить підпослідовність, слабко збіжну до деякої ймовірнісної міри.

Завдання 50. *Нехай* $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– сім'я ймовірнісних мір на польському просторі* $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ *та* P *– деяка ймовірнісна міра на* $\{\Omega, \mathcal{F}\}$*. Показати, що якщо для кожної послідовності із даної сім'ї існує збіжна підпослідовність до* P*, тоді* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$*.*

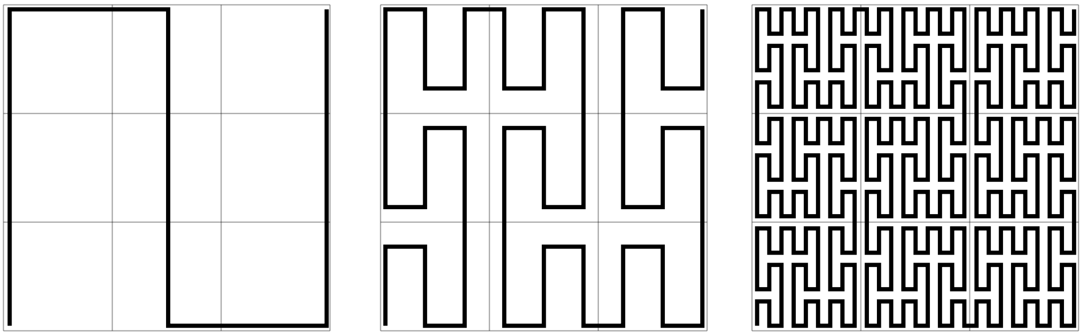


Рис. А.4. Перші три ітерації побудови кривої Пеано

Приклад (відносна компактність мір на нескінченно вимірному кубі). Покажемо, що довільна сім'я ймовірнісних мір на $[0,1]^\infty$ є відносно компактною.

Нехай $h = (h_1(x), h_2(x))$ відображення Піано[41] відрізка $[0,1]$ на квадрат $[0,1] \times [0,1]$ (декілька ітерацій побудови кривої[42] зображено на рис. А.4.), визначимо відображення

$$g = (h_1, h_1 \circ h_2, h_1 \circ h_2 \circ h_2, \ldots)$$

відрізка $[0,1]$ на нескінченно вимірний куб $[0,1]^\infty$. Як наслідок неперервності h маємо неперервність g. Тоді для відображення $f : [0,1]^\infty \to [0,1]$ визначеного як

$$f(x) = \inf\{y \in [0,1] : g(y) = x\}$$

суперпозиція $g \circ f$ є тотожнім відображенням з $[0,1]$ в $[0,1]$, більш того, $f \in \mathcal{B}([0,1]^\infty)/\mathcal{B}([0,1])$.

Нехай $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – деяка послідовність імовірнісних розподілів на нескінченно вимірному кубі. Визначимо відповідну послідовність розподілів на $[0,1]$ як

$$\mathsf{Q}_n(B) = \mathsf{P}_n \circ f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}([0,1]).$$

Існує збіжна підпослідовність $\{\mathsf{Q}_{n_k}\}$ до деякого ймовірнісного розподілу Q[43]. Визначимо міру $\mathsf{P}(B)$ для $B \in \mathcal{B}([0,1]^\infty)$ як $\mathsf{Q} \circ g^{-1}(B)$. Враховуючи, що

[41] Це відображення є одним з прикладів неперервних кривих, що заповнюють простір. Якщо $x = 0.a_1a_2\ldots$ в трійковій системі числення, то $h_1(x) = 0.b_1b_2\ldots$ та $h_2(x) = 0.c_1c_2\ldots$, де $b_1 = a_1$,

$$b_k = \begin{cases} a_{2k-1}, & \sum_{i=1}^{k-1} a_{2i} \,\vdots\, 2, \\ 2 - a_{2k-1}, & \sum_{i=1}^{k-1} a_{2i} \not{\vdots}\, 2, \end{cases} \quad k \geq 2,$$

та

$$c_k = \begin{cases} a_{2k}, & \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} \,\vdots\, 2, \\ 2 - a_{2k}, & \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} \not{\vdots}\, 2, \end{cases} \quad k \geq 1.$$

[42] Див., наприклад, Chapter 5 в *Bader M.* Space-filling Curves. Berlin: Springer, 2013.

[43] Див., наприклад, Theorem 14.13 в *Fristedt B.E., Gray L.F.* A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997.

для будь-якого $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{P}_n(B) = \mathsf{Q}_n \circ g^{-1}(B),$$

для довільної неперервної та обмеженої функції $r(x)$ одержуємо, що

$$\lim_{n_k\to\infty} \int_{[0,1]^\infty} r(x)\,\mathsf{P}_{n_k}(dx) = \lim_{n_k\to\infty} \int_{[0,1]} r \circ g(y)\,\mathsf{Q}_{n_k}(dy) =$$
$$= \int_{[0,1]} r \circ g(y)\,\mathsf{Q}(dy) = \int_{[0,1]^\infty} r(x)\,\mathsf{P}(dx).$$

Отже $\mathsf{P}_{n_k} \xrightarrow{w} \mathsf{P}$.

Теорема А.16 (про слабку збіжність на просторі неперервних функцій)**.** *Послідовність імовірнісних мір* $\{\mathsf{P}_n\}$ *заданих на* $\left\{C_{[0,T]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)\right\}$ *слабко збігається до міри* P *тоді і тільки тоді, коли* $\{\mathsf{P}_n\}$ *відносно компактна та слабко збігаються скінченно вимірні розподіли.*

Доведення. Якщо $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{P}$, то відносна компактність випливає безпосередньо за означенням. Оскільки $\pi_{t_1,\dots,t_m}$ – неперервні відображення з $C_{[0,T]}$ в $\mathbb{R}^m$, для довільної неперервної обмеженої функції f на $\mathbb{R}^m$ суперпозиція $f \circ \pi_{t_1,\dots,t_m}$ є обмеженою та неперервною на $C_{[0,T]}$, і значить, маємо $\mathsf{P}_n \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m} \xrightarrow{w} \mathsf{P} \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\mathsf{P}_n \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(dx) = \int_{C_{[0,T]}} f \circ \pi_{t_1,\dots,t_m}(y)\,\mathsf{P}_n(dy) \to$$
$$\to \int_{C_{[0,T]}} f \circ \pi_{t_1,\dots,t_m}(y)\,\mathsf{P}(dy) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\mathsf{P} \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}(dx)$$

за $n \to \infty$.

Доведемо достатність. Припустимо, що існує $\varepsilon > 0$, підпослідовність $\{n_k\}$ та неперервна та обмежена функція f, що

$$\left| \int f\mathsf{P}(d\omega) - \int f\mathsf{P}_{n_k}(d\omega) \right| > \varepsilon.$$

За відносної компактності існує підпослідовність $\{n'_k\} \subset \{n_k\}$ та ймовірнісна міра Q на $\left\{C_{[0,T]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)\right\}$: $\mathsf{P}_{n'_k} \xrightarrow{w} \mathsf{Q}$, але тоді

$$\mathsf{P}_{n'_k} \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m} \xrightarrow{w} \mathsf{Q} \circ \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m}.$$

За теоремою Колмогорова про узгоджену сім'ю ймовірнісних мір маємо, що $\mathsf{P} = \mathsf{Q}$ на σ-алгебрі циліндричних множин, а за теоремою про σ-алгебру циліндричних множин для неперервних функцій і на $\mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)$, що суперечить припущенню $\mathsf{P}_{n'_k} \overset{w}{\not\to} \mathsf{P}$. $\square$

Завдання 51. *Навести приклад не відносно компактної послідовності ймовірнісних мір на* $\left\{C_{[0,1]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,1]}\right)\right\}$*, для яких слабко збігаються скінченновимірні розподіли.*

Доведена теорема вказує на важливість наявності зручної умови перевірки відносної компактності.

Визначення. Сім'ю ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in A\}$ на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ називають *рівномірно щільною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компакт K такий, що $\mathsf{P}_\alpha\left(\Omega \backslash K\right) < \varepsilon$ для всіх $\alpha \in A$.

Вправа А.40. 1. Показати, що якщо Ω – компакт, то довільна сім'я ймовірнісних мір на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ є рівномірно щільною.

2. Показати, що сім'я ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}$ на $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$:

$$\mathsf{P}_n\left(\{n\}\right) = 1,$$

не є рівномірно щільною.

3. Показати, що сім'я ймовірнісних мір $\{\mathsf{P}_n\}$ на $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$: P_n є рівномірним розподілом на $[-n, n]$, не є рівномірно щільною.

Теорема А.17 (Прохорова про відносну компактність мір)**.** *Сім'я ймовірнісних мір* $\{\mathsf{P}_\alpha, \alpha \in A\}$ *на* $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ *відносно компактна тоді і тільки тоді, коли ця сім'я є рівномірно щільною.*[44]

Теорема про слабку збіжність на просторі неперервних функцій та теорема Прохорова про відносну компактність мір визначають зручний спосіб доведення слабкої збіжності мір на $\left\{C_{[0,T]}, \mathcal{B}\left(C_{[0,T]}\right)\right\}$ на основі перевірки рівномірної щільності та слабкої збіжності скінченновимірних розподілів.

Визначення. Послідовність випадкових елементів $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ називають *збіжною за розподілом* до випадкового елемента X і позначають як

$$X_n \overset{Law}{\to} X,$$

якщо відповідна послідовність розподілів є слабко збіжною.

Вправа А.41. Нехай $X_n \overset{Law}{\to} X$, $h : E \to \mathbb{R}$ – неперервне відображення. Показати, що

$$h\left(X_n\right) \overset{Law}{\to} h\left(X\right).$$

Теорема А.18 (про критерій збіжності за розподілом неперервних в.ф.)**.** *Для того, щоб послідовність в.ф.* $\{X_n\}$ *з простору* $C_{[0,T]}$ *збігалась за розподілом до в.ф.* X *необхідно і достатньо, щоб слабко збігались скінченновимірні розподіли та*

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathsf{E}\left(\varpi\left(X_n, \delta\right) \wedge 1\right) = 0,$$

де $\varpi\left(f, \delta\right) = \sup\left\{\left|f_t - f_s\right|, t, s \in [0, T] : |t - s| < \delta\right\}$[45].

[44] Див., наприклад, Theorem 18.17 в *Fristedt B.E., Gray L.F.* A Modern Approach to Probability Theory. N.Y. : Springer, 1997.

[45] Див. Theorem 14.5 в *Klenke A.* Probability theory: a comprehensive course. London: Springer, 2013.

Відмітимо, що для доведення збіжності за розподілом послідовності в.ф. з більш загального простору неперервних функцій, заданих на локально компактному метричному просторі T, достатньо показати, що збіжність має місце на довільному компакті $K \subset T$[46]. Більш того, має місце аналог теореми про слабку збіжність на просторі неперервних функцій для в.ф. з простору $D_{[0,T]}$[47].

Для встановлення цілої низки граничних теорем достатньо ефективним є метод характеристичних функцій.

Визначення. *Характеристичною функцією* (х.ф.) випадкового вектора $X = (X_1, \ldots, X_d)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^d$ називають функцію $\varphi_X(\alpha)$ на $\mathbb{R}^d$ визначену як $\mathsf{E}\exp\left\{\imath \sum_{k=1}^d \alpha_k X_k\right\}$, $\imath^2 = -1$.

Завдання 52. *Показати, що сім'я х.ф.* $\{\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\alpha), t_i \in T, \alpha \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}\}$ *визначає розподіл деякої дійсної в.ф. тоді і тільки тоді, коли*

$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(\alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_n})$,

$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = \varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})$.

Теорема А.19 (про властивості х.ф.).[48] *Х.ф.* $\varphi(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ *задовольняє такі умови*

1) (неперервність) $\varphi(\alpha)$ *рівномірно неперервна;*

2) (нормованість) $|\varphi(\alpha)| \le 1$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 1$;

3) (ермітовість) $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$;

4) (невід'ємно визначеність) $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^d$, $k = \overline{1,n}$:

$$\sum_{k,j=1}^n z_k \bar{z}_j \varphi(\alpha_k - \alpha_j) \ge 0;$$

5) (мультиплікативність) Якщо X *та* Y *незалежні випадкові вектори, то*

$$\varphi_{X+Y}(\alpha) = \varphi_X(\alpha)\varphi_Y(\alpha);$$

6) (однозначність) Якщо для випадкових векторів X *та* Y *їх х.ф. збігаються, то збігаються і їх розподіли.*

Одночасно з характеристичними функціями застосовують також і інші види інтегральних перетворень. Так, якщо х.ф. допускає аналітичне продовження на комплексні значення аргументу, то зручно замість х.ф. розглядати *твірну функцію моментів*

$$M(\alpha) = \mathsf{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^d \alpha_k X_k\right\},$$

[46] Див. Proposition 14.6 в *Klenke A.* Probability theory: a comprehensive course. London: Springer, 2013.

[47] Там само, Theorem 14.10

[48] Див., наприклад, теорему про основні властивості характеристичної функції в *Карташов М.В.* Ймовірність, процеси, статистика. Річний курс для математиків та статистиків. К.: Видавництво ТВіМС, 2004.

де α належить деякому прямокутнику на $\mathbb{C}^d$, що містить точку $(0, \ldots, 0)$. Якщо випадковий вектор цілозначний, то зручно застосовувати *твірну функцію ймовірностей* (генератрису)

$$G(z) = \mathsf{E} z_1^{X_1} \ldots z_d^{X_d}, \max\{|z_1|, ..., |z_d|\} \le 1.$$

Якщо ж елементи випадкового вектора невід'ємні, то – *перетворення Лапласа*

$$L(\alpha) = \mathsf{E} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{d} \alpha_k X_k\right\}, \alpha_i \ge 0, i = \overline{1, d}.$$

Вправа А.42. Нехай $X = (X_1, X_2)$ дійснозначний вектор, компоненти якого мають скінченні моменти другого порядку. Знайти вирази для $\mathsf{E}X_1$, $\mathsf{E}X_1X_2$ та $\mathsf{E}X_1^2$ в термінах інтегральних перетворень, визначених вище.

Зауважимо, що основні властивості х.ф. з необхідними змінами мають місце і для твірного перетворення, і для перетворення Лапласа.

Приклад (рекурсивні рівняння)**.** Нехай маємо рівняння для послідовності $\{a_n\}_{n \ge 0}$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{d} c_k a_{n-k}, n \ge d,$$

із деякими константами c_1, ..., c_d та заданими початковими значеннями

$$a_0, \ldots, a_{d-1}.$$

Розв'яжемо це рівняння в термінах твірної функції

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n.$$

Помножимо обидві сторони рівняння для a_n на x^n і просумуємо по n:

$$\sum_{n=d}^{\infty} x^n a_n = \sum_{k=1}^{d} c_k \sum_{n=d}^{\infty} x^n a_{n-k}.$$

Позначимо

$$A_k(x) = \sum_{n=0}^{k} x^n a_n, A_{-1}(x) = 0,$$

тоді, враховуючи що

$$\sum_{n=d}^{\infty} x^n a_{n-k} = x^k \sum_{n=d}^{\infty} x^{n-k} a_{n-k} = x^k \sum_{n=d-k}^{\infty} x^n a_n = x^k \left(A(x) - A_{d-(k+1)}(x)\right),$$

виводимо таке рівняння

$$A(x) - A_{d-1}(x) = \sum_{k=1}^{d} c_k x^k \left(A(x) - A_{d-(k+1)}(x) \right),$$

яке перепишемо як

$$A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^{d} c_k x^k \right) = A_{d-1}(x) - \sum_{k=1}^{d} c_k x^k A_{d-(k+1)}(x).$$

Отже, маємо

$$A(x) = \left(A_{d-1}(x) - \sum_{k=1}^{d} c_k x^k A_{d-(k+1)}(x) \right) \left(1 - \sum_{k=1}^{d} c_k x^k \right)^{-1}.$$

Шляхом обернення по x (за можливості) з отриманого дробово-раціонального виразу можемо вивести відповідні співвідношення для a_n, $n \geq d$.

Наприклад, нехай a_n – імовірність того, що число успіхів в n випробувань Бернуллі парне. Дана подія може відбутись двома способами: перше випробування – невдача, а серед інших кількість успіхів парна або перше випробування – успіх, і серед інших кількість успіхів непарна. Тому

$$a_n = q a_{n-1} + p(1 - a_{n-1}), a_0 = 1.$$

Помноживши на x^n та просумувавши по n, отримуємо таке співвідношення

$$A(x) - 1 = qxA(x) + p\frac{x}{1-x} - pxA(x).$$

Звідки

$$2A(x) = (1-x)^{-1} + (1 - (q-p)x)^{-1},$$

і обернувши по x, маємо

$$2a_n = 1 + (q-p)^n.$$

Завдання 53. *Нехай a_n – імовірність того, що під час n підкидань симетричної монети не з'явиться серія із трьох гербів. Визначити твірну функцію для a_n. Знайти наближені значення a_n для $n = \overline{1,12}$.*

Приклад (інтегральні рівняння)**.** Під інтегральними рівняннями зазвичай розуміють рівняння виду

$$F(t) = G(t) + \int_a^b K(u,t) F(u)\, du,$$

де $G(t)$ та $K(u,t)$ (ядро рівняння) – відомі функції, та $F(t)$ невідома. Якщо a та b – константи, то таке рівняння називають рівнянням Фредгольма, а якщо

a – константа та $b = t$, то – рівнянням Вольтера. Якщо рівняння Вольтера можна подати як

$$F(t) = G(t) + \int_0^t K(t-u) F(u)\, du,$$

то його називають рівнянням типу згортки. І в термінах операції згортки його можна записати як

$$F = G + K * F.$$

Якщо припустити, що визначені перетворення Лапласа $\hat{g}(s)$ та $\hat{k}(s)$ функцій G та K, здійснюючи інтегральне перетворення обох сторін рівняння типу згортки виводимо таке рівняння для $\hat{f}(s)$ – перетворення Лапласа для F:

$$\hat{f}(s) = \hat{g}(s) + \hat{k}(s) \hat{f}(s).$$

Звідки

$$\hat{f}(s) = \hat{g}(s) \left(1 - \hat{k}(s)\right)^{-1} = \hat{g}(s) + \hat{g}(s) \hat{r}(s),$$

де

$$\hat{r}(s) = \hat{k}(s) \left(1 - \hat{k}(s)\right)^{-1}.$$

Тоді обернене перетворення Лапласа дає

$$F(t) = G(t) + \int_0^t R(t-u) G(u)\, du,$$

де резольвента $R(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} \hat{r}(s) e^{st} ds$.

Наприклад, нехай маємо незалежні в.в. ξ та ζ:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \ \zeta \sim Exp(2).$$

Визначимо сім'ю в.в. $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ таких, що $X_t = 0$ м.н. для $t \le 0$. Для $t > 0$ в.в. X_t має $Exp(t)$-розподіл, якщо $\xi = 1$, та розподіл як і X_{t-u}, якщо $\xi = 2$ та $\zeta = u$. Розглянемо хвіст розподілу X_t для $x > 0$:

$$\mathsf{P}\{X_t > x\} = \frac{1}{2} \mathsf{P}\{X_t > x | \xi = 1\} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathsf{P}\{X_{t-u} > x\} \mathsf{P}\{\zeta \in du\} =$$
$$= \frac{1}{2} e^{-xt} + \int_0^t \mathsf{P}\{X_{t-u} > x\} e^{-2u} du.$$

Позначивши

$$F(t, x) = \mathsf{P}\{X_t > x\},$$

отримаємо таке рівняння типу згортки

$$F(t, x) = \frac{1}{2} e^{-xt} + F(t, x) * e^{-2t}$$

з відповідним рівнянням для $\hat{f}_x(s)$ – перетворення Лапласа для $F(t,x)$ по t:

$$\hat{f}_x(s) = \frac{1}{2}(s+x)^{-1} + (s+2)^{-1}\hat{f}_x(s).$$

Звідки

$$\hat{f}_x(s) = \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+x)(s+1)}.$$

Якщо $x = 1$,

$$F(t,x) = \frac{1}{2}e^{-t}(1+t),$$

а якщо $x \neq 1$, то

$$F(t,x) = \frac{1}{2}\frac{x-2}{x-1}e^{-xt} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}e^{-t}, t > 0.$$

Метод характеристичних функцій істотно базується на твердженні щодо зв'язку між слабкою збіжністю розподілів та поточкової збіжності їх відповідних х.ф.

Теорема А.20 (Леві неперервності)**.** *Послідовність в.в.* $\{X_n\}$ *є збіжною за розподілом до в.в.* X *тоді й тільки тоді, коли збіжною в кожній точці є послідовність відповідних х.ф.* φ_{X_n} *до функції* φ*, що неперервна в нулі. При цьому* φ *є х.ф. для* X[49].

Перехід від в.в. до випадкових векторів дозволяє здійснити таке твердження.

Теорема А.21 (Крамера-Волда про критерій слабкої збіжності)**.** *Послідовність випадкових векторів* $\{X_n\}$ *зі значеннями в* $\mathbb{R}^d$ *є збіжною за розподілом тоді й тільки тоді, коли для довільного* $\alpha \in \mathbb{R}^d$ *за розподілом збіжною є послідовність* $\alpha^\top X_n$*.*[50]

Нехай маємо послідовність в.в.

$$\left\{X_{n,k}, k = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

причому $X_{n,k}$ незалежні однаково розподілені $\forall n \in \mathbb{N}$. Визначимо в.в.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$$

і розглянемо задачу як охарактеризувати всі розподіли, що можуть слугувати як граничні для S_n.

[49] Див., наприклад, теорему Леві про критерій слабкої збіжності в *Карташов М.В.* Ймовірність, процеси, статистика. Річний курс для математиків та статистиків. К.: Видавництво ТВіМС, 2004.

[50] Див., наприклад, Theorem 29.4. в *Billingsley P.* Probability and Measure. N.Y.: John Wiley & Sons, 1995.

Наприклад, якщо $X_{n,k} \sim Be\,(p_n)$, де $np_n \to \lambda > 0$, то за теоремою Пуассона

$$S_n \overset{Law}{\to} S \sim Pois\,(\lambda)\,.$$

Якщо ж

$$X_{n,k} = (\xi_k - \mathsf{E}\xi_k)\,/\sqrt{nD\xi_k},$$

де $\{\xi_k\}$ – деякі незалежні однаково розподілені в.в. з обмеженою дисперсією, то за центральною граничною теоремою

$$S_n \overset{Law}{\to} S \sim N\,(0,1)\,.$$

Визначення. В.в. S (х.ф. φ_S) називають *безмежно подільною*, якщо на початковому ймовірнісному просторі $\forall n \in \mathbb{N}$ існують незалежні в.в. $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ такі, що розподіл S збігається з розподілом суми $\sum_{k=1}^n \xi_k$ $\left(\varphi_S = \varphi_{\xi_1}^n\right)$.

Теорема А.22 (про безмежно подільну границю послідовності в.в.). *В.в. S може бути границею за розподілом суми $S_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k}$ тоді і тільки тоді, коли S є безмежно подільною.*

Зауважимо, що теорема має місце також, якщо умову того, що в.в. $X_{n,k}$ однаково розподілені, замінити на умову їх асимптотичної малості:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \mathsf{P}\left\{|X_{n,k}| \ge \varepsilon\right\} = 0.$$

Прикладами безмежно подільних розподілів є $Cauchy\,(a)$, $N\left(a,\sigma^2\right)$, $Pois\,(\lambda)$ та $Gamma\,(\theta,\beta)$, що випливає безпосередньо з вигляду їх х.ф.: $e^{-a|\alpha|}$, $e^{i\alpha a-\alpha^2\sigma^2/2}$, $\exp\left\{\lambda\left(e^{i\alpha}-1\right)\right\}$ та $(1-i\alpha\beta)^{-\theta}$.

Для довільної безмежно подільної в.в. х.ф. може бути подана в термінах характеристик $\left\{a,\sigma^2,\Pi\right\}$, де $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \ge 0$ та Π – деяка міра на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\int_{0<|x|\le 1} x^2\Pi\,(dx) < \infty$.

Теорема А.23 (про зображення Леві-Хінчина безмежно подільної х.ф.). *В.в. S має безмежно подільний розподіл тоді і тільки тоді, коли х. ф. φ_S має вигляд $e^{\psi(\alpha)}$, де*

$$\psi\,(\alpha) = \imath\alpha a - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \left(e^{\imath\alpha x} - 1 - \imath\alpha\chi\,(x)\right)\Pi\,(dx)\,,$$

де $\chi\,(x) = (x \wedge 1) \vee (-1)$.[51]

[51] Див. Theorem 16.13 в *Fristedt B.E.,* Gray L.F. A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997.

Нехай $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність незалежних однаково розподілених в.в. та $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Припустимо, що існують послідовності чисел $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ та в.в. S такі, що

$$(S_n - b_n)/a_n \overset{Law}{\to} S.$$

За теоремою про безмежно подільну границю послідовності в.в. S є безмежно подільною і питання більш детально охарактеризувати відповідний розподіл.

Визначення. В.в. S (х.ф. φ_S) називають *стійкою*, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ існують незалежні в.в. $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ з розподілом як і S та $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ такі, що розподіл $a_n S + b_n$ збігається з розподілом суми $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ $\left(\varphi_S(a_n\alpha)\, e^{ib_n\alpha} = \varphi_S^n(\alpha)\right)$.

Теорема A.24 (про стійку границю послідовності в.в.). *В.в. S може бути границею послідовності $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} - b_n}{a_n}$ тоді і тільки тоді, коли S є стійкою.*

Теорема A.25 (про зображення Леві-Хінчина стійкої х.ф.). *В.в. S має стійкий розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\varphi_S(\alpha) = e^{\psi(\alpha)},$$

де

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \delta |\alpha|^{\alpha_*} \left(1 + i\theta \frac{\alpha}{|\alpha|} G_{\alpha_*}(\alpha)\right),$$

$0 < \alpha_* \le 2$, $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $|\theta| \le 1$,[52]

$$G_{\alpha_*}(\alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi}{2}\alpha_*, & \alpha_* \ne 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln|\alpha|, & \alpha_* = 1. \end{cases}$$

Відмітимо, що стійкі х.ф. симетричних розподілів мають вигляд

$$\varphi(\alpha) = e^{-\delta|\alpha|^{\alpha_*}}, 0 < \alpha_* \le 2, \delta > 0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Показати, що клас множин A, для яких $\mathsf{P}(\partial A) = 0$, утворює алгебру. Показати, що взагалі то цей клас не є σ-алгеброю.

2. Показати, що сім'я нормальних розподілів з параметрами a та σ^2 є рівномірно щільною тоді і тільки тоді, коли значення параметрів обмежені.

3. Показати, що якщо $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ зосереджена на відрізку $[a, b]$, то $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно щільною.

4. Нехай розподіли $\{\mathsf{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в.в. $\{X_n\}$ рівномірно щільні. Показати, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon : \sup_n \mathsf{P}\{|X_n| > C_\varepsilon\} < \varepsilon$.

[52] Див. Theorem 17.9-17.10 в *Fristedt B.E.*, Gray L.F. A Modern Approach to Probability Theory. N.Y.: Springer, 1997.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Borodin A.N. Stochastic Processes. Cham: Springer International Publishing, 2017. 626 p.

Cinlar E. Probability and stochastics. N.Y.: Springer, 2011. 557 p.

Dobrow R.P. Introduction to Stochastic Processes with R. Hoboken: Wiley, 2016. 479 p.

Durrett R. Essentials of Stochastic Processes. N.Y.: Springer, 2016, 275 p.

Fristedt B.E., Gray L.F. Modern Approach to Probability Theory. N.Y. : Springer, 1997. 756 p.

Gut A. An Intermediate Course in Probability. N.Y.: Springer-Verlag, 2009. 304 p.

Karlin S., Taylor H.M. A first course in stochastic processes. San Diego: Academic Press, 1975. 557 p.

Klenke A. Probability theory: a comprehensive course. London: Springer, 2013. 616 p.

Krylov N.V. Introduction to the Theory of Random Processes. Providence: American Mathematical Society, 2002. 230 p.

Resnick S. Adventures in Stochastic Processes. Boston: Birkhauser, 2005. 626 p.

Theory of Stochastic Processes: With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory / D. Gusak, [et al.]. N.Y.: Springer, 2009. 375 p.

Вентцель А. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. 1996, 400 с.

Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування: підручник / Ю.С. Мішура, К.В. Ральченко, Г.М. Шевченко. 2-ге вид., випр. і допов. К.: ВПЦ "Київський університет", 2021. 496 с.

Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.

Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1-3. М.: Наука, 1971, 1973, 1975.

Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1, 2. М.: ИЛ, 1960, 1963.

Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика. К.: ВПЦ “Київський університет”, 2008. 494 с.

Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 320 с.

Розанов Ю. Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 184 с.

Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. К.: Либідь, 1990. 168 с.

Справочник по теории вероятностей и математической статистике / под ред. В.С. Королюка. К.: Наукова Думка, 1978. 528 с.

Ширяев А.Н. Вероятность: в 2 т. М.: МЦМНО, 2004.

Ширяев А.Н., Булинський А.В. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 408 с.

ЗМІСТ