

Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

О.Г. Гоман

**Математичні моделі механіки рідини
та газу: механіка ідеальної рідини**

Дніпро – 2023

УДК 532/533:519.6](075.8)

Г64

Рецензенти:

Член-кореспондент НАН України, **Блюсс Б.О.**
Доктор фізико-математичних наук, професор **Лобода В.В.**

*Рекомендовано вченою радою
Дніпропетровського національного університету
імені Олеся Гончара
як навчальний посібник*

Гоман О.Г. Математичні моделі механіки рідини та газу: механіка ідеальної рідини: Навч. посібник. – Д.: ДНУ, 2023. – 211 с.

У посібнику викладено математичні основи механіки рідини та газу в рамках теорії ідеальної рідини. Розглянуто основні поняття механіки рідини та газу, систему рівнянь, що описують рух ідеальної рідини, питання гідростатики та взаємодії рідини з зануреними тілами, теорія функції комплексної змінної в застосуванні до задач гідродинаміки ідеальної рідини, безвихрові та вихрові течії ідеальної рідини.

Для студентів, інженерів та фахівців, що спеціалізуються в галузі прикладної математики та інженерної механіки. Подано в авторській редакції.

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1. Основні поняття механіки суцільного середовища	7
ДЛ–№1. Основні положення математичних моделей механіки рідини та газу	7
ДЛ–№2. Похідні за часом у сенсі Ейлера та Лагранжа	15
ДЛ–№3. Деякі основні векторні операції математичного аналізу, що часто використовуються в математичних моделях механіки рідини та газу	23
ДЛ–№4. Рівняння нерозривності (суцільності) з точки зору Ейлера	34
Додаткові вправи за розділом	44
Розділ 2. Поняття ідеальної рідини. Основні рівняння ідеальної рідини	45
ДЛ–№5. Рівняння руху ідеальної рідини в формі Ейлера та інтеграл Бернуллі	45
ДЛ–№6. Інтеграл Коші-Лагранжа	56
ДЛ–№7. Основні закономірності гідростатики	66
ДЛ–№8. Взаємодія занурених тіл з рідиною у стані спокою	75
Додаткові вправи за розділом 2	86
Розділ 3. Плоскі безвихрові течії і теорія аналітичних функцій комплексного змінного	87
ДЛ–№9. Плоскі безвихрові течії ідеальної рідини	87
ДЛ–№10. Подальші приклади комплексних потенціалів	97
ДЛ–№11. Вихроджерела	104
ДЛ–№12. Постановка оберненої задачі про обтікання тіла потоком, швидкість якого на нескінченності задано	112

ДЛ–№13. Розподіл тиску по поверхні циліндра	119
ДЛ–№15. Застосування методу конформних перетворень до вирішення задач обтікання довільних профілів	135
ДЛ–№16. Постулат Жуковського-Чаплигіна-Кутта.	141
ДЛ–№17. Обтікання еліптичного контуру (еліптичного циліндра)	146
ДЛ–№18. Дослідження момента, діючого на еліпс в залежності від кута атаки	153
ДЛ–№19. Теорія тонкого крила	164
ДЛ–№20. Деякі приклади застосування теорії тонкого крила	173
ДЛ–№21. Просторова задача про безвихоровий рух тіла в ідеальній рідині	180
Додаткові вправи за розділом 3	187
Розділ 4. Вихорові течії ідеальної рідини	188
ДЛ–№22. Вихорові течії ідеальної рідини	188
ДЛ–№23. Теореми Лагранжа і теореми Гельмгольца про вихори	196
ДЛ–№24. Утворення вихорів за рахунок небаротропності. Теорема В. Б'єркнеса	203
Список літератури	211

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник являє собою першу частину курсу з математичного моделювання процесів механіки рідини та газу, який складено на основі багаторічного досвіду автора з викладання цієї дисципліни для студентів механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Необхідно відзначити, що на сьогодні не багато є фундаментальних посібників з механіки рідини та газу українською мовою. Більшість вітчизняних навчальних і методичних посібників, що видані останніми роками, присвячено технічній гідродинаміці і орієнтовані на прикладні задачі гідравліки та аеродинаміки. Представлений посібник більш глибоко розглядає саме математичні підходи до описання таких процесів.

Потреба в розрахунках процесів механіки рідини та газу виникає у величезній кількості сучасних прикладних задач: корабеле та авіабудування, енергетики та енергетичного машинобудування, екології та метеорології, видобутку корисних копалин, трубопровідного транспорту, медицини та багато ін. На практиці для розв'язання задач гідродинаміки, гідравліки, аеродинаміки використовують сучасні прикладні програмні комплекси. Але розробка такого програмного забезпечення та коректне його використання потребує знання як фізичних основ механіки рідини, так і відповідних математичних методів дослідження.

Перші дослідження із законів плавання, гідростатики та гідродинаміки належать до античних часів і пов'язані з іменами Архімеда і Герона Александрійського. Основи гідродинаміки заклали в середині XVIII ст. Леонард Ейлер і Даніель Бернуллі, а з XIX століття механіка рідини та газу стала повноцінною науковою дисципліною. Активний розвиток авіаційної і ракетної техніки у XX столітті супроводжувався інтенсивним розвитком теорії та практики дозвукової і надзвукової аеродинаміки. На сьогодні механіка рідини та газу є системною і глибоко математично формалізованою наукою. В класичних університетах глибоке вивчення моделей та методів цієї науки відбувається в рамках підготовки фахівців з прикладної механіки. Але, безумовно, механіка рідини та газу має чітку практичну спрямованість і є основою для розв'язання багатьох прикладних інженерних задач.

В представленій книзі подано вступ до моделі суцільного середовища і теорію течій ідеальної рідини. Традиційно саме з цих розділів, які висвітлюють базові концепції механіки рідини та газу, починають розглядати цю дисципліну за класичного підходу. Автор пропонує цикл лекцій, які проілюстровані прикладами та містять детальні викладки з побудови математичних моделей. В кожній лекції автор намагався вичерпно розглянути відповідні питання. Проте за потреби додаткового ознайомлення з тою або іншою темою, наведено список літератури, що рекомендується читачу. Оскільки теорія науки про рідину та газ багато в чому спирається на математичний апарат інтегро-диференціального числення, то передбачається, що читач знайомий з цими розділами вищої математики, теоретичної механіки та основами фізики речовин.

Автор посібника – Олег Гаврилович Гоман, є відомим вченим, доктором фізико-математичних наук, професором кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, який має більш ніж 60-річний досвід з наукових досліджень й виконання практичних проектів в галузі гідроаеродинаміки. Чималий внесок зроблено автором в розвиток сучасної високотехнологічної індустрії, оскільки протягом багатьох років він плідно співпрацював зі флагманом вітчизняної аерокосмічної галузі «Державним конструкторським бюро «Південне ім. М.К. Янгеля». Посібник відбиває величезний досвід автора з викладання математичних основ механіки рідини і газу, має оригінальний стиль представлення матеріалу, що притаманний автору, лекції якого мали за честь із задоволенням слухати кілька поколінь інженерів, конструкторів і науковців.

Доктор технічних наук, професор А.Ю. Дреус

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

ДЛ–№1.

*Основні положення математичних моделей механіки
рідини та газу*

Ми всі інтуїтивно знаємо, що таке рідина чи газ, але, щоб створити математичну модель МРГ, реальні фізичні властивості рідини чи газу треба якимось чином описати математично. Ми якраз цим і займемось на найближчих наших заняттях.

1.1. Гіпотеза суцільності. В математичних моделях механіки рідини та газу ці речовини прийнято розглядати як суцільні середовища, незважаючи на те, що в природі вони мають корпускулярну структуру. Давайте уточнимо, що значить поняття «суцільне середовище» і, головне, те, що дає це поняття для побудови математичних моделей МРГ. Поняття «суцільне середовище» – це деякий зручний спосіб математичного описання дійсної структури рідин та газів щодо розподілу мас між структурними елементами цих речовин.

Ми добре знаємо із фізики, хоча і не відчуваємо своїми органами чуттів, що всі речовини у природі, у тому числі й рідини та газу, мають корпускулярну структуру, тобто складаються із сукупності окремих корпускул (молекул, атомів, іонів, електронів тощо); тобто, всі тіла у природі по своїй структурі дискретні: вони складаються із окремих частинок (в яких, як правило, зосереджена маса), між якими існує у певному сенсі «пустота», яка умовно не зайнята «матерією»(масою). Правда, у звичайних умовах навіть у дуже малому об'ємі міститься так багато складових частинок рідини чи газу, що навіть у надзвичайно малих об'ємах речовини завжди присутня маса. Це призводить до того, що людина, як суб'єкт вивчення руху рідини та газу не в змозі устежити за кожною окремою фізичною частинкою речовини. Велика кількість частинок рідини та газу в будь-яких об'ємах, значущих для людини, техніки та приладів, що використовуються в техніці, призводить до того, що можна (і навіть необхідно!) вводити осереднення по вказаних корпускулах і прибігати до розгляду поняття «суцільного середовища»,

в якому маса неперервним чином «розмазана» по всьому простору (об'єму).

Гіпотеза про те, що в теоретичній гідромеханіці можна відволікатись від розгляду корпускулярної структури рідини та газу, в якій маса зосереджена тільки в наборі окремих точок (де знаходяться вказані корпускули), а в решті точок простору між цими точками маса фактично відсутня, і вважати масу рідини чи газу неперервно «розмазаною» (розподіленою) по всьому предоствленому простору, відданому їй (йому) в розпорядження і називається *гіпотезою суцільності*. Завдяки цій гіпотезі ми можемо ввести поняття густини речовини, як неперервної функції в кожній точці тієї ділянки простору, що зайнята рідиною чи газом.

Дійсно, давайте розглянемо деякий об'єм V , в якому знаходиться N матеріальних частинок, кожна з масою m (рис.1). В цьому об'ємі можна виділити достатньо малий об'єм ΔV в околі деякої точки P . Хай цей об'єм вміщує n частинок речовини і, значить, маса речовини в об'ємі ΔV дорівнює $\Delta M = n m$. Ми можемо ввести поняття середньої густини речовини в об'ємі ΔV як величину

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (1.1)$$

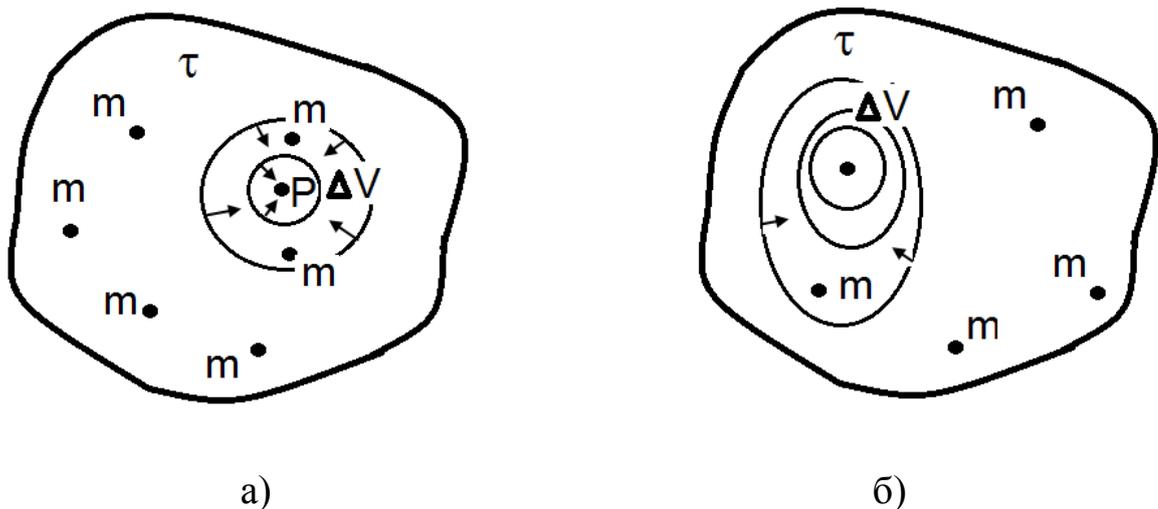


Рис. 1. До питання про густину для дискретного і суцільного середовища

Але, якщо ми спробуємо тепер здійснити граничний перехід $\Delta V \rightarrow 0$, щоб визначити густину в точці P , до якої стягується об'єм ΔV , то для середовища з корпускулярною структурою ми зіткнемося з певною проблемою, а саме: якщо в точці P , до якої стягується об'єм $\Delta V \rightarrow 0$, залишається деяка матеріальна частинка з масою m , то в граничному переході (1.1) ми отримаємо $\rho_{\text{ср}} \rightarrow \infty$, а якщо в точці P матеріальної частинки немає, то в граничному переході (1.1) отримаємо $\rho_{\text{ср}} \rightarrow 0$. Отже, для середовища з корпускулярною (дискретною) структурою не вдається ввести густину ρ як неперервну обмежену функцію у кожній точці об'єму, заповненого цією речовиною.

Але можна постулювати, що вводиться така неперервна функція координат простору x, y, z (і часу) (x, y, z, t) , що в околі кожної точки x, y, z в будь-який час у будь-якому малому об'ємі dV зосереджена елементарна маса, що виражається за формулою

$$dM = \rho(x, y, z, t)dV. \quad (1.2)$$

Гіпотеза про те, що масу рідини (чи газу) можна вважати неперервно «розподіленою (розмазаною)» по об'єму, зайнятому рідиною, дає можливість дивитися на функцію $\rho(x, y, z, t)$ як на неперервну функцію просторових координат і часу. Більш того, оскільки ми збираємось подальше для дослідження руху рідини чи газу використовувати апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних, то ми функцію $\rho(x, y, z, t)$ будемо також вважати не тільки неперервною, а навіть неперервно диференційованою функцією по всіх своїх чотирьох незалежних змінних.

Ми не будемо розповідати про системи координат, відносно яких можна вивчати рух рідини, все це можна з великою користю для власного розвитку прочитати у книзі Л. І. Сєдова, том I. Ми зразу приступимо до розгляду двох основних (у механіці рідини та газу) підходів до вивчення руху суцільних середовищ.

1.2. Дві точки зору на вивчення руху рідини та газу.

1.2.1. Точка зору Ейлера. З однієї точки зору, яка називається точкою зору Ейлера, об'єктом вивчення, строго кажучи, є не сама рідина (газ), а нерухомий простір в сенсі НЬЮТОНА (або певна його частина), заповнені рухомою рідиною, і вивчається:

1) зміна різноманітних елементів руху в кожній фіксованій точці простору з плином часу та

2) зміна цих елементів при переході від однієї точки простору до інших.

Інакше кажучи, з точки зору Ейлера вивчаються різноманітні векторні та скалярні елементи руху, які розглядаються як функції точок простору і часу, тобто, математично, як функції чотирьох аргументів x, y, z, t відносно певної системи координат. Змінні x, y, z, t , розглядувані з такої точки зору, називаються змінними Ейлера. Так, наприклад

$$\vec{V} = \vec{F}(x, y, z, t),$$

або

$$v_x = F_1(x, y, z, t), \quad v_y = F_2(x, y, z, t), \quad v_z = F_3(x, y, z, t), \quad (1.3)$$

і аналогічно

$$\rho = F_4(x, y, z, t) = \rho(t, x, y, z, t) \quad (1.4)$$

і т. ін.

Таким чином, можна сказати, що з точки зору Ейлера, об'єктом (краще навіть сказати: математичним об'єктом) вивчення являються різноманітні векторні та скалярні поля, властиві рідині чи газу, як речовині, розглядуваній з точки зору суцільного середовища (а також і тензорні поля, про що ми будемо говорити дещо пізніше), що, характеризують рух рідини, наприклад: векторне поле швидкості $\vec{V} = \vec{F}(x, y, z, t)$, векторне поле прискорень частинок рідини(чи газу), скалярне поле густини і т. п. З точки зору Ейлера ми «спостерігаємо» за кожною точкою певної частини простору і з'ясовуємо, яка, там, наприклад, швидкість речовини, як вона змінюється з часом, як змінюється густина рідини в кожній точці простору з часом і таке інше.

1.2.2. Точка зору Лагранжа. Крім точки зору Ейлера, до вивчення руху рідини можна застосовувати метод, аналогічний методу аналітичної механіки, що звичайно застосовується до вивчення руху кінечної системи твердих матеріальних тіл, розроблений у свій час Лагранжем. Так що з точки зору Лагранжа, об'єктом вивчення рідини (газу) є сама рідина, розглядувана як система, що складається із окремих неперервно розподілених у просторі матеріальних частинок,

що заповнюють певний об'єм, зайнятий рідиною. Об'єм, заповнений однією і тією ж рідиною (чи газом), який довільно рухається і деформується, але весь час складається із одних і тих же матеріальних частинок, називають «рідинним» (або лагранжевим) об'ємом. Вивчення руху рідини чи газу з точки зору Лагранжа полягає в:

1) дослідженні змін, що отримують різноманітні векторні та скалярні величини, що характеризують рух певних фіксованих частинок рідинного об'єму в залежності від часу, в

2) дослідженні змінювання тих же величин при переході від однієї частинки рідинного об'єму до іншого; інакше кажучи, згадані величини, що характеризують рух частинок, розглядаються як функції від часу і тих параметрів, якими визначається індивідуальність кожної взятої частинки.

Ті параметри (числа), котрі дають нам можливість відрізнити одну частинку рідини від іншої в процесі їх переміщення, називаються ідентифікаторами (індивідуалізаторами) частинок рідини.

Найбільш зручно в якості таких параметрів (ідентифікаторів) приймати, наприклад, декартові координати частинок x_0, y_0, z_0 (або в будь-якій іншій системі координат) в деякий певний (початковий) момент часу t_0 (рис.2). Тоді при переміщенні рідкого об'єму можна, очевидно, трактувати поточні координати будь-якої його частинки x, y, z , як певні функції від часу t й початкових (начальних) координат тієї ж частинки, тобто:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0), \end{aligned} \tag{1.5}$$

причому, при $t = t_0$ функції φ_1, φ_2 та φ_3 тотожно перетворюються в x_0, y_0, z_0 , тобто

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0), \\ y_0 &= \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0), \\ z_0 &= \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

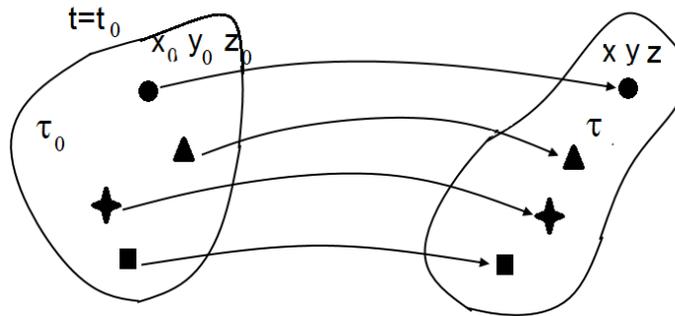


Рис.2. До закону руху суцільного середовища

Більш того, згідно з самою фізикою явища руху частинок, функції φ_1 , φ_2 та φ_3 в (1.5) мають бути однозначно розв'язними відносно x_0, y_0, z_0 , а саме:

$$\begin{aligned} x_0 &= \Phi_1(t, x, y, z), \\ y_0 &= \Phi_2(t, x, y, z), \\ z_0 &= \Phi_3(t, x, y, z). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Функції (1.6) показують, що в точку простору з координатами x, y, z в момент часу t приходить не будь-яка частинка рідини, а та, котра в початковий момент часу t_0 мала координати x_0, y_0, z_0 , які саме і обчислюються за формулами (1.6).

Замість декартових координат x_0, y_0, z_0 , відрізняючих одну частинку від іншої, в розглядуваному рідкому об'ємі можна взяти будь-які три величини a, b, c , зв'язані з x_0, y_0, z_0 взаємно однозначними залежностями:

$$x_0 = \psi_1(a, b, c), \quad y_0 = \psi_2(a, b, c), \quad z_0 = \psi_3(a, b, c), \quad (1.7)$$

що просто значить лише те, що в початковий момент часу за індивідуальні параметри частинки можна взяти її початкові координати в будь-якій іншій криволінійній системі координат.

З точки зору Лагранжа змінні t, a, b, c є аргументами (незалежними змінними) деяких функцій, що визначають значення різноманітних векторних і скалярних функцій, котрими характеризується рух рідини; ці змінні називаються змінними Лагранжа.

Таким чином, рух всієї сукупності частинок, що складають розглядуваний рідинний об'єм, можна задати у вигляді трьох функцій:

$$x = f_1(t, a, b, c), \quad y = f_2(t, a, b, c), \quad z = f_3(t, a, b, c), \quad (1.8)$$

Ці три функції (1.8) називаються законом руху суцільного середовища. Задавши певні конкретні числа для параметрів a, b, c , ми тим самим вибираємо до розгляду певну конкретну матеріальну частинку рідини, чи газу (а саме ту, що в початковий момент часу у вибраній криволінійній системі координат мала координати a, b, c , і формули (1.8) задають її траєкторію (закон руху) в декартовій системі $Oxyz$.

Придаючи числам a, b, c різноманітні можливі значення (можлива сукупність чисел a, b, c визначається із початкових розмірів розглядуваного об'єму в початковий момент часу), ми можемо знайти форму розглядуваного об'єму рідини в довільний момент часу. Проекції швидкості та прискорення на декартові осі системи (1.8) певної частинки рідини (що характеризується певними числами (a, b, c) , виражаються із (1.8) наступними похідними:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(t, a, b, c)}{\partial t}, \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t}, \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial t}, \\ w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}, \\ w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}, \\ w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

причому, при диференціюванні у всіх цих формулах параметри a, b, c зберігають свої значення сталими.

У змінних Лагранжа скалярна гідродинамічна величина, наприклад, густина ρ буде представлятися, як вже було сказано, у вигляді

$$\rho = f_4(t, a, b, c).$$

Принципово аналогічно буде представлятись і будь-яка інша скалярна величина, що характеризує даний потік рідини.

1.3. Перехід від змінних Лагранжа до змінних Ейлера і навпаки.

Розглянемо питання про те, як, скажімо, газодинамічну скалярну величину – густина, задану, наприклад, з точки зору Ейлера, тобто у вигляді

$$\rho = \rho(t, x, y, z), \quad (1.10)$$

задати з точки зору Лагранжа, тобто у вигляді

$$\rho = \rho(t, a, b, c). \quad (1.11)$$

Якщо відомо закон руху рідини у формі (1.8), то, підставляючи вирази (1.8) у формулу (1.10), ми якраз і перейдемо від представлення густини (скалярної функції) по Ейлеру до представлення її по Лагранжу. Дійсно:

$$\rho = \rho(t, x, y, z) = \rho(t, f_1(t, a, b, c), f_2(t, a, b, c), f_3(t, a, b, c)) \equiv \rho(t, a, b, c). \quad (1.12)$$

Якщо потрібно перейти навпаки від завдання функції ρ з точки зору Лагранжа (1.11) до завдання її в сенсі Ейлера (1.10), то спочатку потрібно закон руху суцільного середовища (1.8) розв'язати відносно a, b, c і представити його у вигляді

$$a = \varphi_1(t, x, y, z), b = \varphi_2(t, x, y, z), c = \varphi_3(t, x, y, z), \quad (1.13)$$

Формули (13) при вибраних x, y, z і t визначають початкові координати тієї частинки, яка в момент часу t заходиться в точці з

координатами x, y, z . Заданий нам перехід від представлення (1.11) до представлення (1.10) відбувається за формулою:

$$\rho = \rho(t, a, b, c) = \rho(t, \varphi_1(t, x, y, z), \varphi_2(t, x, y, z), \varphi_3(t, x, y, z)) = \rho(t, x, y, z). \quad (1.14)$$

Цілком зрозуміло, що перехід від завдання векторної величини в сенсі Ейлера і в сенсі Лагранжа відбуваються аналогічно описаному вище переходу для скалярної величини.

○○○

ДЛ–№2.

Похідні за часом у сенсі Ейлера та Лагранжа.

2.1. Зв'язок похідних за часом у сенсі Ейлера та Лагранжа.

Розглянемо скалярну гідродинамічну функцію, задану з точки зору Ейлера. Візьмемо, для прикладу, знову густину. В сенсі Ейлера маємо

$$\rho = \rho(t, x, y, z). \quad (2.1)$$

Обчислимо від цієї функції частинну похідну за часом, котру позначимо через

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_E = \frac{\partial \rho(t, x, y, z)}{\partial t} \quad (2.2)$$

і будемо називати її похідною за часом у сенсі Ейлера. Нагадаємо ще раз, що при обчисленні частинної похідної решта незалежних змінних (тобто в даному випадку величини x, y, z) залишаються незмінними. Цей факт у даному випадку означає, що похідна (2.2) обчислюється у фіксованій точці простору з фіксованими координатами x, y, z по відношенню до вибраної системи координат. Тому частинна за часом похідна в сенсі Ейлера, як ми вже говорили, називається також локальною, або місцевою похідною, бо вона описує, як змінюється функція ρ з часом у фіксованій точці простору; математично – це просто частинна похідна за часом від функції (1.4), чи (1.14).

Тепер розглянемо ту ж саму гідродинамічну величину – густину, задану в сенсі Лагранжа, тобто у вигляді

$$\rho = \rho(t, a, b, c) \quad (2.3)$$

і обчислимо частинну похідну за часом від цієї функції. Ця похідна обчислюється при фіксованих параметрах a, b, c і називається похідною в сенсі Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L = \frac{\partial \rho(t, a, b, c)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Ця частинна похідна описує, як змінюється з часом густина певної матеріальної частинки, а саме тієї, що в даний момент знаходиться в даній точці простору. Тому похідна за часом в сенсі Лагранжа називається ще субстанціональною (чи матеріальною) похідною, або похідною вздовж траєкторії матеріальної частинки.

Із порівняння виразів (2.2) і (2.4) видно, що похідні за часом в сенсі Лагранжа і в сенсі Ейлера – це різні величини, і вони, в загальному випадку не однакові.

Знайдемо зв'язок між похідними в сенсі Ейлера і в сенсі Лагранжа. Розглянемо знову рівність (1.12), яку запишемо дещо в іншому вигляді, використавши формули закону руху середовища (1.8):

$$\begin{aligned} \rho(t, a, b, c) &= \rho(t, x, y, z) = \\ &= \rho(t, f_1(t, a, b, c), f_2(t, a, b, c), f_3(t, a, b, c)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обчислимо зліва і справа похідну за часом у сенсі Лагранжа $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L$, тобто похідну за часом при фіксованих параметрах a, b, c . Зліва це буде похідна за Лагранжем згідно з визначенням, тобто $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L$, обчислена, природно, в припущенні, що при диференціюванні величини a, b, c залишаються фіксованими.

У праву частину виразу (2.5) змінна t входить не тільки безпосередньо, але і через посередництво закону руху суцільного середовища (формули (1.9) попередньої лекції), тобто через $x = f_1(t, a, b, c)$, $y = f_2(t, a, b, c)$ і $z = f_3(t, a, b, c)$.

Отже, похідна від правої частини рівності (2.5) при фіксованих параметрах a, b, c (тобто похідна в сенсі Лагранжа) буде тепер виражатись у вигляді:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_E + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial t} \quad (2.6)$$

Згідно з першою лекцією, похідні $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ і $\frac{\partial f_3}{\partial t}$ означають компоненти швидкості матеріальної частинки v_x , v_y і v_z в даний момент часу в тій точці протору, де знаходиться розглядувана матеріальна частинка, так що ми отримуємо таку залежність

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_E + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.7)$$

У механіці рідини та газу домовились похідну в сенсі Ейлера $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_E$ позначати просто $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ і називати локальною похідною, оскільки в цій науці частіше всього доводиться оперувати методом Ейлера, так що, скажімо, густина (та й інші скалярні величини) частіше всього задаються у вигляді (1.10),(2.1), і похідна по Ейлеру – це просто частинна похідна за часом від функції (1.10).

Похідну $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L$ в сенсі Лагранжа домовились позначати у вигляді

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L = \frac{d\rho}{dt}$$

Цю похідну називають також повною похідною, оскільки в математичному плані похідна $\frac{d\rho}{dt}$ є повною похідною за часом від функції (2.10), в якій замість x, y, z фігурують функції часу із закону руху суцільного середовища (із формули (2.8) попередньої лекції).

Таким чином, повна похідна (похідна в сенсі Лагранжа) виражається через частинну похідну (похідну в сенсі Ейлера) наступним чином

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} . \quad (2.8)$$

Як бачимо, повна похідна дорівнює частинній похідній плюс деяка додаткова величина

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (2.9)$$

котра називається «конвективною похідною», бо зв'язана з конвективним переносом частинок з місця на місце завдяки переміщенню частинок з одного місця в інше.

Конвективна похідна тотожно дорівнює нулю або у випадку, якщо

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

або якщо рідина знаходиться в стані спокою: $v_x = v_y = v_z = 0$. У цих двох випадках похідна по Лагранжу і похідна по Ейлеру співпадають.

2. 2. Деякі кінематичні характеристики течій рідини та газу.

Далі ми розглянемо деякі інші важливі кінематичні характеристики течій рідини та газу.

2.2.1. Траєкторії матеріальних частинок. Траєкторією матеріальної частинки називається та умовна лінія в просторі, яку описує нескінченно мала частинка рідини, тобто певна матеріальна частинка з певним набором чисел-параметрів a, b, c . Якщо ми вже маємо закон руху суцільного середовища (у вигляді системи формул (1.8) із ДЛ–№1), то взявши певну сукупність чисел a, b, c , ми цими формулами можемо розрахувати і траєкторію кожної частинки із вибраної множини індивідуальних параметрів a, b, c . Якщо проваріювати параметрами a, b, c , то отримаємо певну сукупність траєкторій.

Як за правило, розрахунки гідрогазодинамічних течій проводять з точки зору Ейлера, в результаті чого з тим чи іншим наближенням знаходиться поля швидкостей рідини (газу), і виникає задача, як розраховувати траєкторії (одну чи деяке їх сімейство), якщо вже визначено поле швидкостей в змінних Ейлера, тобто, коли відомі компоненти швидкостей, задані з точки зору Ейлера, тобто відомі функції:

$$v_x = v_x(t, x, y, z), v_y = v_y(t, x, y, z), v_z = v_z(t, x, y, z). \quad (2.10)$$

З другого боку, ми знаємо (із закону руху рідини, лекція ДЛ1, формули (1.9)), що, наприклад:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(t, a, b, c)}{\partial t}, \quad (2.11)$$

де функція $x = f_1(t, a, b, c)$ – це залежність координати x лагранжевої частинки з параметрами a, b, c , причому в формулі (2.11) похідна $\frac{\partial x}{\partial t}$ обчислюється при фіксованих параметрах a, b, c , тобто це (а також інші аналогічні похідні) є похідна в сенсі Лагранжа (похідна вздовж траєкторії матеріальної частинки). Але ми недавно домовились похідну з точки зору Лагранжа позначати за допомогою «прямих» латинських букв «d», тобто у формулі (2.11) замість $\frac{\partial x}{\partial t}$ можна (і навіть потрібно) написати $\frac{dx}{dt}$. Отже, якщо поле швидкості задане з точки зору Ейлера, то рівності (2.10), що стосуються компонентів швидкості можна правильно записувати і у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t, x, y, z), \quad (2.12)$$

і аналогічно

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t, x, y, z), \quad (2.13)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t, x, y, z). \quad (2.14)$$

Система рівнянь (2.12)–(2.14) і є системою диференціальних рівнянь для визначення сімейства траєкторій. Кожна траєкторія має проходити через певну точку (x_0, y_0, z_0) при $t = t_0$, що і представляє собою початкові умови для інтегрування системи рівнянь (2.12)–(2.14).

Неважко бачити, що в результаті інтегрування вказаної системи з початковими умовами

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0 \text{ при } t = t_0$$

ми отримаємо розв'язок цієї системи у такому вигляді

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

що і представляє собою закон руху суцільного середовища (у формі Лагранжа), в якому в якості параметрів a, b, c виступають параметри x_0, y_0, z_0 .

2.2.2.Лінії струменю. Хай поле швидкості рідини (газу) знайдено в сенсі Ейлера, тобто відомі функції

$$v_x(t, x, y, z), \quad v_y(t, x, y, z), \quad v_z(t, x, y, z). \quad (2.15)$$

Фіксуємо певний момент часу t_0 і поставимо собі таку задачу: знайти такі лінії в полі вектора \vec{V} ,

$$\vec{V} = v_x(t, x, y, z)\vec{i} + v_y(t, x, y, z)\vec{j} + v_z(t, x, y, z)\vec{k}, \quad (2.16)$$

щоб у кожній точці цієї лінії вектор швидкості (2.16) був направлений вздовж дотичної до цієї лінії (рис.3).

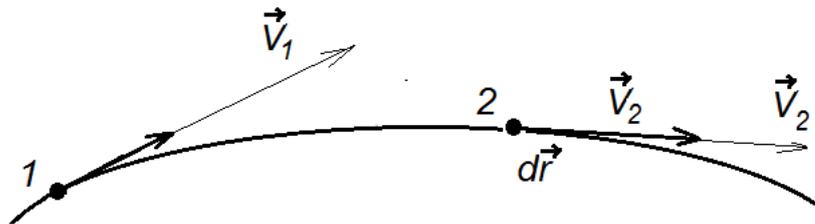


Рис. 3. До поняття лінії струменю

Така лінія називається лінією струменю.

Позначимо через

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (2.17)$$

елементарний вектор дотичної до вказаної кривої в певній точці. Оскільки вектори \vec{V} (2.16) і $d\vec{r}$ (2.17), по визначенню, мають бути колінарними, то їх векторний добуток в кожній точці лінії струменю має перетворюватись в нуль, звідки отримаємо таке рівняння, котре має виконуватись в кожній точці лінії струменю (компоненти обох векторів мають бути пропорційними).

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (2.18)$$

або, точніше

$$\frac{dx}{v_x(t_0, x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(t_0, x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(t_0, x, y, z)}. \quad (2.19)$$

Трьохчленне рівняння (2.19) можна написати у вигляді системи двох рівнянь, якщо, скажімо, змінну x взяти в якості незалежної змінної:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(t_0, x, y, z)}{v_x(t_0, x, y, z)}, \quad (2.20)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v_z(t_0, x, y, z)}{v_x(t_0, x, y, z)}.$$

В якості «початкової» умови можна вибрати координати будь-якої певної точки x_0, y_0, z_0 , через яку має проходити та лінія струменю, що нас цікавить. Вибрані координати x_0, y_0, z_0 можна трактувати як «початкову» умову для розв'язання системи (2.20):

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2.21)$$

Для визначення рівняння лінії струменю можна користуватися і тричленным рівнянням (2.19), для чого корисно ввести додатковий скалярний параметр, наприклад σ , що неперервно змінюється вздовж лінії струменю і однозначно визначає кожну точку цієї лінії. Тоді будемо мати диференціальне рівняння лінії струменю у вигляді

$$\frac{dx}{d\sigma} = v_x(t, x, y, z); \quad \frac{dy}{d\sigma} = v_y(t, x, y, z); \quad \frac{dz}{d\sigma} = v_z(t, x, y, z). \quad (2.22)$$

Ще раз підкреслимо, що лінія струменю – це миттєве поняття, миттєва «фотографія» потоку рідини. У зв'язку з цим зауважимо, що систему диференціальних рівнянь траєкторій (2.12)–(2.14) можна також записати у вигляді

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt, \quad (2.23)$$

який за формою дещо нагадує рівняння ліній струменю (2.18) чи (2.22). Основна відмінність між рівнянням (2.23) (траєкторії) і рівнянням (2.18)

(лінії струменю) полягає у тому, що система рівнянь траєкторії має інтегруватись за часом (по t), тоді, як рівняння ліній струменю інтегрується по деякій просторовій змінній і справджується, як вже було сказано, у певний фіксований момент часу. Але, якщо, наприклад поле швидкості не залежить від часу (так зване стаціонарне поле) , то лінії струменю і лінії траєкторій фактично співпадають.

У загальному випадку, коли поле течії є стаціонарним, через кожен точку простору можна провести одну (і тільки одну!) лінію струменю, і все поле рідини (чи газу) може бути покрито (нескінченною) сукупністю ліній струменю. Якщо поле швидкостей нестаціонарне, то сукупність ліній струменю в кожен момент часу також пронизує всю рідину, але сукупність цих ліній змінюється з часом.

2.2.3. Поверхня струменю і трубка струменю. В гідромеханіці дуже часто знаходить застосування поняття поверхня струменю і трубка струменю. Візьмемо в полі рухомої рідини (чи газу) деяку умовну лінію C (рис.4), яка сама не є лінією струменю і, на перший раз, не є замкнутою кривою. Тоді, користуючись визначенням, що таке лінія струменю, ми можемо через кожен точку лінії C , як початкову точку, провести (розрахувати) лінію струменю, і вся сукупність таких ліній створить деяку поверхню, яка буде являтися поверхнею струменю. Головною властивістю такої поверхні є те, що в кожній її точці нормаль до цієї поверхні перпендикулярна до вектору швидкості (вектор швидкості лежить в дотичній площині до поверхні струменю).

Якщо лінію C взяти замкнутою (у припущенні, що ця лінія сама не є лінією струменю!), то через кожен точку цієї лінії можна провести деяку лінію струменю; в результаті із цих ліній одержимо трубкоподібну поверхню, яка і називається трубкою струменю. Безпосередньо на поверхні трубки швидкість рідини лежить у дотичній площині до цієї поверхні.

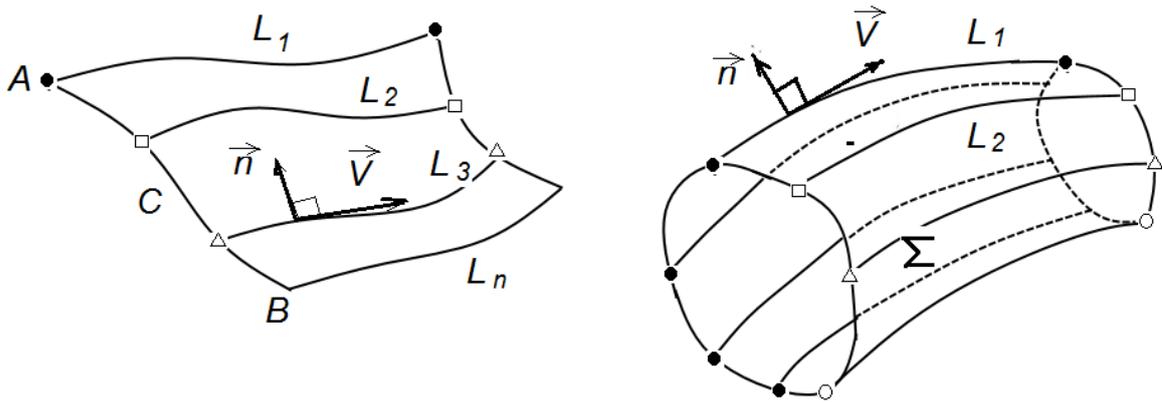


Рис. 4. Поверхня струменю і трубка струменю

Поняття трубки струменю широко використовується в гідродинаміці, будь-яка трубка, вздовж якої тече рідина чи газ, є трубкою струменю.

○○○

ДЛ – №3.

Деякі основні векторні операції математичного аналізу, що часто використовуються в математичних моделях механіки рідини та газу

У гідродинаміці нам часто доводиться користуватися векторними величинами (векторами є швидкість частинок рідини чи газу, прискорення, різноманітні сили, градієнти скалярних функцій тощо. Тому в гідродинаміці часто доводиться користуватися поняттями векторної алгебри і векторного аналізу (тензорні поняття, що неодмінно виникають в математичних моделях механіки рідини та газу, ми в цьому семестрі взагалі не будемо використовувати, а в наступному познайомимось лише з деякими основними поняттями тензорного аналізу). Але поняття векторного аналізу ми будемо використовувати повсякчасно; застосування векторного аналізу спрощує вивід основних рівнянь механіки рідини чи газу, дозволяє в загальних міркуваннях не зв'язуватись з конкретною системою координат і дає можливість більш наглядно представляти всі поняття гідродинаміки.

3.1. Градієнт скалярної функції. Гідродинамічні функції, з якими нам доведеться оперувати в механіці рідини чи газу (як поняттями

механіки суцільних середовищ), поділяються на скалярні та векторні (про тензорні поки що не згадуємо). Так векторними величинами є швидкість частинок рідини, їх прискорення, напруження, сили, імпульси сил, моменти тощо. Скалярними величинами є такі гідрогазодинамічні функції, що характеризуються лише своїм модулем і не мають «напрямку»: це густина речовини (рідини чи газу), температура, тиск, енергія тощо.

Розглянемо деяку скалярну функцію, як наприклад густина чи, температура. Тобто, нехай φ – це деяка скалярна гідрогазодинамічна функція. Ми будемо вважати її заданою як функцію точки простору (і, можливо, часу), тобто будемо вважати, що функція φ задана з точки зору Ейлера, чи то пак, як функція координат у просторі (можемо навіть вважати, що у декартовій системі координат) і часу

$$\varphi = \varphi(t, x, y, z),$$

де сукупність змінних x, y, z утворює деякий об'єм у просторі. Будемо, як завжди, вважати, що функція $\varphi(t, x, y, z)$ є неперервною разом з усіма своїми першими похідними, про що в подальшому ми, як за правило, вже не будемо згадувати. На даний момент нас цікавить лише залежність функції φ від просторових змінних, тому залежність її від часу можна і не вказувати.

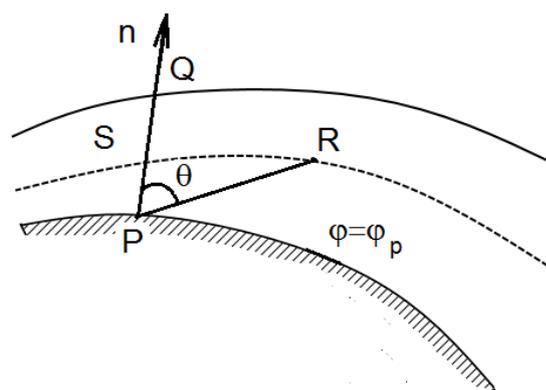


Рис.5. До поняття градієнта скалярної функції

В силу неперервності функції φ , взагалі кажучи, існує сімейство поверхонь, на кожній із яких функція φ приймає деяке своє фіксоване стале значення. Такі поверхні ми будемо називати поверхнями рівня

функції φ . Нехай P – довільна точка, проведемо через неї поверхню рівня $\varphi = \varphi_P$ (рис.5), а Q – близька до неї точка, що лежить на нормалі до поверхні рівня $\varphi = \varphi_P$, проведеної через точку P (див. рис. 5). Тоді, якщо розглядати відрізок PQ як величину першого порядку малості, можна записати

$$\varphi_Q - \varphi_P = PQ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}, \quad (3.1)$$

де PQ – відстань точки Q від точки P , $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}$ – похідна (швидкість зміни функції φ при зміщенні від точки P по нормалі до точки Q).

Хай R – довільна точка, близька до точки P і хай поверхня рівня $\varphi = \varphi_R$ пересікає відрізок PQ у точці S . З точністю до величин другого порядку малості відрізок RS перпендикулярний до відрізка PQ . Тоді маємо

$$\varphi_R = \varphi_S = \varphi_P + PS \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}, \quad (3.2)$$

тобто:

$$\varphi_R - \varphi_P = PR \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}, \quad (3.3)$$

де через θ позначено кут між векторами \overrightarrow{PQ} і \overrightarrow{PR} .

Введемо тепер поняття вектора градієнта функції φ , а саме: позначимо через $grad\varphi$ вектор, що направлений вздовж PQ і по модулю дорівнює $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}$, тобто

$$|grad\varphi| = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{PQ}.$$

Замінімо тепер вектор \overrightarrow{PQ} на $PQ\vec{n}$, де \vec{n} – одиничний вектор, направлений вздовж нормалі до поверхні рівня функції φ в точці P . Якщо придивитись до формули (3.3) більш уважно, то вона нам нагадає скалярний добуток двох векторів \vec{a} і \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

тобто

$$\varphi_R - \varphi_P = \overline{PR} \cdot \text{grad}\varphi = PR|\text{grad}\varphi|\cos\theta. \quad (3.4)$$

Звідси вбачаємо, що

$$|\text{grad}\varphi| = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{PQ},$$

і що вектор $\text{grad}\varphi$ направлений вздовж нормалі до поверхні $\varphi = \text{const}$ в сторону росту функції φ . Остаточно маємо, що

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (3.5)$$

Доведіть, що

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.6)$$

Для позначення векторних диференціальних операцій англійський вчений Гамільтон ввів диференціальний символічний вектор

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.7)$$

який діє на ту функцію, що стоїть справа від цього оператора.

Наприклад, для скалярної функції $\varphi(x, y, z)$ маємо:

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad}\varphi.$$

Із форми оператора Гамільтона випливає, що цей символічний диференціальний оператор являється вектором і тому він, як і звичайний вектор, може використовуватись і самостійно в операціях векторного аналізу, тобто він, наприклад, може використовуватись як множник у скалярному і у векторному добутку.

Як ми вже сказали, оператор ∇ ввів в науку англійський вчений Гамільтон, він же придумав і сам знак ∇ для цього оператора і дав йому

назву «набла» – так на грецькій мові називається арфа, оскільки цей «трикутник з гострим кінцем внизу» за формою сильно нагадує давньогрецьку арфу.

3.3. Операція div (дівергенція) і формула Остроградського-Гауса.

Нехай нам задано деяке векторне поле, яке ми завжди можемо ототожнити з полем швидкості деякої рідини; отже надалі будемо говорити: нехай нам задано деяке поле швидкості рідини. Це поле може бути нестационарним і тоді $\vec{V}(t, x, y, z)$, або стаціонарним, і тоді $\vec{V}(x, y, z)$. Нехай в області завдання функції \vec{V} задано деяку двосторонню математичну поверхню S (рис.6).

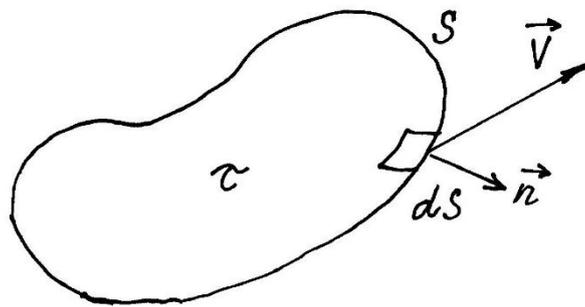


Рис.6. До формули Остроградського-Гауса

Будемо одну сторону цієї поверхні позначати значком (-), а іншу (+), щоб їх якось відрізнити між собою. Будемо вважати, що, скажімо, на стороні S^+ ми ввели нормаль \vec{n} до поверхні S , яку направляємо від сторони S^+ назовні від поверхні і що нормаль неперервно змінює свою орієнтацію при переміщенні від однієї точки поверхні до іншої. Визначимо кількість рідини (тобто, об'єм рідини), що перетікає через поверхню S (зі сторони S^- на сторону S^+), скажімо, за проміжок часу dt . Для визначення кількості рідини, що перетікає з однієї сторони поверхні на іншу, ми спочатку розіб'ємо поверхню S на систему елементарних ділянок площею dS . Тоді об'ємний потік рідини зі сторони S^- на сторону S^+ через кожен елементарну площадку за проміжок часу dt виражатиметься як

$$(\vec{V}\vec{n}dS)dt, \quad (3.8)$$

а об'ємна витрата рідини через всю поверхню S виразиться за допомогою поверхневого інтеграла

$$\int_S \vec{V} \vec{n} dS dt . \quad (3.9)$$

За одиницю часу через поверхню S пройде об'єм рідини, що виражається інтегралом

$$Q = \int_S \vec{V} \vec{n} dS . \quad (3.10)$$

Формула Остроградського-Гауса стверджує, що, якщо є неперервно диференційована векторна функція

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k} , \quad (3.11)$$

де, до речі, компоненти вектора \vec{A} можуть залежати і від часу, як від параметра, то для довільного об'єму τ , обмеженого довільною гладкою замкнутою поверхнею S (див. рис.6), має місце наступна інтегральна тотожність.

$$\int_S \vec{A} \vec{n} dS = \int_\tau \operatorname{div} \vec{A} d\tau , \quad (3.12)$$

або

$$\begin{aligned} \int_S (A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)) dS = \\ = \int_\tau \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де через \vec{n} позначено зовнішню нормаль до замкненої поверхні S .

Формула (3.12) – це і є формула Остроградського-Гауса для довільного векторного поля \vec{A} . Формулу Остроградського-Гауса можна розглядати як узагальнення відомої із інтегрального обчислення формули Ньютона-Лейбніца, що дає зв'язок між інтегралом від деякої функції $f(x)$ по інтервалу (a, b) з різницею значень первісної функції $F(x)$ на кінцях цього інтервалу. Для запам'ятовування формули (3.12) зручно внести в неї оператор Гамільтона, оскільки

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A},$$

де права частина останньої рівності означає скалярний добуток векторів ∇ і \vec{A} . Запишемо ще скалярний добуток ($\vec{A}\vec{n}$) і у формулі (3.12) зліва у вигляді ($\vec{n}\vec{A}$), оскільки скалярний добуток не змінюється від перестановки множників. Тепер формулу Остроградського-Гауса можна записати у вигляді:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{A} dS = \int_\tau \nabla \cdot \vec{A} d\tau, \quad (3.14)$$

де знак (\cdot) означає скалярний добуток. Звідси випливає мнемонічне правило для запам'ятовування формули Остроградського-Гауса:

При переході від об'ємного інтеграла до поверхневого треба операцію скалярного множення оператора Гамільтона на підінтегральний вектор замінити на множення вектора зовнішньої одиничної нормалі на цей же вектор; іншими словами, треба вектор ∇ замінити на вектор нормалі \vec{n} :

$$\nabla \cdot \vec{A} \leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{A}. \quad (3.15)$$

Цілком зрозуміло, що чисто математично формула (3.13) справедлива для будь-яких трьох функцій $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ і $A_z(x, y, z)$, – тільки б вони були неперервно диференційовані. Так, покладаючи $A_z(x, y, z) = \varphi$, $A_y = 0$, $A_x = 0$, отримаємо таку формулу

$$\int_S \varphi \cos(n, x) dS = \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau. \quad (3.16)$$

Очевидно також, що справедливі і формули

$$\int_S \varphi \cos(n, y) dS = \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\tau, \quad (3.17)$$

$$\int_S \varphi \cos(n, z) dS = \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau. \quad (3.18)$$

Останні формули зручно запам'ятати у такому вигляді: позначимо $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ і, відповідно, позначимо косинуси нормалі: $\cos(n, x) = \cos(n, x_1)$ і т. д. Тоді формули (3.16) – (3.18) можна записати у більш компактному вигляді

$$\int_S \varphi \cos(n, x_i) dS = \int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\tau, \quad (i=1,2,3). \quad (3.19)$$

Тобто, при переході від об'ємного інтеграла до поверхневого треба похідну $\frac{\partial}{\partial x_i}$ замінити на $\cos(n, x_i)$.

Далі, якщо помножити рівність (3.16) на орт \vec{i} , (3.17) – на орт \vec{j} і (3.18) – на \vec{k} та скласти ліві і праві частини, то отримаємо

$$\int_S \varphi \vec{n} dS = \int_{\tau} \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau = \int_{\tau} \text{grad } \varphi d\tau, \quad (3.20)$$

де позначено: $\vec{n} = \cos(n, x)\vec{i} + \cos(n, y)\vec{j} + \cos(n, z)\vec{k}$ – орт зовнішньої нормалі.

Отже, ми отримали ще одну важливу формулу Остроградського-Гауса для скалярної функції:

$$\int_S \varphi \vec{n} dS = \int_{\tau} \text{grad } \varphi d\tau. \quad (3.21)$$

Останню формулу доцільно порівняти з формулами (3.19) як її окремий випадок.

3.3. Оператор rot (ротор) і вихорові лінії. Оскільки оператор ∇ , крім того, що він є диференціальний, ще є і векторний, то його можна застосовувати з довільною векторною функцією не тільки у вигляді скалярного добутку, як ми це робили раніше і отримували операцію div, а саме

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \vec{V}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

але і у вигляді векторного добутку $\nabla \times \vec{V}$. За правилом векторного добутку маємо

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В результаті операції $\nabla \times \vec{V}$ ми отримали новий вектор, компоненти якого виражаються за допомогою виразу (3.23). Цей вектор називається вектором вихору (вектора швидкості) і звичайно позначається як $\text{rot} \vec{V} \equiv \vec{\Omega}$. Назва вихор (ротор) походить від фізичного смислу цієї величини: виявляється, що величина $\text{rot} \vec{V}$ в кожній точці рідини представляє собою вектор місцевої подвійної кутової швидкості $2\vec{\omega}$, з якою обертається мала частинка рідини навколо осі, що проходить через центр цієї ж частинки:

$$\text{rot} \vec{V} \equiv \vec{\Omega} = 2\vec{\omega}. \quad (3.24)$$

(див. так звану теорему Коші-Гельмгольца, див. кн. Кочин, Кибель, Розе. Теоретическая гидромеханика, часть I.).

Аналогічно тому, як ми вводили лінії струменю для вектора швидкості \vec{V} , можна ввести векторні лінії і для вектора $\vec{\Omega}$; такі лінії називаються вихоровими лініями. Із серії вихорових ліній, що проходять через деяку довільну лінію (невихорову), утворюється вихорова поверхня (вихорова пелена), а із вихорових ліній, що проходять через деяку замкнену криву, утворюється вихорова трубка (аналогічно тому, як для вектора швидкості ми вводили лінії струменю, поверхні струменю і трубки струменю).

Течія рідини, для якої $\vec{\Omega}$ не дорівнює тотожно нулю в певній області простору, називається вихоровою, а течія, в кожній точці якої $\vec{\Omega} = 0$ на протязі певного часу, називається безвихоровою.

Безвихорова течія має дуже характерну особливість, котра відрізняє її від всіх вихорових течій, а саме: із математичного аналізу відомо, що, якщо для деякого векторного поля (позначимо його як $\vec{V}(x, y, z)$) маємо $\text{rot} \vec{V} = 0$, то тоді існує така скалярна функція $\varphi(x, y, z)$, для якої виконується рівність

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi(x, y, z). \quad (3.25)$$

У цьому разі поле вектора $\vec{V}(x, y, z)$ називається потенціальним, функція φ – називається потенціалом для вектора \vec{V} (вектора швидкості), а сама течія називається потенціальною.

Якщо мова йде про поле швидкості так званої нестисливої рідини, то ми покажемо в наступній лекції, що для такої рідини виконується іще і умова $\text{div}\vec{V} = 0$, так що, якщо течія до того ж іще і потенціальна то, скориставшись формулою (3.25), отримаємо:

$$\text{div}\vec{V} = \text{divgrad}\varphi = 0, \quad (3.26)$$

тобто

$$\text{div grad}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.27)$$

Рівняння (3.27) називається рівнянням Лапласа, а диференціальний оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta, \quad (3.28)$$

називається оператором Лапласа. Зауважимо, що як випиває із рівняння (3.27), має місце таке символічне рівняння

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta. \text{ (або } \nabla^2 = \Delta).$$

3.4. Формула Стокса. Візьмемо в полі заданого вектора (нехай це буде поле вектора швидкості руху рідини \vec{V}) деякий замкнутий контур C (див. рис.7), і на цей контур, як на ободок, як кажуть, натягнемо ніби «шапочку» деяку поверхню S , як показано на рис. 7. Введемо поняття циркуляції вектора швидкості по замкнутому контуру C :

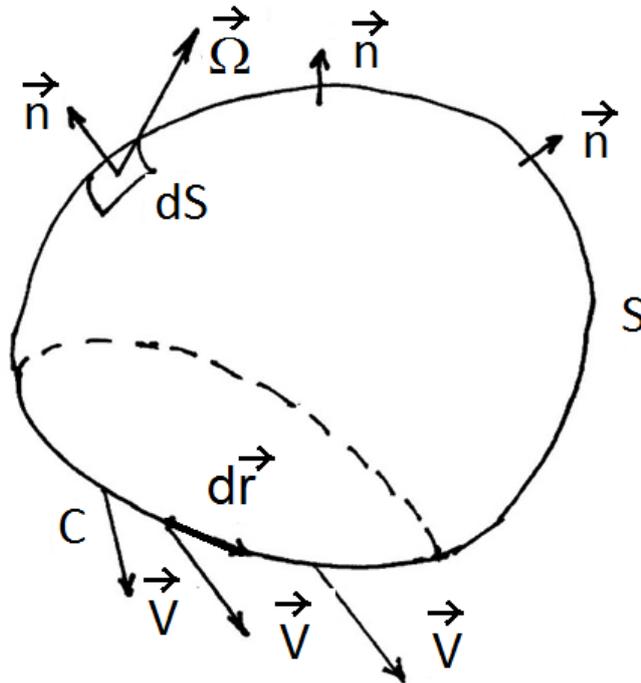


Рис. 7. До виводу формули Стокса

Введемо на контурі C напрямок обходу, і нехай

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

елемент кривої C , направлений в сторону обходу. Циркуляцією вектору \vec{V} по контуру C назвемо криволінійний інтеграл

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} d\vec{r}. \quad (3.29)$$

Так от: теорема Стокса стверджує, що має місце наступна тотожність:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} d\vec{r} = \int_S \vec{\Omega} \vec{n} dS, \quad (3.30)$$

де інтеграл справа означає потік вектора вихору $\vec{\Omega}$ через довільну поверхню, натягнуту на вказаний контур C . Звертаємо увагу на те, що при вибраному певному контурі C поверхню S можна обрати фактично будь-якою.

Вкажемо ще на один цікавий висновок, що витікає із формули Стокса, а саме: нехай контур C стягується до точки; тоді, природно, циркуляція буде дорівнювати нулю, і ми отримаємо, що

$$\int_S \vec{\Omega} \vec{n} dS = 0, \quad (3.31)$$

правда, у цій формулі (3.31) поверхня S вже є замкнутою. Таким чином, ми установили, що потік вектора $\vec{\Omega}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Але ж для потоку будь-якого вектора через замкнену поверхню справедлива і формула Остроградського-Гауса

$$\int_S \vec{\Omega} \vec{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{\Omega} d\tau,$$

а оскільки останній інтеграл по довільному об'єму τ дорівнює нулю, то це значить, що підінтегральна функція тотожно дорівнює нулю в кожній точці поля, тобто

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V} = 0,$$

і значить, операція $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V}$ для будь-якого вектора \vec{V} дорівнює нулю, в чому можна впевнитися і безпосередньо.

○○○

ДЛ-№4.

Рівняння нерозривності (суцільності) з точки зору Ейлера

Рівняння нерозривності (суцільності) – це диференціальне рівняння, яке в термінах механіки суцільного середовища виражає закон збереження маси рухомої рідинної чи газоподібної субстанції. Виведемо диференціальне рівняння нерозривності рідини (газу) і взагалі будь-якого суцільного матеріального середовища!) з точки зору Ейлера.

Нехай в деякій просторовій області відбувається течія рідини (чи газу); для загальності прийемо, що густина цієї рідини може змінюватись від точки до точки і з часом. Таким чином, розглянуте нами середовище, як об'єкт механіки, характеризується такими гідрогазодинамічними функціями: густина

$$\rho = \rho(t, x, y, z), \quad (4.1)$$

вектор швидкості

$$\vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z), \quad (4.2)$$

і вектор прискорення

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

де функції (4.1), (4.2) задані у певній ейлеровій системі координат.

Ми отримаємо закон збереження маси спочатку в інтегральній формі, а потім із цієї форми перейдемо до диференціального рівняння, записаного у векторному вигляді (тобто байдужого до конкретної системи координат), від якого потім порівняно легко перейти до вигляду цього рівняння у будь-якій криволінійній системі координат.

Виділимо в області, зайнятій рідиною, деякий умовний довільний ейлерів об'єм τ , тобто певний об'єм простору, обмежений замкнутою поверхнею S (рис.8). Через виділений об'єм (і поверхню S також) рухається рідина (газ). Об'єм τ , як ейлерів об'єм, з плином часу не змінюється, але із нього деякі матеріальні частинки можуть виходити (через деякі елементи поверхні S), тоді як інші частинки можуть входити (через інші елементи поверхні).

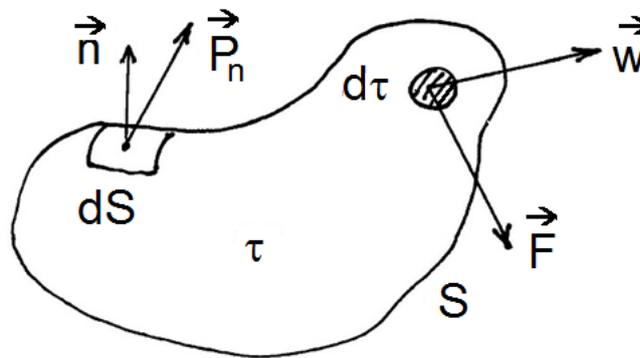


Рис.8. До виводу рівняння нерозривності

Розглянемо тепер математичну процедуру, за допомогою якої ми (в принципі) спроможні розрахувати масу рідини в об'ємі τ та знайти приріст маси в ньому ж за нескінченно малий проміжок часу dt .

Візьмемо момент часу t ; очевидно, що маса рідини в об'ємі τ може бути визначена інтегралом

$$M(t) = \int \rho(t, x, y, z) d\tau, \quad (4.3)$$

де інтеграл обчислюється по всьому об'єму τ . Формула (4.3) придатна для будь-якого моменту часу. Розглянемо момент часу

$$t_1 = t + dt,$$

тоді

$$M(t_1) = \int \rho(t + dt, x, y, z) d\tau, \quad (4.4)$$

а приріст маси в об'ємі τ за проміжок часу dt буде виражатись за формулою

$$dM = M(t_1) - M(t) = \int [\rho(t + dt, x, y, z) - \rho(t, x, y, z)] d\tau. \quad (4.5)$$

Розіклавши підінтегральну функцію по першому аргументу в ряд Тейлора, з точністю до величин другого порядку малості отримаємо:

$$dM = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt, \quad (4.6)$$

де підінтегральна функція $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ обчислюється при значеннях аргументів t, x, y, z , (що не показано в формулі (4.6) і, для скорочення письма, не буде показуватись і далі).

Таким чином, збільшення (або зменшення) маси в об'ємі τ за нескінченно малий проміжок часу dt можна знайти шляхом обчислення інтеграла (4.6) (при цьому ми вважаємо, що необхідна нам для цього функція $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ вже відома).

А тепер задамося питанням: якщо, наприклад, виявилось, що $dM > 0$, то звідки змогла взятись в об'ємі τ ця додаткова маса (якщо $dM < 0$, то виникає питання, куди могла подітись маса dM із об'єму τ)?

І ось тут потрібно логічно правильно сформулювати закон збереження маси; у даному випадку цей закон треба сформулювати таким чином: якщо $dM > 0$ (тобто, якщо маса в об'ємі збільшилась), то це значить, що за проміжок часу dt через контрольну поверхню S якраз саме така маса додатково ввійшла усередину області τ зовні. (Зауважимо, що через деякі ділянки поверхні S рідина може входити

усередину τ , а через деякі ділянки – виходити із області τ , але баланс має бути таким, щоб маса, котра остаточно ввійшла усередину, якраз була на dM одиниць маси більше, ніж та, що витікла із об'єму).

А тепер згадаємо (див. ДЛЗ), що маса рідини, котра проходить за проміжок часу dt через елемент поверхні dS в сторону, задану нормаллю \vec{n} , дорівнює

$$\rho \vec{V} \vec{n} dS dt. \quad (4.7)$$

В подальшому ми будемо користуватись формулою Остроградського-Гауса для витікання рідини із об'єму через замкнуту поверхню S . Традиційно в такій ситуації на поверхні S вибирається зовнішня (до об'єму τ) нормаль, отже, маса рідини, яка ввійшла зовні через поверхню S до розглядуваного об'єму за проміжок часу dt , буде дорівнювати

$$- \int \rho \vec{V} \vec{n} dS dt. \quad (4.8)$$

(при цьому знак $(-)$ перед інтегралом якраз і відповідає тому узгодженню, що нормаль до поверхні у формулі (4.6) вважається зовнішньою).

Згідно до закону збереження маси величина dM , обчислена за формулою (4.6), має дорівнювати величині (4.8). Скоротивши в цих виразах на dt , отримаємо рівність

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int \rho \vec{V} \vec{n} dS. \quad (4.9)$$

Отже, для будь-якого об'єму τ (уявно виділеного в просторі, занятого рідиною, чи дійсного об'єму, обмеженого будь-якими границями, в будь-який час справджується інтегральна рівність (4.9). Можна говорити, що ця рівність справджується тотожно для будь-якого об'єму, обмеженого будь-якою границею у довільний момент часу.

Ми до рівняння (4.9) ще повернемося, а зараз займемось отриманням із інтегрального рівняння (4.9) диференціального рівняння, котре має виконуватись у кожній точці об'єму, занятого рідиною. Для цього перш за все треба у формулі (4.9) позбавитись від поверхневого

інтегралу, перетворивши його на об'ємний. Це можна зробити за допомогою формули Остроградського-Гауса, а саме: для довільного векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$, неперервного і неперервно диференційованого, заданого у довільному об'ємі τ , обмеженому довільною замкнутою поверхнею S , справджується інтегральна рівність Остроградського-Гауса

$$\int_S \vec{A} \vec{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{A} d\tau, \quad (4.10)$$

яку ми обговорювали на лекції ДЛН№3. Отже, у нашому випадку маємо рівність

$$\int_S \rho \vec{V} \vec{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) d\tau,$$

так що рівність (4.9) можна записати тепер у вигляді

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] d\tau = 0. \quad (4.11)$$

Якщо є деяка неперервна скалярна функція $F(x, y, z)$, і для будь-якої підобласті τ виконується рівність

$$\int_{\tau} F(x, y, z) d\tau = 0, \quad (4.12)$$

то неважко довести, що звідси витікає висновок, що в області τ функція $F \equiv 0$ (основна лема варіаційного числення). Отже, із приведених міркувань та рівняння (4.9) тепер витікає, що в кожній точці об'єму, зайнятого рідиною, справджується рівність

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.13) і є те диференціальне рівняння в частинних похідних, що виражає закон збереження маси. Це рівняння і називається рівнянням нерозривності (тобто, суцільності) рідини.

Якщо розкрити операцію $\operatorname{div}(\rho \vec{V})$, то отримаємо:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{V}) = \vec{V} \operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\vec{V}. \quad (4.14)$$

Операцію $\operatorname{div}(\rho\vec{V})$ краще всього виконувати, використовуючи оператор Гамільтона ∇ і пам'ятаючи, що цей оператор є векторним і диференціальним: отже маємо

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.15)$$

А також:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{V}) = \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = (\nabla_{\rho}\rho) \cdot \vec{V} + \rho(\nabla_v \cdot \vec{V}),$$

де позначення ∇_{ρ} і ∇_v означають, що оператор ∇ діє тільки на скалярну функцію ρ , чи тільки на векторну функцію \vec{V} справа від нього; при цьому

$$\nabla\rho = \vec{i} \frac{\partial\rho}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\rho}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\rho}{\partial z}; \quad \nabla\vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{V}.$$

Отже,

$$\operatorname{div}(\rho\vec{V}) = \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = \vec{V} \cdot \operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\vec{V}. \quad (4.16)$$

Таким чином, загальне рівняння нерозривності (4.13) набуває вигляду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad (4.17)$$

або

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Тепер, якщо згадати, що

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad}\rho = \frac{d\rho}{dt},$$

то із (4.16) отримуємо ще і таку форму рівняння нерозривності:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0. \quad (4.19)$$

4.2. Поняття нестисливої рідини. Рідина, у якій в процесі руху густина кожної матеріальної частинки залишається незмінною, називається нестисливою. Вказана властивість нестисливості виражається рівнянням

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (4.20)$$

Підкреслимо, що в це рівняння входить похідна в сенсі Лагранжа, а не частинна похідна в сенсі Ейлера. У розвернутій формі рівняння (4.18) має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0. \quad (4.21)$$

Використовуючи рівність (4.1), із загального рівняння нерозривності (4.16) для нестисливої рідини отримаємо ще і таке рівняння нерозривності

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0. \quad (4.22)$$

Якщо рідина має взагалі незмінну густину $\rho_0 = \text{const}$, то така рідина, як ми вже говорили, називається однорідною нестисливою рідиною, і для неї виконується тільки рівняння (4.19) (рівняння (4.18) виконується тривіально). Але, згідно з рівнянням (4.18), рідина може бути нестисливою, але зі змінною густиною у просторі; у такій рідині кожна частинка зберігає свою густину, а розподіл густини в просторі зв'язаний з розподілом швидкості у просторі згідно до формули (4.18).

В подальшому ми будемо мати справу тільки з однорідною нестисливою рідиною, коли густина рідини $\rho_0 = \text{const}$, тобто абсолютна константа, яка повинна бути задана із сторонніх міркувань. Для такої нестисливої рідини рівняння нерозривності буде мати вигляд

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0. \quad (4.23)$$

4.3.Окремі випадки рівняння нерозривності. Якщо рух рідини стаціонарний (тобто, гідродинамічні функції з часом не змінюються), то диференціальне рівняння нерозривності приймає вигляд

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (4.24)$$

Для нестисливої однорідної рідини рівняння нерозривності зберігає свій вигляд (4.24) як при стаціонарному, так і при нестаціонарному русі.

Розглянемо випадок, коли об'єм τ , обмежений повністю твердими непрониклими границями, заповнений повністю рідиною. Тоді, оскільки на непрониклих границях нормальна компонента швидкості $\vec{V}\vec{n} = 0$, то

$$\int_S \rho \vec{V} \vec{n} dS = 0, \quad (4.25)$$

і із рівняння (4.8) виходить, що для такого об'єму

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = 0, \text{ тобто } \int_{\tau} \rho d\tau = \text{const}, \quad (4.26)$$

тобто, маса у такому об'ємі залишається незмінною (усередині об'єму густина може змінюватись за рахунок температурного фактору, але загальна маса змінитися не може).

Розглянемо ще для прикладу стаціонарний рух рідини в трубопроводі з твердими стінками. Тверда непроникла поверхня є поверхнею струменю; позначимо її Σ . Проведемо два довільних поперечних перетини трубки струменю S_1 і S_2 . В результаті утвориться замкнутий об'єм τ між двома поперечними перетинами S_1 і S_2 і боковою поверхнею струменю Σ (рис.9).

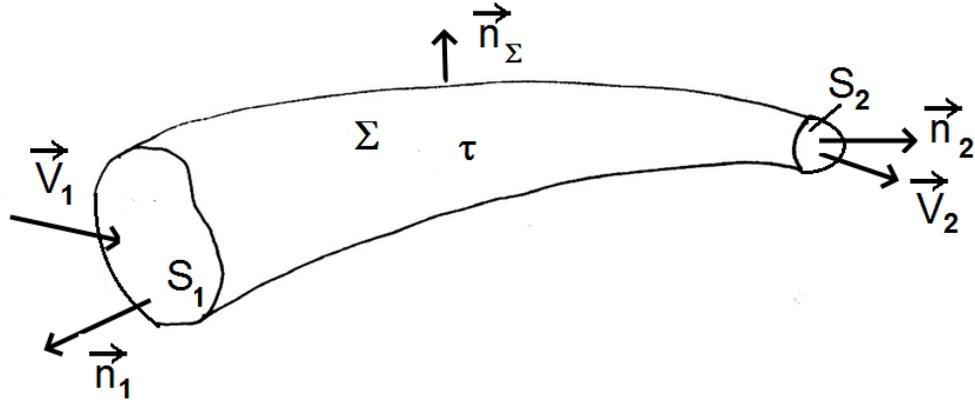


Рис.9. До руху рідини у трубці струменю

При стаціонарному русі $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, так що маса рідини (газу) в об'ємі весь час буде однаковою, і рівняння (4.7) набуде вигляду:

$$\int_S \rho \vec{V} \vec{n} dS = \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \vec{n} dS + \int_{S_1} + \int_{S_2} = 0.$$

На поверхні струменю Σ : $\vec{V} \vec{n} = 0$, отже матимемо

$$\int_{S_1} \rho \vec{V} \vec{n} dS + \int_{S_2} \rho \vec{V} \vec{n} dS = 0. \quad (4.27)$$

Згадаємо, що в формулі (4.24) нормалі на поверхнях S_1 і S_2 – зовнішні по відношенню до об'єму τ . Якщо рідина тече так, як показано на рис.9, то інтеграл

$$\int_{S_2} \rho \vec{V} \vec{n} dS = Q_2$$

означає секундну витрату маси рідини через поверхню перетину 2 із об'єму назовні, а інтеграл

$$\int_{S_1} \rho \vec{V} \vec{n} dS = -Q_1,$$

де Q_1 – значить масу, що втікає іззовні об'єму усередину через поверхню перетину S_1 . Таким чином, із (4.24) маємо, що

$$Q_1 = Q_2, \quad (4.28)$$

тобто, масова витрата рідини через довільний перетин трубки струменю є величиною сталою.

Позначимо через $\vec{V}\vec{n} = v_n$ – нормальну компоненту швидкості на перетинах S_1 і S_2 ; тоді матимемо

$$\int_{S_2} \rho v_n dS = \int_{S_1} \rho v_n dS, \quad (4.29)$$

де в інтегралі по S_1 нормальна компонента обчислена в проєкції на внутрішню нормаль до S_1 , «узгоджену за напрямком» з нормаллю до S_2 . Скористаємось тепер ще і теоремою про середнє; в результаті формулу (4.29) можна записати у вигляді

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (4.30)$$

де ρ_1 і v_1 – середні значення густини і нормальної компоненти швидкості на перетині S_1 , ρ_2 і v_2 – те ж саме на перетині S_2 ; S_1 і S_2 – площі вказаних перетинів, зроблених перпендикулярно до деякої умовної осі трубки струменю.

Формула (4.27) виражає рівність витрати маси речовини через будь-який поперечний переріз в термінах середніх величин. Особливо корисна ця формула для елементарних, тобто достатньо тонких трубок, у яких по поперечному перерізу гідрогазодинамічні функції не змінюються.

○○○

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ЗА РОЗДІЛОМ

А) Нехай рух рідини заданий проекціями швидкості в змінних Ейлера

$$V_x = mx + nt, V_y = -ky + lt, V_z = 0,$$

де m, n, k, l – постійні, перейдіть до змінних Лагранжа та визначите в нових змінних рівняння траєкторії

Б) Знайдіть рівняння ліній току і траєкторій для руху рідини, що заданий проекціями вектору швидкості

$$V_x = -ax, V_y = ay, V_z = 0,$$

де a – постійна.

В) Визначити функцію току ψ , якщо потенціал швидкості плоскої течії рідини, що не стискується, визначається

$$\varphi = a(x^2 - y^2),$$

де $a > 0$ – постійна.

Г) Рух рідини заданий швидкостями

$$V_x = -ky, V_y = kx, V_z = \sqrt{z - 2k(x^2 + y^2)},$$

де k – постійна. Визначте ротор швидкості $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$.

Д) Запишіть рівняння нерозривності (4.19) в циліндричних координатах.

РОЗДІЛ 2. ПОНЯТТЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

ДЛ–№5.

Рівняння руху ідеальної рідини в формі Ейлера та інтеграл Бернуллі

5.1. Сили, що діють у рідині і заставляють її рухатись. Рідина і гази, як механічні об'єкти, рухаються, як і інші матеріальні тіла в природі за законами механіки, тобто під дією певних сил. Перш ніж приступити до виводу рівнянь Ейлера, що управляють рухом так званої ідеальної рідини, розглянемо найбільш характерні сили, що діють у рідині.

Сили, що діють в рідині, поділяються на два класи: масові і поверхневі. Виділимо в рідині деякий об'єм τ , обмежений замкнутою поверхнею S (див. рис.2.1).

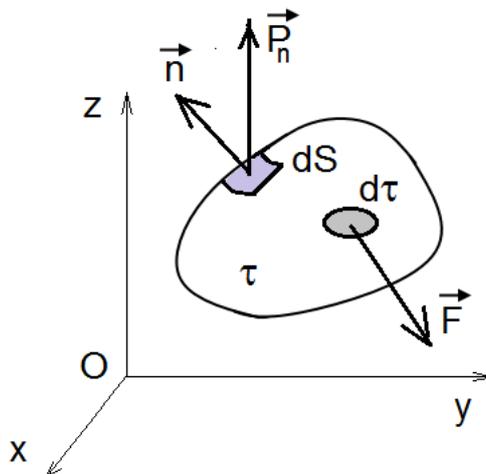


Рис.2.1. До питання про масові і поверхневі сили

Масовою називається така сила, що діє на кожен елемент об'єму $d\tau$, точніше на кожен елемент маси, незалежно від того, існує чи ні рядом з розглядуваним елементом $d\tau$ інші частинки рідини. Введемо \vec{F} – вектор масової сили, віднесений до одиниці маси рідини; тоді на кожен елемент об'єму рідини $d\tau$, густина якої нехай буде ρ , а маса відповідно дорівнює $\rho d\tau$ ззовні буде прикладена сила $\vec{F}\rho d\tau$.

Головний вектор масових сил, прикладених до всього об'єму τ , виразиться векторним об'ємним інтегралом

$$\int_{\tau} \vec{F} \rho d\tau, \quad (5.1)$$

розповсюдженим по всьому об'єму τ , а проєкції головного вектора сил на осі декартової системи координат Ox , Oy , Oz будуть дорівнювати

$$\int_{\tau} X \rho d\tau, \quad \int_{\tau} Y \rho d\tau, \quad \int_{\tau} Z \rho d\tau, \quad (5.2)$$

де X , Y і Z суть проєкції вектора \vec{F} на декартові осі.

Головний момент масових сил, прикладених до всього об'єму τ , відносно початку координат виразиться інтегралом

$$\int_{\tau} (\vec{r} \times \vec{F}) \rho d\tau, \quad (5.3)$$

де \vec{r} – радіус-вектор певної частинки рідини. Прикладом масової сили є сила тяжіння, сила інерції тощо.

До другого класу сил, що діють на розглядуваний об'єм τ , ми відносимо сили взаємодії між різними частинками рідини. В силу принципу рівності сил дії і протидії відбувається зрівноваження сил взаємодії між всіма внутрішніми частинками об'єму, що лежать усередині поверхні S , і, значить, можуть залишитись невіднованими лише сили взаємодії, що походять від тих частинок, що лежать зовні поверхні S і прикладені до поверхневих частинок об'єму τ ; саме ці сили ми і називаємо поверхневими.

Позначимо через \vec{p}_n вектор поверхневої сили, віднесений до одиниці площі; тоді до елемента поверхні dS поверхні S буде прикладена ззовні сила $\vec{p}_n dS$, що походить від зовнішніх частинок (див. рис.2.1). Індекс n знизу вказує на те, що ми вважаємо вектор \vec{p}_n залежним від орієнтації площадки dS , тобто від напрямку зовнішньої нормалі до dS ; крім того, вектор \vec{p}_n , взагалі кажучи, залежить від координат площадки dS , а також і від часу. Якщо протилежний напрям нормалі позначити $(-\vec{n})$ (усередину рідини), то цей напрям виявиться зовнішньою нормаллю для тієї ж площадки по відношенню

до зовнішніх частинок рідини; згідно з нашими позначеннями, поверхнева сила, що діє на елемент площадки dS зовнішнього шару частинок і походить від частинок, що знаходяться усередині поверхні S , буде $\vec{p}_{-n} dS$. Внаслідок принципу «дія дорівнює протидії» має місце співвідношення

$$\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n. \quad (5.4)$$

Напрямок вектора поверхневої сили \vec{p}_n може взагалі складати деякий кут з зовнішньою нормаллю \vec{n} ; проєкція \vec{p}_n на зовнішню нормаль називається нормальним розтягуванням або нормальним стискуванням, дивлячись на те, чи буде \vec{p}_n мати гострий кут чи тупий з зовнішньою нормаллю; проєкція ж \vec{p}_n на площадку dS називається дотичним напруженням, або напруженням тертя.

Головний вектор і головний момент поверхневих сил, прикладених до об'єму τ , виражаються поверхневими інтегралами

$$\int_S \vec{p}_n dS \quad \text{і} \quad \int_S (\vec{r} \times \vec{p}_n) dS \quad (5.5)$$

по всій замкнутій поверхні S .

5.2. Загальне рівняння руху рідини. Для виводу інтегрального рівняння руху застосуємо принцип (начало) Даламбера, який стверджує, що в кожний момент руху будь-якої матеріальної системи всі сили, прикладені до неї, включаючи і сили інерції, взаємно урівноважуються, тобто

$$\int_{\tau} (\vec{F} - \vec{w}) \rho d\tau + \int_S \vec{p}_n dS = 0, \quad (5.6)$$

де \vec{w} – прискорення елемента $d\tau$ і інтеграл

$$- \int_{\tau} \vec{w} \rho d\tau$$

виражає головний вектор сил інерції. Рівняння (5.6) – це фактично другий закон Ньютона, застосований до механіки рідини

(газу) і записаний в термінах механіки суцільного середовища в інтегральному вигляді.

5.3. Ідеальна рідина. Визначення ідеальної рідини. Гідралічний тиск в ідеальній рідині. Ідеальною називається така рідина, в котрій не проявляються сили тертя і незначне нормальне розтягіння визиває виникнення явища розриву суцільності рідини; отже, поверхневі сили, прикладені до елементів поверхні dS об'єму τ ідеальної рідини, представляють собою нормальний тиск, направлений усередину об'єму. Інакше кажучи, вектор \vec{p}_n завжди направлений по внутрішній нормалі до елемента dS .

Покажемо дуже важливу особливість: в ідеальній рідині величина вектора \vec{p}_n не залежить від орієнтації площадки dS . Для цього розглянемо у рідині елементарний об'єм тетраєдра $KABC$, три грані якого KBC , KAC і KAB паралельні координатним площинам, так що зовнішні нормалі до цих граней направлені відповідно протилежно осям Ox, Oy, Oz (рис.2.2), а грань ABC є похилою до координатних площин. Далі, позначимо через α, β, γ – косинуси кутів, утворюваних з осями координат зовнішньою нормаллю Dn до четвертої похилої грані ABC .

Нехай, нарешті, площа грані ABC дорівнює dS ; тоді площі граней KBC , KAC і KAB , будучи проєкціями грані ABC , будуть відповідно дорівнювати: $\alpha dS, \beta dS, \gamma dS$.

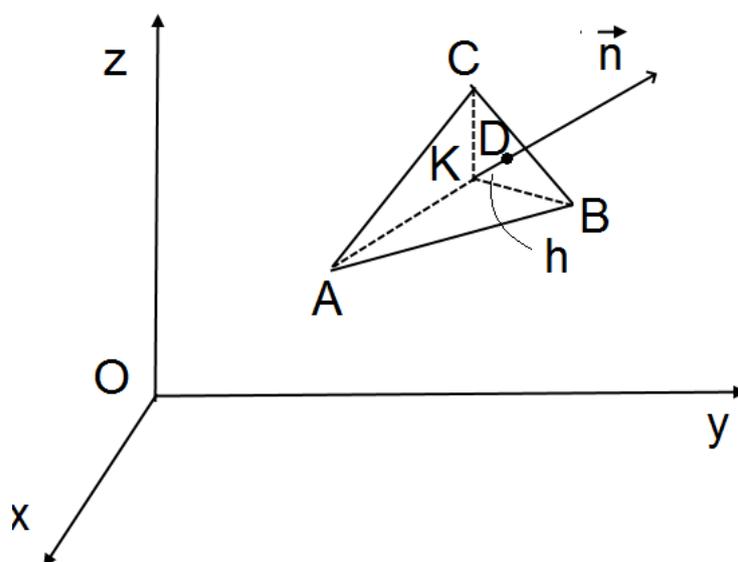


Рис.2.2. До виводу залежності напруження на довільно орієнтованій площадці від напружень по трьох взаємно ортогональних площадках

Застосуємо тепер рівняння (5.6) до малого об'єму тетраєдра; будемо мати:

$$(\vec{F} - \vec{w}) \rho d\tau + \vec{p}_{-x} \alpha dS + \vec{p}_{-y} \beta dS + \vec{p}_{-z} \gamma dS + \vec{p}_n dS = 0. \quad (5.7)$$

В силу властивості (5.4) можна зробити заміну

$$\vec{p}_{-x} = -\vec{p}_x, \quad \vec{p}_{-y} = -\vec{p}_y, \quad \vec{p}_{-z} = -\vec{p}_z.$$

Далі позначимо через h висоту тетраєдра KD , отримаємо $\tau = \frac{1}{3} h dS$ і, таким чином, рівняння (5.7) після скорочення на dS набуде вигляду

$$\frac{1}{3} (\vec{F} - \vec{w}) \rho h - \alpha \vec{p}_x - \beta \vec{p}_y - \gamma \vec{p}_z + \vec{p}_n = 0. \quad (5.8)$$

Перейдемо в цьому рівнянні до границі $h \rightarrow 0$. Тоді перший доданок прямує до нуля, і ми переходимо до шуканої властивості поверхневих сил

$$\vec{p}_n = \alpha \vec{p}_x + \beta \vec{p}_y + \gamma \vec{p}_z. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) показує, що вектор \vec{p}_n при довільній орієнтації нормалі до елемента поверхні може бути визначений, якщо задано три основних вектори \vec{p}_x , \vec{p}_y і \vec{p}_z , що визначають поверхневі сили на трьох взаємно ортогональних (перпендикулярних) площадках, зовнішні нормалі до яких паралельні і однаково направлені з осями Ox , Oy , Oz . Властивість, що виражається формулою (5.9), показує, що сукупність величин \vec{p}_n , яка отримується при будь-яких орієнтаціях трьох площадок, є тензором, котрий називається тензором пружних напружень. Формула (5.9) відображає закон зміни компонентів тензора напружень при зміні компонентів нормалі до елементів поверхні.

Застосуємо тепер формулу (5.9), справедливу для будь-якої рідини, до рідини ідеальної. У цьому випадку вектори \vec{p}_n , \vec{p}_x , \vec{p}_y і \vec{p}_z будуть направлені протилежно зовнішнім нормаліям D_n , Ox , Oy , Oz , і,

проектуючи рівняння (5.9) послідовно на осі Ox , Oy , Oz , отримаємо такі рівності

$$-p_n \alpha = -\alpha p_x; \quad -p_n \beta = -\beta p_y; \quad -p_n \gamma = -\gamma p_z,$$

звідки випливає, що

$$p_n = p_x = p_y = p_z, \quad (5.10)$$

тобто, величина нормального тиску для ідеальної рідини не залежить від орієнтації площадки, до якої він (тиск) прикладається. Внаслідок цього можна відкинути індекс (значок) в позначенні тиску і не вказувати орієнтацію площадки, а тільки пам'ятати, що гідродинамічний тиск направлений по внутрішній нормалі до площадки.

5.4. Загальне рівняння руху ідеальної рідини. Для ідеальної рідини, як ми бачили, гідродинамічний тиск завжди направлений по внутрішній нормалі до поверхні S . Тому, якщо ввести орт зовнішньої нормалі \vec{n} до поверхні S , то

$$\vec{p}_n = \vec{p} = -p\vec{n} \quad (5.11)$$

і рівняння (5.6) набуде вигляду

$$\int_{\tau} (\vec{F} - \vec{w}) \rho d\tau - \int_S p \vec{n} dS = 0. \quad (5.12)$$

Перетворимо поверхневий інтеграл у формулі (5.12) за формулою Остроградського-Гауса в об'ємний, а саме: для довільної скалярної функції ϕ маємо

$$\int_S \phi \vec{n} dS = \int_{\tau} \text{grad} \phi d\tau,$$

отже інтегральна тотожність (12) набуде вигляду

$$\int_{\tau} [(\vec{F} - \vec{w})\rho - \text{grad} p] d\tau = 0. \quad (5.13)$$

В силу довільності розглядуваного об'єму τ підінтегральний вираз має дорівнювати нулю у кожній точці рідини у будь-який момент часу. Таким чином, ми приходимо до основного диференціального рівняння руху ідеальної рідини, яке належить Ейлеру (1755 р.):

$$\vec{F} - \vec{w} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0, \quad (5.14)$$

або в проєкціях на декартові осі:

$$w_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X, \quad w_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y; \quad w_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z, \quad (5.15)$$

де \vec{w} – прискорення рідини, яке у змінних Ейлера виражається через компоненти швидкості наступним чином

$$\vec{w} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \quad (5.16)$$

Рівняння Ейлера (5.14), або (5.16) можна написати також в еквівалентній, так званій формі Громеки-Ламба:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{F}.$$

Якщо згадати, як виражаються компоненти прискорення через диференціальні операції від компонентів швидкості, то систему рівнянь (5.15) можемо записати у вигляді

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \quad (5.19)$$

Додамо сюди ще рівняння нерозривності (4.18) із попередньої лекції:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (5.20)$$

Як бачимо, закон збереження маси і другий закон механіки Ньютона дають для механіки рідини (і газу), як суцільних середовищ, систему із 4-х диференціальних рівнянь в частинних похідних для п'яти невідомих функцій v_x , v_y , v_z , ρ і p , у загальному випадку залежних від чотирьох незалежних змінних t , x, y, z (ми поки що не говоримо про початкові та граничні умови). І хоча ми ще зовсім нічого не говорили про розв'язання системи рівнянь гідрогазодинаміки взагалі і, зокрема, отриманої системи (5.17)–(5.20), але інтуїтивно зрозуміло, що 4-х навіть взаємно незалежних рівнянь недостатньо для визначення із них 5-и невідомих функцій. Це дає підставу сказати, що система отриманих рівнянь, очевидно, неповна, вона ще не повністю характеризує течію рідини. До цієї системи потрібно додати, у крайньому випадку, ще одне рівняння. Таким рівнянням може бути рівняння енергії (але ми ще не готові, щоб сформулювати і написати таке рівняння), але очевидно, що в рівняння енергії обов'язково ввійде така величина, як температура; тобто число рівнянь збільшиться до п'яти, але і число шуканих функцій збільшиться до шести. Значить, для рідини і газу потрібне ще одне рівняння. Таким рівнянням може бути алгебраїчне рівняння стану типу рівняння Клапейрона для газів, яке для досконалого газу має вигляд

$$p = \rho RT, \quad (5.21)$$

але при цьому ми повинні будемо «зайти в гості» до такої науки, як «термодинаміка».

5.5. Інтеграл Бернуллі. Ми поки що не будемо торкатись термодинаміки потоку і розглянемо такі випадки, коли диференціальне рівняння (5.14) має перший інтеграл, тобто таку комбінацію шуканих функцій, між якими існує скінчений (а не диференціальний) зв'язок.

Розглянемо випадок стаціонарного руху рідини; у цьому випадку режим руху в кожній точці, зайнятій рідиною, не змінюється з плином часу, і поле швидкостей, поле тиску і масових сил також не змінюється з часом. Лінії струменю, як ми вже говорили, при стаціонарному русі правлять і за траєкторії частинок рідини.

Візьмемо рівняння Ейлера (5.14) і запишемо його у формі

$$\vec{F} - \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{grad}p. \quad (5.22)$$

Помножимо кожен член цього рівняння скалярно на елемент переміщення частинки рідини $d\vec{r} = \vec{V}dt$ вздовж лінії струменю; отримаємо

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} - d\vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \text{grad}p \cdot d\vec{r}. \quad (5.23)$$

В силу стаціонарності $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, так що

$$\text{grad}p \cdot d\vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp,$$

де dp – повний диференціал тиску при переміщенні на вектор $d\vec{r}$. Величина $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ представляє собою роботу сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$, а

$$\vec{V} \cdot d\vec{V} = d\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad (\text{оскільки } \vec{V} \cdot \vec{V} = v^2),$$

де v – модуль швидкості. Таким чином, отримуємо наступний результат

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} - d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho}. \quad (5.24)$$

Рівняння (5.24) можна проінтегрувати при деяких умовах у загальному вигляді, а саме, при умові, якщо:

1. масова сила \vec{F} має потенціал, котрий ми позначимо через Π , тобто

$$\vec{F} = -grad\Pi, \quad X = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}, \quad (5.25)$$

і, значить, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -grad\Pi \cdot d\vec{r} = -d\Pi$.

2. рідина баротропна, тобто в потоці $\rho = \rho(p)$. У цьому випадку можна ввести таку функцію $P(p)$, що

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad dP = \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (5.26)$$

При вказаних умовах рівняння (5.24) записується у вигляді

$$-d\Pi - d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dP, \quad (5.27)$$

або

$$d\left(\Pi + \frac{v^2}{2} + P\right) = 0, \quad (5.28)$$

звідки отримуємо так званий інтеграл Бернуллі:

$$\Pi + \frac{v^2}{2} + P = Const, \quad (5.29)$$

де константа зберігає своє сталє значення на даній лінії струменю, але взагалі може змінюватись від однієї лінії струменю до другої.

Якщо масові сили суть сили тяжіння, то направивши ось Oz вертикально вверх, матимемо

$$\Pi = gz,$$

і якщо рідина нестислива і однорідна ($\rho = const$), то

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

тоді інтеграл Бернуллі буде мати вигляд

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C. \quad (5.30)$$

Перший член цього рівняння означає кінетичну енергію (частинки рідини масою в одну одиницю!), третій член значить потенційну енергію в полі тяжіння, а другий – будемо поки що умовно називати внутрішньою енергією (хоча це і не зовсім так). Так що насправді ми отримали закон збереження енергії частинки рідини вздовж лінії струменю.

Тепер згадаємо, що, як відомо із теоретичної механіки, для окремої матеріальної частинки (масою $m=1$, наприклад для твердого тіла) у полі сили тяжіння ми маємо закон збереження енергії у вигляді суми двох членів потенціальної і кінетичної енергії

$$gz + \frac{v^2}{2} = const, \quad (5.31)$$

тоді як для матеріальної частинки рідини (чи газу) закон збереження енергії складається із трьох членів (5.30). Задайте собі питання, звідки взявся у рівнянні (5.30) третій член $\frac{p}{\rho}$, що він собою представляє і чому подібного члена немає в рівняння (5.31)?

Якщо всі члени рівняння (5.30) розділити на g , то отримаємо наступне рівняння

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = Const, \quad (5.32)$$

у якому всі члени зліва мають розмірності довжини(скоріше, висоти): перший член означає геометричну висоту даної рідинної частинки в даній трубці струменю над горизонтальною площиною – поверхнею відліку, тобто цей член пропорційний потенціальній енергії частинки в полі сили тяжіння; другий доданок $\frac{v^2}{2g}$ виражає висоту, на яку могла б піднятися матеріальна частинка у пустоті, кинута вертикально ввєрх з початковою швидкістю v , цей доданок називають швидкісною висотою; нарешті третій доданок $\frac{p}{\rho g}$ виражає

ту висоту, яку повинен мати стовпчик рідини, щоб в основі стовпчика отримати тиск p ; цю висоту називають п'езометричною.

Таким чином, згідно з рівнянням Бернуллі, при стаціонарному русі нестисливої ідеальної рідини сума геометричної, швидкісної та п'езометричної висот залишається однаковою для всіх точок певної лінії струменю, що можна також записати у вигляді:

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}. \quad (5.33)$$

○○○

ДЛ–№6.

Інтеграл Коші-Лагранжа.

6.1. Вивід інтеграла Коші-Лагранжа. На попередній лекції ми установили, що для стаціонарної течії рідини (при умові потенціальності масових сил і баротропності рідини) існує інтеграл Бернуллі як для безвихорової течії, так і для вихорової.

Тепер поставимо питання: а чи існує (при певних умовах) інтеграл для нестаціонарних течій і, якщо існує, то за яких додаткових умов. Виявляється, що для нестаціонарних течій такий інтеграл існує тільки за додаткової умови, що рух рідини є безвихоровим.

Таким чином, розглянемо нестаціонарну течію ідеальної рідини і будемо вважати, що ця течія безвихорова, тобто що в кожній точці поля для швидкості виконується умова

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0. \quad (6.1)$$

Рівність (6.1), як відомо із математики, про що ми вже неодноразово говорили, свідчить про те, що існує така скалярна функція $\varphi(x, y, z)$, (яка, можливо, залежить від часу, як від параметра), що

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \varphi, \quad (6.2)$$

тобто

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (6.3)$$

Функція $\varphi(x, y, z)$ називається потенціалом швидкості, а сама течія з потенціалом називається потенціальною.

Тепер згадаємо, що рівняння Ейлера можна записати у формі Громеки-Ламба: скористаємось цією формою

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathit{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{V} \times \mathit{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \mathit{grad} p + \vec{F}. \quad (6.4)$$

Для безвихорового руху це рівняння записується ще більш просто

$$\frac{\partial \mathit{grad} \varphi}{\partial t} + \mathit{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathit{grad} p + \vec{F}. \quad (6.5)$$

Оскільки змінні x, y, z і t – незалежні, то допустима заміна порядку диференціювання за часом і за просторовими незалежними змінними, тобто можна записати як

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \mathit{grad} \varphi}{\partial t} = \mathit{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Далі, із умови потенціальності зовнішньої масової сили, як ми вже говорили на попередній лекції, маємо:

$$\vec{F} = -\mathit{grad} \Pi, \quad (6.7)$$

а із умови баротропності (тобто із умови, що густина в рещті є функцією лише тиску) витікає, що

$$\frac{1}{\rho} \mathit{grad} p = \mathit{grad} P(p), \quad P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (6.8)$$

Отже, остаточно, із (6.5) отримуємо, що при прийнятих умовах маємо співвідношення

$$\mathit{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P(p) + \Pi \right) = 0, \quad (6.9)$$

а із (6.9), у свою чергу, впливає, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P(p) + \Pi = F(t), \quad (6.10)$$

де $F(t)$ – деяка довільна функція часу. Рівняння (6.10) називається рівнянням Коші-Лагранжа. Зокрема, для нестисливої рідини

$$P(p) = \frac{p}{\rho},$$

і у випадку наявності потенціалу масової сили тяжіння $\Pi = gz$ остаточно будемо мати рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = F(t). \quad (6.11)$$

Крім того, із рівняння нерозривності $div \vec{V} = 0$ для нестисливої рідини у випадку безвихрової течії маємо

$$div \vec{V} = div grad \varphi = \Delta \varphi = 0, \quad (6.12)$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

оператор Лапласа. Рівняння

$$\Delta \varphi = 0, \quad (6.13)$$

називається рівнянням Лапласа, а функції, що задовольняють цьому рівнянню, називаються гармонічними.

Отже, розв'язання будь-якої задачі для безвихорового руху нестисливої однорідної рідини зводиться до визначення функції $\varphi(t, x, y, z)$ (потенціалу швидкості), яка задовольняє рівнянню Лапласа (6.13) та певним граничним умовам. На цьому завершується вирішення кінематичної частини задачі. Гідродинамічний тиск та

сумарні сили і моменти знаходиться потім за допомогою інтеграла Коші-Лагранжа (6.11), при цьому вигляд функції $F(t)$ визначається, якщо наперед відома залежність тиску від часу хоча б у одній точці поля (наприклад, на нескінченності).

6. 2. Деякі приклади застосування інтеграла Бернуллі для нестисливої рідини.

6.2.1. Швидкість витікання нестисливої ідеальної рідини із посудини через отвір.

Розглянемо деякі приклади застосування інтеграла Бернуллі. Нехай ми маємо однорідну нестисливу рідину, яка рухається в полі сили тяжіння. Направимо вісь Oz вертикально вгору, тоді матимемо $P = gz$, отже інтеграл Бернуллі матиме вигляд

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C, \quad (6.14)$$

(див. формулу (5.30) із попередньої лекції). Вибравши на лінії струменю деяку точку з координатою z_1 і, знаючи в цій точці швидкість v_1 і тиск p_1 , можемо визначити константу C в рівнянні (6.14) через значення параметрів у точці z_1 :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = C. \quad (6.15)$$

Визначимо швидкість витікання нестисливої рідини із посудини (ємкості, бака) через невеликий (по площі поперечного перетину) отвір (див. рис.2.3). При витіканні рідини із бака рівень рідини в ньому, взагалі кажучи, буде знижуватись, отже такий рух буде нестационарним, але якщо припустити, що бак достатньо великий, а отвір достатньо малий (або якщо в процесі витікання відбувається доливання рідини в бак, котре повністю компенсує витрату рідини завдяки витіканню), то рух на протязі незначного проміжку часу можна приблизно вважати усталеним, і тоді для такої течії правомірно застосовування інтеграла Бернуллі у вигляді (6.15).

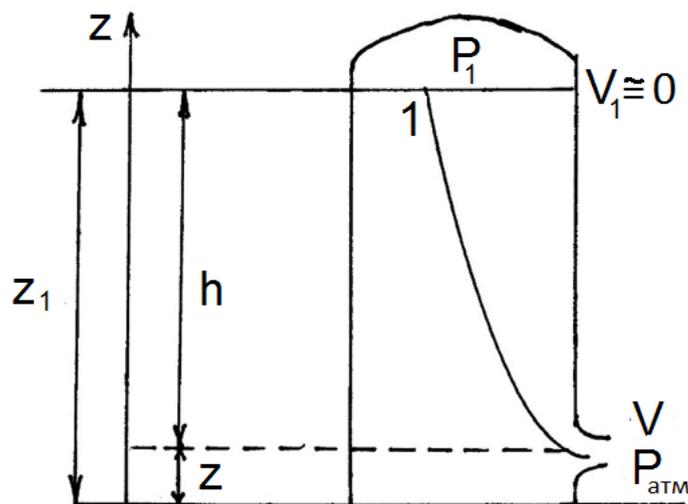


Рис. 2.3. Витікання рідини із посудини

Візьмемо деяку лінію струменю, що зв'язує вільну поверхню в баці з отвором. Ця лінія розпочинається на вільній поверхні в посудині, на якій тиск будемо вважати відомим $p = p_1$, а швидкість руху рідини (із-за дуже широкої площі поперечного перерізу бака на рівні вільної поверхні) дуже мала, так що можна знехтувати кінетичною енергією частинок $\frac{v_1^2}{2}$ і прийняти $v_1 \approx 0$. На вільній поверхні витікаючого струменю $p = p_{атм}$. Будемо наближено вважати, що на виході із посудини тиск рідини усередині струменю всюди дорівнює $p_{атм}$, а швидкість дорівнює v . Тоді будемо мати

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_{атм}}{\rho} + gz = \frac{p_1}{\rho} + gz_1, \quad (6.16)$$

звідки отримаємо

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{атм})}{\rho} + 2gh}, \quad (h = z_1 - z). \quad (6.17)$$

Якщо тиск над вільною поверхнею рідини у баці дорівнює атмосферному, то

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.18)$$

Як відомо, саме таку швидкість отримує матеріальна точка, що падає з висоти h вільно, без тертя (без опору середовища). Формула (6.18) вперше була отримана Торрічеллі.

Зауваження: задачу можна вирішити і у тому випадку, коли швидкістю v_1 не нехтувати. Пропоную студентам самостійно вирішити вказану задачу, якщо швидкістю рідини в баці на рівні z_1 не нехтувати. Що додатково вам буде потрібно ще знати, щоб вирішити задачу у вказаній постановці?

6.2.2. Течія нестисливої рідини в трубці змінного поперечного перерізу.

Розглянемо тепер рух нестисливої рідини у тонкій трубці змінного поперечного перерізу (рис. 2.4).

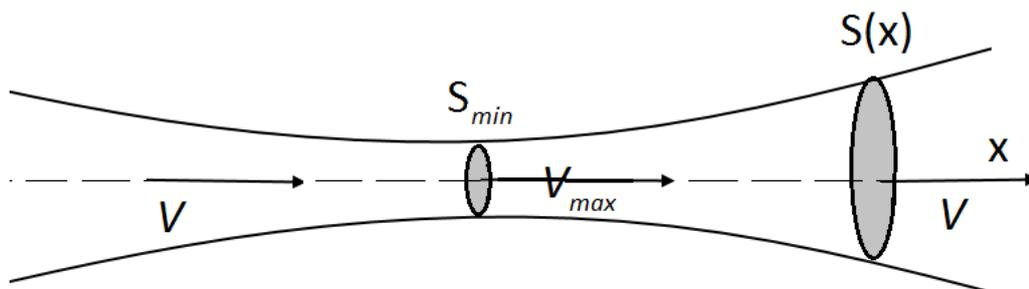


Рис. 2.4. Трубка змінного поперечного перетину

Будемо вважати, що рух в такій трубці одновимірний, тобто швидкості рідини в кожній точці поперечного перерізу S приблизно однакові і можуть відрізнятися при ustalеному русі тільки при переході від одного перерізу до іншого. В силу дії закону збереження витрати (закону збереження маси) через кожний перетин за одиницю часу має проходити один і той же об'єм (рідина нестислива і однорідна), тобто вздовж трубки виконується рівність

$$vS = const . \quad (6.19)$$

Із (6.19) видно, що зі зменшенням площі поперечного перерізу швидкість рідини зростає. У мінімальному перерізі S_{min} швидкість досягає максимального значення v_{max} . Із інтеграла Бернуллі, якщо трубка розташована горизонтально, маємо:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const, \quad (6.20)$$

тобто, зі зменшенням перерізу S тиск також зменшується, і в мінімальному перерізі тиск також мінімальний.

Ця властивість використовується у водоструменевих насосах (рис. 2.5).

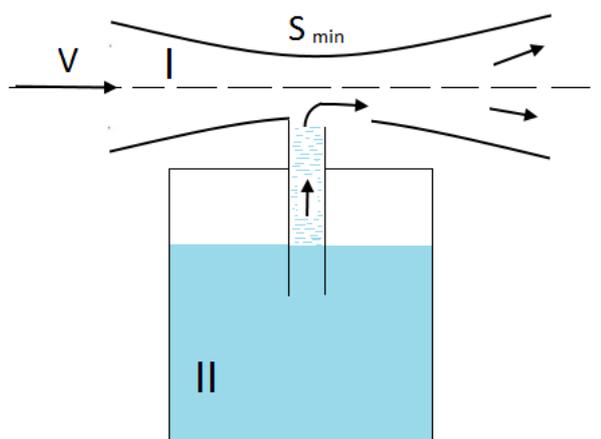


Рис. 2.5. Схема водоструменевого насоса

При подачі повітря в трубку змінного поперечного перерізу I в області мінімального перерізу S_{min} може виникнути тиск, менший, ніж тиск у посудині II; під дією виникшого перепаду тиску рідина із посудини II підіймається в трубку I і разом з потоком повітря краплі рідини будуть викидатись у навколишнє середовище.

6.2.3. Трубка Піто-Прандтля. Швидкість рідини вимірюють звичайно за допомогою трубки Піто-Прандтля, схему якої показано на рис. 2.6. Трубка Піто-Прандтля представляє собою тонке витягнуте циліндричне тіло з закругленою передньою частиною. При такій формі ця трубка слабо спотворює розподіл швидкості у потоці, в якому вимірюється швидкість.

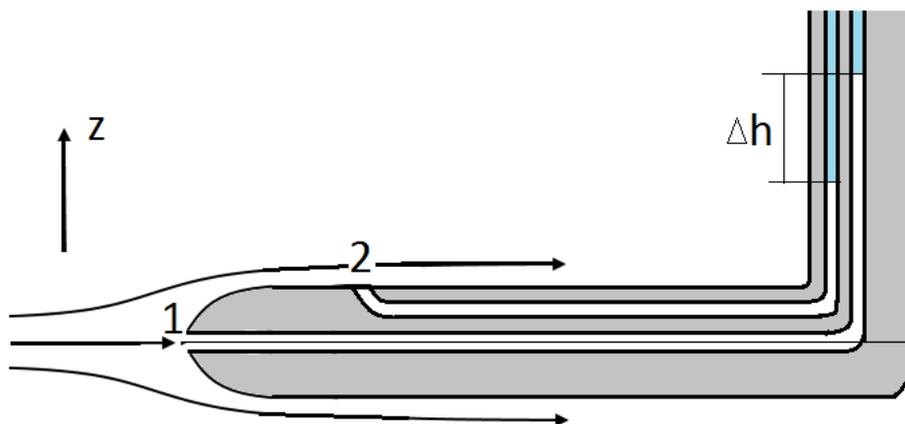


Рис. 2.6. Трубка Піто-Прандтля

Для виміру швидкості трубку Піто-Прандтля поміщають у рідину і розташовують вздовж потоку. На тілі трубки є отвори, через які по каналах, розташованих усередині тіла трубки, рідина попадає на два коліна манометра. Один із отворів розташований в передній частині (точка 1); другий – на її циліндричній частині, на достатньому віддаленні від першого (точка 2), так щоб спотворення поля швидкості за рахунок обтікання закругленого кінця трубки Піто-Прандтля можна було не враховувати поблизу другого отвору.

При обтіканні трубки потоком рідини передня точка 1 буде критичною точкою (точкою гальмування потоку) і в ній швидкість буде дорівнювати нулю, а тиск $p = p_1$. Тиск у критичній точці іноді називають повним тиском, чи тиском гальмування. В точці 2 швидкість і тиск приблизно дорівнюють швидкості і тиску в набіжному потоці при відсутності в ньому трубки: $v_2 = v$, $p_2 = p$.

Застосувавши інтеграл Бернуллі до точок 1 і 2, що знаходяться на одній і тій же лінії струменю, будемо мати

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2, \quad (6.21)$$

де z_1 і z_2 – вертикальні координати точок 1 і 2. Нехтуючи членом $g(z_2 - z_1)$, в силу малої товщини трубки П.-П., отримуємо

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \quad (6.22, a)$$

Різниця тисків $(p_1 - p_2)$ дорівнює питомій вазі рідини $\rho_m g$, використовуваній в манометрі, помноженій на різницю Δh висот рівнів рідини в вертикальних колінах манометра

$$p_1 - p_2 = \rho_m g \Delta h,$$

так що

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_m g \Delta h}{\rho}},$$

а якщо $\rho_m = \rho$, то

$$v = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (6.22,б)$$

У розглянутих вище прикладах (витікання рідини із посудини, трубка Піто-Прандтля) інтеграл Бернуллі використовувався для визначення швидкостей по інформації про тиск. Розглянемо тепер питання про залежність тиску від швидкості вздовж лінії струменю.

6.3.1. Порівняння динамічного тиску з гідростатичним. Візьмемо на даній лінії струменю дві точки з вертикальними координатами z і z_1 ; тиск і швидкість в цих точках позначимо відповідно через p і p_1 , v і v_1 . Із інтеграла Бернуллі отримаємо

$$p - p_1 = \rho g(z_1 - z) + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}. \quad (6.23)$$

Звідси видно, що тиски в двох точках на лінії струменю, як і в гідростатиці, відрізняються між собою, по-перше, на величину $\rho g(z_1 - z)$, визвану різницею рівнів, але і, крім того, ще і на величину

$$\frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}, \quad (6.24)$$

зв'язану з різницею динамічних напорів у цих точках. Назвемо член

$$p_1 + \rho g(z_1 - z) = p_{ст}$$

гідростатичним тиском (в точці z), а член (6.24), залежний від швидкості, – динамічним тиском. Якщо тіло помістити в потік рідини чи газу, то на це тіло будуть діяти сили, зв’язані, по-перше, з нерівномірністю розподілу гідростатичного тиску (сила Архімеда) і, по-друге, з нерівномірністю розподілу динамічного тиску на поверхні тіла. У багатьох випадках, наприклад, при польоті літака, динамічна підйомна сила виявляється набагато більшою, ніж гідростатична.

Порівнюємо порядок величин різниць гідростатичних і динамічних тисків в різних точках тіла при усталеному обтіканні його поступальним потоком рідини (чи газу) зі сталою, не дуже великою швидкістю на нескінченності, що дорівнює v_∞ .

Розглянемо обтікання несиметричного профілю крила горизонтальним потоком повітря з швидкістю $v_\infty = 100 \text{ м/с} = 360 \text{ км/год}$ (рис.2.7). Для таких швидкостей при обчисленні тиску в усталеному русі повітря с достатньою точністю можна вважати нестисливою рідиною.

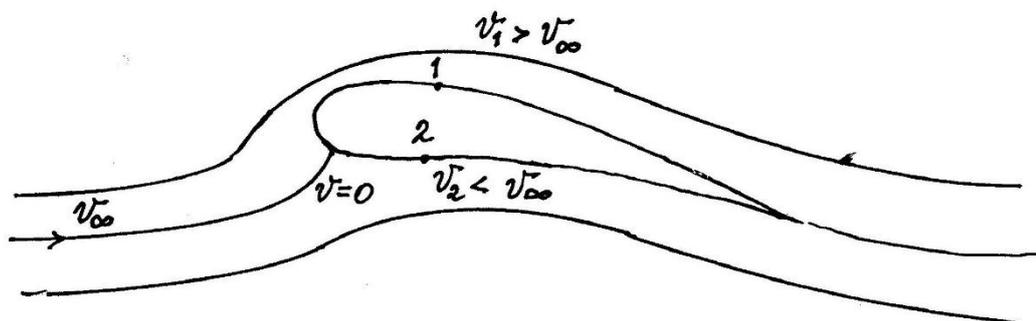


Рис. 2.7. Порівняння гідростатичного тиску з динамічним

При обтіканні несиметричного профілю крила швидкість на його верхній поверхні більша, ніж на нижній, а тиск, навпаки, на нижній поверхні більший, ніж на верхній, – як свідчить інтеграл Бернуллі. Допустимо, що швидкість в точках 1 і 2 на верхній і нижній поверхнях відрізняються на величину в 10 м/с . Наприклад, в точці 1 швидкість дорівнює 105 м/с , а на нижній – 95 м/с . Тоді, оскільки густина повітря при звичайних умовах дорівнює $\rho = 1,23 \text{ кг/м}^3$, отримаємо, що різниця в динамічних тисках складатиме

$$\frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = 6780 - 5550 = 1230 \text{ Па},$$

тоді як різниця в гідростатичних тисках в цих же точках при вертикальному розмірі крила порядку 1 м складатиме всього

$$\rho g \Delta h = 1,23 \cdot 9,8 \cdot 1 = 12 \text{ Па}.$$

Ми бачимо, що різниця тисків в точках 1 і 2 на верхній і нижній поверхнях крила за рахунок порівняно невеликої різниці в швидкостях (порядку 10 м/с) на два порядки більше різниці тисків за рахунок різниці рівнів геометричних висот.

Несуттєвість гідростатичних тисків порівняно з динамічними в аеродинаміці літака можна відчувати за допомогою наступних міркувань. При усталеному горизонтальному польоті літака повна підйомна сила, обумовлена розподілом повного тиску, природно, дорівнює вазі літака, тоді як сила Архімеда, обумовлена розподілом по поверхні тільки гідростатичного тиску, дорівнює тільки вазі повітря (з густиною, що відповідає висоті польоту) в об'ємі літака.

При русі великих по об'єму тіл з малими швидкостями, наприклад, повітряних куль чи дирижаблів у повітрі, суден і підводних човнів у воді роль динамічних тисків у створенні підйомної сили незначна. При русі у воді, густина якої в 800 разів більше густини повітря, сила Архімеда виявляється достатньо великою, і саме ця сила і утримує судна і підводні човни. Зауважимо, що за рахунок густини динамічні тиски при русі води також збільшуються у 800 разів порівняно з динамічними тисками у повітрі при тих же швидкостях. Підйомна сила динамічної природи підтримує над водою судна при їх русі на підводних крилах, або при глісуванні по поверхні води.

○○○

ДЛ–№7.

Основні закономірності гідростатики

7.1. Рівняння рівноваги. Гідростатикою називають науку про рівновагу рідин та її взаємодію з зануреними тілами. Результати і методи гідростатики мають велике значення для багатьох практично важливих задач. У гідростатиці розглядаються також задачі про рівновагу води в океанах і повітря в атмосфері, задачі про сили, що

діють з боку рідини на плаваючі кораблі, підводні човни та аеростати; задачі про стійкість суден, плаваючих на поверхні води і багато інших важливих задач.

При рівновазі рідини $\vec{V} = 0$ і, як випливає із рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (7.1)$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, тобто поле густини має бути стаціонарним, а це, у свою чергу, значить, що якщо густина рідини з часом змінюється, то рідина не знаходиться у стані рівноваги.

Тепер отримаємо із динамічного рівняння рівняння рівноваги рідини. Із рівняння Ейлера

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F}, \quad (7.2)$$

при рівновазі маємо $\vec{V} \equiv 0$ і $\frac{d\vec{V}}{dt} \equiv 0$, отже, в стані рівноваги рідини справджується рівняння

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{F}, \quad (7.3)$$

або в декартових координатах

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \quad (7.4)$$

Якщо $X = Y = Z = 0$, тобто, якщо зовнішні масові сили відсутні, то $\operatorname{grad} p = 0$, і значить, тиск у всіх точках рідини (газу) має бути однаковим. Цей висновок носить назву першого закону Паскаля.

7.2. Умова на зовнішню силу для можливості рівноваги рідини.

Із рівняння (7.3) випливає, що векторне поле масових сил $\vec{F}(x, y, z)$ при рівновазі не може бути довільним, тобто рівновага рідини не завжди може відбутися: для цього потрібно виконання певної умови

на масові сили. Знайдемо ці умови. Із рівняння рівноваги (7.3) знаходимо, що

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (7.5)$$

Із рівності (7.5), в силу того, що

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + \text{grad} \varphi \times \vec{a},$$

витікає, що

$$\text{rot} \vec{F} = \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \text{grad} p = \rho \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \vec{F}. \quad (7.6)$$

Звідси знаходимо, що

$$\vec{F} \cdot \text{rot} \vec{F} = 0, \quad (7.7)$$

оскільки векторний добуток $\text{grad} \frac{1}{\rho} \times \vec{F}$ ортогональний кожному із своїх множників.

Рівняння (7.7) є необхідною умовою на масове поле сил, інакше рівновага рідини у масовому полі неможлива. Можна показати, що при виконанні умови (7.7) можна так визначити два скалярних поля $\rho(x, y, z)$ і $p(x, y, z)$, що для них буде виконуватись умова рівноваги (7.3).

Якщо густина рідини $\rho = \text{const}$, то $\text{rot} \vec{F} \equiv 0$ і для можливості існування рівноваги рідини масова сила повинна мати потенціал, тобто повинно бути

$$\vec{F} = -\text{grad} \Pi.$$

Тому однорідна нестислива рідина може знаходитись у рівновазі лише в потенційному полі зовнішніх масових сил.

У загальному випадку для стисливого середовища, якщо поле сил потенціальне, із рівняння рівноваги (7.3) отримуємо

$$dp = -\rho d\Pi. \quad (7.8)$$

Звідки випливає, що при рівновазі в потенційному силовому полі і тиск і густина являються функціями тільки від величини Π . Дійсно, із (7.8) при $\Pi = const$ маємо і $p = const$, тобто $p = p(\Pi)$, а оскільки $\rho = -\frac{dp}{d\Pi}$, то і $\rho = \rho(\Pi)$. Оскільки густина, тиск і температура зв'язані між собою деяким рівнянням стану, то звідси можна упевнитись, що всі термодинамічні функції в стані рівноваги рідини (газу) залежать тільки від величини гравітаційного потенціалу.

Із загальної теорії розривів (див. Седов Л.И., т.1, гл. VII) витікає, що в рідині у стані спокою можливі тільки поверхні розриву густини, а тиск має бути неперервним. Із неперервності тиску і потенціалу Π отримуємо, що співвідношення (7.8) при $\rho_1 \neq \rho_2$ може задовольнятися вздовж поверхні розриву лише при $d\Pi = dp = 0$; тобто, в рідині, що знаходиться у стані спокою поверхні розриву густини мають бути екіпотенціальними поверхнями $\Pi = const$.

7.3.Рівновага рідини в полі сил тяжіння. Розглянемо більш детально рівновагу рідини (чи газу) в полі сили тяжіння. Виберемо систему координат так, щоб вісь Oz була направлена вертикально вгору; тоді: $X=Y=0, Z = -g$

$$\Pi = gz + C, \rho = \rho(z), p = p(z).$$

Таким чином, при дії тільки сил тяжіння в нерухомих рідинах (чи газах) поверхні сталого тиску (ізобари) і сталої густини (ізостери) суть горизонтальні поверхні (в малих масштабах). Із рівняння стану, як ми вже говорили, отримуємо, що і температура у важкій рідині в стані спокою також має залежати тільки від координати z : $T=T(z)$. Тобто, ми бачимо, що всі термодинамічні параметри рідини (газу) підлаштовуються під значення потенціалу масових сил.

Із (7.8) маємо

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g < 0, \quad (7.9)$$

так що зі збільшенням висоти тиск падає. Із рівняння (7.9) для різниці тиску на двох рівнях z і z_0 отримуємо

$$p(z) - p(z_0) = - \int_{z_0}^z \rho g dz. \quad (7.10)$$

Так що, різниця в тисках в двох точках, розташованих на різних висотах z і z_0 (ці точки не обов'язково повинні лежати одна під другою по вертикалі!) дорівнює інтегралу, котрий виражає вагу стовпчика рідини з площею основи $S=1$ і висотою, рівною $(z - z_0)$, незалежно від того стала, чи змінна величина густини рідини.

Цей висновок не залежить від виду області, в якій знаходиться рідина чи газ і від властивостей рідини чи газу.

7.4.Рівновага однорідної нестисливої рідини в полі сил тяжіння. Розглянемо окремо більш детально випадок однорідної нестисливої рідини і випадок досконалого газу. Хай рідина однорідна і нестислива, тобто $\rho = const$. Із (7.10), якщо вважати, що $g=const$) отримуємо

$$p(z) = p_0 - \rho g(z - z_0). \quad (7.11)$$

Тобто тиск в однорідній нестисливій рідині в стані спокою зменшується з висотою за лінійним законом. Якщо в формулі (7.11) прийняти $z_0 = 0$ (тобто прийняти, що p_0 – це тиск у площині відліку $z_0 = 0$), то матимемо

$$p(z) = p_0 - \rho g z = p_0 + \rho g h, \quad (7.12)$$

де h – глибина точки розгляду відносно площини $z = 0$. За допомогою формул (7.11) і (7.12) можна розрахувати тиск на дно посудини, заповненої рідиною. Величина цього тиску не залежить від форми посудини, а залежить тільки від глибини рідини.

Якщо взяти посудини різної форми (рис.2.8) і налити в них однакову рідину до одного рівня, то тиск на однаковій глибині в посудинах буде однаковим. Зокрема, при однакових глибинах горизонтального днища тиск на нього у всіх посудинах (незалежно від їх форми) буде однаковим.

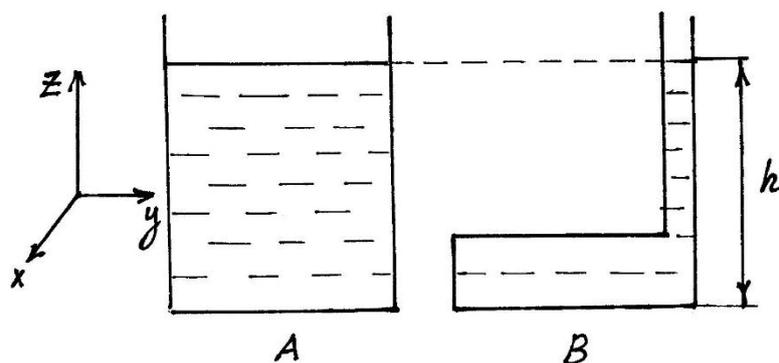


Рис. 2.8. До поняття гідростатичного тиску

Гідростатичний тиск на дніща обох посудин визначається тільки висотою рідини, і однаковий як в посудині А, так і в посудині В. Якщо і площі дніщ посудин однакові, то і сили, що діють з боку рідини на дніща посудин будуть однакові. З другого боку, чашки ваг на рис. 2.8 будуть знаходитись у рівновазі, оскільки вони є поршнями, що сприймають однакові сили, хоча вага рідини, розташованої над ними, різна. Якщо ж посудини I і II просто поставити на шальки ваг (рис.2.9), то вони будуть сприймати вагу посудин і різні ваги рідин в них. В цьому і полягає так званий «гідравлічний парадокс».

На основі законів гідростатики створено різноманітні прилади для вимірювання тиску (манометри), які часто представляють собою сполучені посудини у вигляді U-подібної трубки, в якій знаходиться рідина в стані спокою: ртуть, спирт, вода; при цьому на одне коліно манометра подається тиск, що вимірюється, а на інше – протитиск, з яким ми хочемо порівняти тиск, який потрібно установити. Різниця рівнів рідини в приладі визначає різницю шуканого і контрольного тиску.

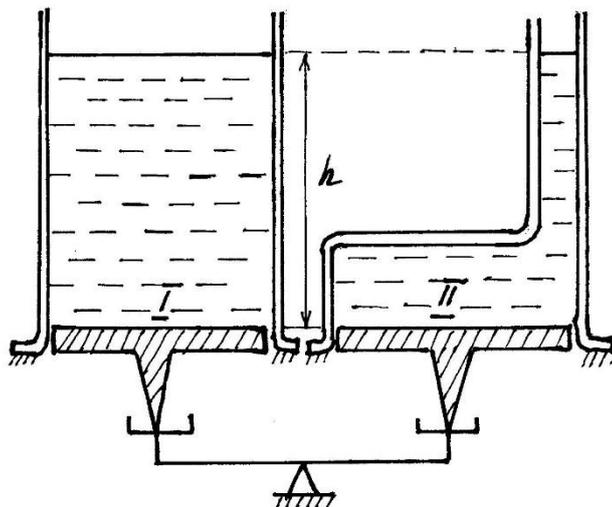


Рис. 2.9. На поршні I і II діють однакові сили

7.5. Поршневий насос (помпа). Розглянемо такий технічний пристрій, який називається поршневий (всмоктувальний) насос. Схема такого насоса показана на рис. 2.10.

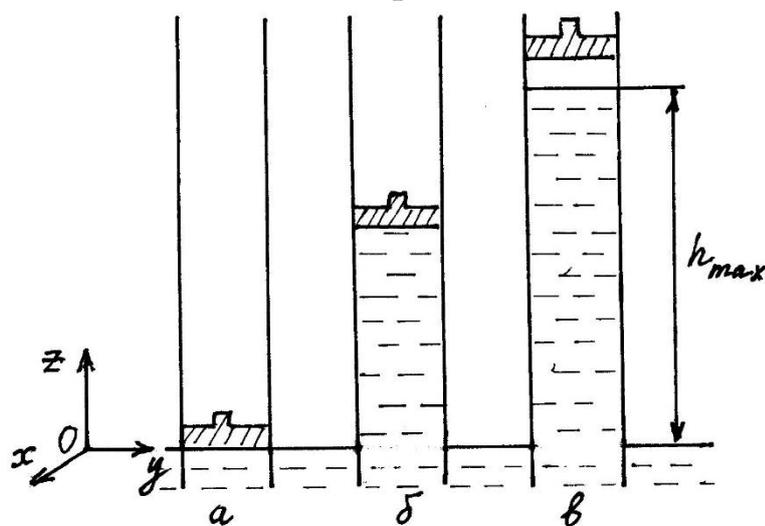


Рис. 2.10. Поршневий насос

Хай у початковий момент поршень в насосі торкається до вільної поверхні рідини (наприклад, води), як на рис.2.10,а. Якщо перемістити поршень трохи вгору, то вода підніметься вслід за поршнем, (рис. 2.10,б). Але якщо підніматимемо поршень і далі, то ми виявимо, що в деякий момент вода відірветься від поршня: між поршнем і вільною поверхнею рідини утвориться порожнина (рис. 2.10,в), тиск в якій буде дорівнювати майже нулю (точніше, тиску насиченої пари рідини при відповідній температурі). Воду, таким

чином, можна підняти тільки на деяку висоту h_{max} , яку обчислимо із рівняння (7.12). Приймаючи в (7.12) $p_0 = p_{атм}$ і $p = 0$, отримаємо

$$h_{max} = \frac{p_{атм}}{\rho g}.$$

Якщо $p_{атм} = 10^5 \text{Па}$, $\rho = 10^3 \text{кг/м}^3$ і $g = 9,81 \text{м/с}^2$ то отримаємо

$$h_{max} \cong 10 \text{ м}.$$

7.6. Рівновага досконалого газу в полі сил тяжіння. Розглянемо тепер рівновагу газу в полі сили тяжіння і спробуємо розрахувати розподіл тиску в земній атмосфері. Газ в атмосфері будемо вважати досконалим і підлеглим рівнянню Клапейрона-Менделєєва $p = \rho RT$. Таким чином, маємо два рівняння:

$$dp = -\rho g dz \quad \text{і} \quad p = \rho RT, \quad (7.13)$$

із яких отримуємо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{RT}, \quad (7.14)$$

звідки

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{g dz}{RT}\right). \quad (7.15)$$

Остання формула називається барометричною; знаючи розподіл температури в атмосфері за висотою, із формули (7.15) можна обчислити розподіл тиску по висоті, а знаючи розподіл тиску і температури, із рівняння стану можна знайти розподіл густини повітря. У будь-якому разі ми бачимо, що згідно з цією формулою, атмосфера Землі, як планети, являється нескінченною (зауважимо, що отримані формули придатні тільки до тих висот, до яких атмосферу можна вважати суцільним середовищем).

Якщо грубо прийняти, що густина повітря стала (так звана однорідна атмосфера), то (в припущенні, що g не залежить від

висоти) тиск і температура, згідно з рівнянням рівноваги, будуть лінійними функціями від висоти, і, як випливає із формули (7.12), знайдеться така висота h , на якій тиск перетвориться в нуль. Висота повітряної атмосфери, якщо вважати повітря нестисливою рідиною, виявляється скінченною:

$$h = \frac{p_0}{\rho g} \cong 8000 \text{ м.}$$

Якщо ж вважати, що атмосфера знаходиться в ізотермічному стані рівноваги ($T = \text{const}$), то із барометричної формули (7.15) (якщо вважати, що ні g , ні R не залежать від висоти) витікає експоненційний закон убуття тиску з висотою

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right) \quad (7.16)$$

Таким чином, висота ізотермічної атмосфери виявляється нескінченною. Зауважимо, що припущення про ізотермічність атмосфери знаходиться у протиріччі з тим фактом, що при рівновазі рідини (газу) температура має бути функцією від потенціалу сили тяжіння.

В обмеженому діапазоні висот (до 11 км) у відповідності з дослідними даними, можна вважати, що температура в атмосфері убиває по лінійному закону, який звичайно записують у вигляді

$$T(z) = T_0 - \frac{\Delta}{100} z. \quad (7.17)$$

де T_0 ($\approx 288 \text{ K} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$) – абсолютна температура при $z = 0$, а Δ – величина, на яку зменшується температура при підйомі на 100 м висоти. В ряді практичних задач можна вважати, що для дійсної атмосфери Землі $\Delta = 0,65$ і що $z = 0$ відповідає рівню моря. У цьому випадку із рівняння (7.15) отримуємо формулу

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\Delta}{100T_0} z\right)^{\frac{100g}{\Delta R}}. \quad (7.18)$$

Висота такої атмосфери (тобто, в припущенні про лінійний закон зміни температури по всій атмосфері) також виявляється скінченною: із (7.18) при $p = 0$ отримуємо

$$h = \frac{100T_0}{\Delta} = \frac{100 \cdot 288}{0,65} \approx 48 \text{ км.}$$

Звідси видно, що припущення про лінійність закону зниження температури атмосфери по висоті для всієї атмосфери не придатний. Цей закон можна використовувати лише в межах тропосфери (до 11 км).

Структура справжньої атмосфери зв'язана зі складними і взагалі змінними з часом (за рахунок сонячної радіації, земного випромінювання та обертання Землі) механізмами теплообміну та змінністю складу атмосфери за рахунок дисоціації та іонізації атмосфери сонячною радіацією. Склад атмосфери і розподіл в ній температури неперервно вивчається за допомогою повітряних шарів-зондів, спеціальних літаків, метеорологічних ракет, штучних супутників та іншими методами.

В технічних розрахунках звичайно використовують так звану «стандартну атмосферу»: у першому наближенні приймають, що до висоти 11 км температура убуває по закону (7.18) з $\Delta = 0,65$. Цей нижній шар називається, як ми вже говорили, тропосферою. Вище тропосфери розташована стратосфера, в якій приймають, що $T = -56^\circ\text{C}$. Але ця модель стандартної атмосфери повністю незадовільна, і потрібно звертатись до більш уточнених даних.

○○○

ДЛ–№8.

Взаємодія занурених тіл з рідиною у стані спокою

8.1. Сили і моменти, що діють з боку рідини на тверду поверхню усередині рідини. Перейдемо тепер до обчислення сил, що діють з боку рідини (газу) на занурені тіла. Головний вектор \vec{A} і головний момент \vec{M} сил, що діють з боку рідини у стані спокою на

будь-яку частину граничної поверхні тіла Σ , або на всю поверхню Σ уявно виділену усередині рідини, виражаються формулами:

$$\vec{A} = \int_{\Sigma} \vec{p}_n dS = - \int_{\Sigma} p \vec{n} dS, \quad (8.1)$$

$$\vec{M} = \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{p}_n) dS = - \int_{\Sigma} p (\vec{r} \times \vec{n}) dS \quad (8.2)$$

Розглянемо тверде тіло об'ємом τ , обмежене поверхнею Σ , котре занурене повністю у рідину, що перебуває в стані спокою (рис.2.11).

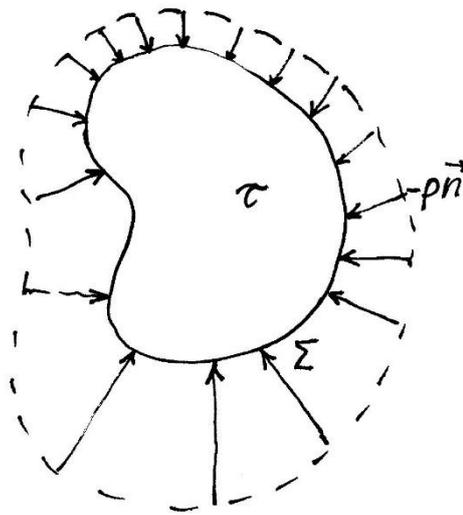


Рис. 2.11. До виведення закону Архімеда

8.2.Закон Архімеда. Знайдемо повну силу (8.1), що діє на тіло. Для цього скористаємось таким міркуванням: очевидно, що рівновага рідини, що оточує тіло, не порушиться (а значить, і сила \vec{A} не зміниться), якщо уявно (чи в дійсності) замінити об'єм твердого тіла об'ємом рідини у стані спокою з таким розподілом густини і тиску, що задовольняють рівнянням рівноваги. Зробивши таку уявну заміну, скористаємось для обчислення сили \vec{A} формулою Остроградського-Гауса:

$$\vec{A} = \int_{\Sigma} \vec{p}_n dS = - \int_{\Sigma} p \vec{n} dS = - \int_V \text{grad} p d\tau = - \int_V \rho \vec{F} d\tau, \quad (8.3)$$

де останню рівність ми записали, скориставшись рівнянням рівноваги $grad p = \rho \vec{F}$ із попередньої лекції.

Якщо \vec{F} – сила тяжіння і ось Oz направлена вертикально вгору, то $\vec{F} = -g\vec{k}$ і

$$\vec{A} = - \int_V \rho g \vec{k} d\tau = -\vec{G}, \quad (8.4)$$

де \vec{G} – вага рідини, замкненої в об'ємі V .

Ми отримали **закон Архімеда**: на тіло, повністю занурене у вагому рідину в стані спокою, з боку рідини діє підйомна сила, що дорівнює вазі рідини (газу), витісненої тілом. Сила Архімеда, що діє з боку рідини на тіло, направлена вертикально вгору і намагається виштовхнути тіло із рідини. Ця сила називається гідростатичною підйомною силою, або силою Архімеда. Можна також сказати, що за рахунок сили Архімеда занурене у рідину тіло втрачає у своїй вазі стільки, скільки важить витіснена ним рідина. Гідростатична підйомна сила виникає за рахунок нерівномірного розподілу тиску в рідині, адже тиск у вагомій рідині зростає з глибиною.

Покажемо тепер, що лінія дії сили Архімеда \vec{A} проходить через центр тяжіння маси витісненої рідини. Дійсно, система поверхневих сил, прикладених на поверхні Σ , урівноважується системою сил тяжіння частинок середовища усередині об'єму V . Тому сукупність системи сил, діючих на поверхні тіла Σ , можна звести до однієї сили, рівної загальній вазі і прикладеній в центрі тяжіння умовно введеної в середину поверхні Σ маси рідини з розподіленням густини і тиску, що задовольняють рівнянню рівноваги.

Таким чином, якщо занурене в рідину тіло можна вважати твердим, то ефект взаємодії тіла з рідиною в стані спокою можна звести до сили Архімеда, що прикладена в центрі тяжіння витісненої тілом маси. Якщо рідина однорідна, то центр тяжіння витісненої маси співпадає з центром тяжіння витісненого об'єму. У цьому випадку, для тіла, повністю зануреного у рідину, точка прикладання сили Архімеда, відзначена в тілі, не залежить від орієнтації тіла. У більш загальному випадку, для тіл, занурених у середовище з неоднорідною густиною, сила Архімеда і її лінія дії суттєво залежить від положення тіла в рідині і від його орієнтації.

Якщо сила Архімеда менша ваги тіла, то тіло, занурене в рідину і залишене саме на себе, тоне; якщо ж сила Архімеда більша ваги тіла, то тіло спливає. В рамках квазістатичного розгляду тіло спливає до тих пір, поки його вага не зрівняється з гідростатичною підйомною силою.

8.3. Сила Архімеда для випадку плаваючих тіл. Для тіла, що плаває на поверхні води (тобто, тільки частково занурене у воду) гідростатична підйомна сила також дорівнює силі Архімеда. Дійсно, для обчислення цієї сили розріжемо умовно тіло по горизонтальній поверхні σ , що співпадає з рівнем вільної поверхні, (рис. 2.12). На поверхні цього перетину тиск треба вважати сталим і рівним атмосферному $p_{атм}$ – тиску на вільній поверхні рідини.

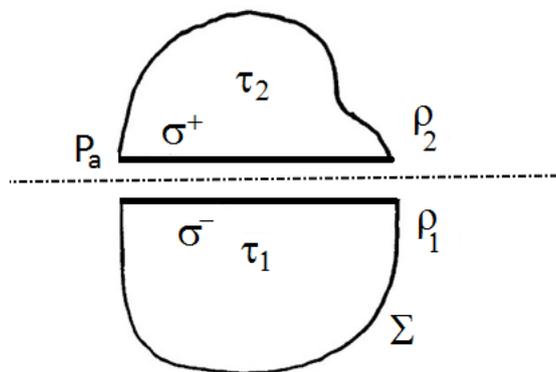


Рис. 2.12. До обчислення сили Архімеда плаваючого тіла

На практиці, при розрахунках, скажімо, гідростатичної сили, що діє на корабель, зміною гідростатичного тиску повітря в різних надводних частинах корабля можна нехтувати і вважати цей тиск сталим і рівним $p_{атм}$ на рівні вільної поверхні води. Очевидно, що при обчисленні інтеграла (8.1) по повній поверхні ми у вказаному разі отримаємо силу Архімеда для тієї частини тіла τ_1 , що занурена у воду і обмежена перетином σ . Об'єм τ_1 для судна називається водотоннажність (тоннажність).

Для тіла, тільки частково зануреного в воду, положення лінії дії сили Архімеда відносно тіла суттєво залежить від орієнтації тіла.

Наявність гідростатичної підйомної сили широко використовується в техніці: ця сила підтримує судна, що плавають по поверхні води, утримує підводні човни, підтримує у повітрі аеростати та дирижаблі

На основі закону Архімеда побудовано прилади для визначення густини рідини – ареометри (вимірники жирності молока – лактометри, концентрації спирту – спиртометри) тощо.

8.4.Парадокс Жуковського. Істотним моментом у виводі закону Архімеда є припущення про замкнутість поверхні Σ стикання тіла з рідиною. Якщо ця поверхня не замкнута, то закон Архімеда не має місця.

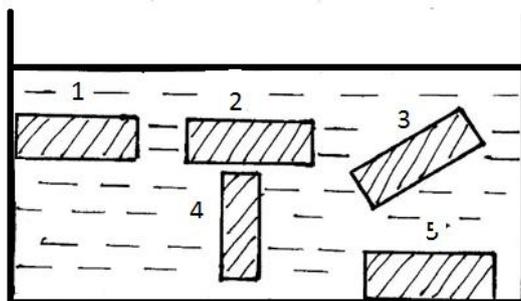


Рис. 2.13. До питання про силу Архімеда для незамкненої змоченої поверхні

Наприклад, якщо деяке тіло (рис.2.13) занурити у воду так, щоб воно зі всіх боків було оточене рідиною, то на нього буде діяти виштовхувальна сила; але якщо те ж тіло опустити на дно, то під'ємна сила щезне і з'явиться сила, що буде притискувати тіло до днища посудини (з цим явищем пов'язані випадки, коли підводний човен лягає на дно моря чи океану, втрачає плавучість і не може більше спливати), (рис.2.13, випадок 5).

До вказаного явища належить також так званий парадокс Жуковського, суть якого полягає в наступному. Помістимо в плоскій стінці бака з рідиною циліндр, що може обертатись (без тертя) навколо своєї осі (рис.2.14 випадок 5).

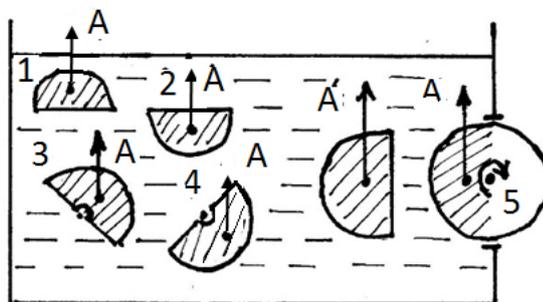
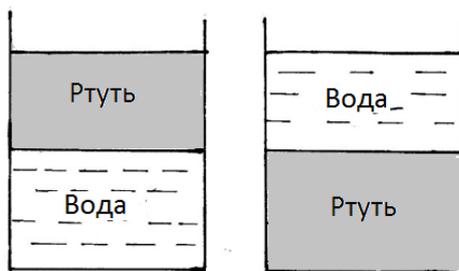


Рис. 2.14. До парадоксу Жуковського

Здавалось би, що на зануреній в рідину частині циліндра має з'явитись підйомна сила Архімеда, направлена вертикально вгору, котра на плечі відносно осі циліндра буде створювати момент і буде обертати циліндр, причому, завжди (вічний двигун першого роду!). але цього не відбувається, оскільки в даному випадку, сила реакції рідини на змочену напівповерхню циліндра не буде направлена вгору, як сила Архімеда, а буде проходити через вісь циліндра (тобто не буде створювати момент!), оскільки всі елементарні сили на боковій поверхні циліндра направлені по нормалі до неї і, значить, проходять через вісь циліндра).

За допомогою вказаних формул для розподілу гідростатичного тиску в рідинах легко розраховувати сумарні сили й моменти, що діють за рахунок гідростатичного тиску на будь-які поверхні, чи їх частини, що знаходяться в контакті з рідиною у стані спокою, наприклад, стінки суден, греблі, різного роду апарати і устаткування, що знаходиться у повітрі чи у воді. Підкреслимо, що тут мова йде лише про сили, що діють на тіла, занурені у рідину тільки за рахунок гідростатичного тиску, тоді як сумарна сила, що діє на поверхні тіла при русі рідини, залежить не тільки від гідростатичної складової тиску, а й від гідродинамічної складової.

8.5. Стійкість рівноваги нестисливої рідини і політропної атмосфери в полі сили тяжіння. Розглянемо тепер питання про стійкість рівноваги нестисливої рідини. Найпростіше це питання вирішити на прикладі рівноваги нестисливої рідини (рідин). Хай у нас у посудині є два шари рідин, скажімо, шар води і шар ртуті, при цьому, з точки зору рівнянь рівноваги вагомої рідини однаково можливі обидва стани рівноваги, показані на рис.2.15 – і стан, коли вода зверху, і стан, коли вода знаходиться знизу. Тим часом виникає питання: чи будуть ці обидва стани стійкими?



а)

б)

Рис. 2.15. Приклади на стійкість та нестійкість рівноваги

Нагадаємо, що значить стійка і нестійка рівновага. Рівновага механічної системи називається стійкою, якщо після довільного малого переміщення (фактичного, чи тільки уявного) система прагне повернутися у свій попередній стан; нестійкою, якщо знайдеться деяке таке мале переміщення (збурення початкового стану) всієї системи чи її частини, після якого система буде прагнути ще даліше віддалитися від початкового стану рівноваги; і, нарешті, байдужою, якщо в системі можна створити будь-яке мале збурення, не порушуючи рівноваги.

Для того щоб для рідини установити необхідні умови стійкості рівноваги, можна уявно перемістити деяку кількість рідини і подивитись, що має далі відбуватись з цією частинкою рідини під дією сил, котрі будуть діяти на неї після наданого їй переміщення. У наведеному вище прикладі «ртуть-вода» стан рівноваги на рис. 2.15,а, буде, очевидно, нестійким, оскільки частинка ртуті, будучи зміщена в шар води, в силу того, що діюча на неї сила Архімеда буде менша діючої на неї сили тяжіння, почне опускаться вниз. І навпаки: рівновага, коли вода зверху, а ртуть знизу (рис.2.15,б) – буде стійкою.

Із сказаного витікає висновок: необхідна умова стійкості (або байдужості) стану рівноваги нестисливої рідини в полі сил тяжіння полягає в тому, що густина середовища має збільшуватись з глибиною (або залишатись сталою), тобто $\frac{\partial \rho}{\partial z} \leq 0!$

8.6. Стійкість стану рівноваги атмосфери. Для газу питання стійкості стану рівноваги вирішується дещо складніше, оскільки частинка газу, будучи зміщена із шару з одним тиском в шар з другим тиском, змінює свою густину (завдяки зміні тиску).

Розглянемо стійкість рівноваги так званої політропної атмосфери, для якої виконується такий зв'язок між тиском і густиною атмосфери

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^n, \quad (8.5)$$

Вважаючи, що частинка повітря з густиною ρ_1 при переміщенні із шару 1 в шар 2 зазнає або адіабатичного стиску, або розширення по адіабаті з показником γ , тобто

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma, \quad (8.6)$$

де через ρ_1^{\square} ми позначили густину частинки із шару 1 після її переміщення в шар 2, а γ – показник адіабати.

Очевидно, що для стійкості рівноваги необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\rho_1^{\square} < \rho_2, \quad (8.7)$$

оскільки в цьому випадку сила Архімеда буде більше, ніж сила тяжіння; при $\rho_1^{\square} > \rho_2$ рівновага буде нестійка; при $\rho_1^{\square} = \rho_2$ рівновага нейтральна.

Оскільки

$$\left(\frac{\rho_1^{\square}}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n, \quad (8.8)$$

то для стійкості рівноваги, очевидно потрібно виконання нерівності

$$n < \gamma ; \text{рівновага нестійка при } n > \gamma.$$

Адіабатичному розшаруванню в атмосфері (тобто випадку, коли $n = \gamma$) відповідає падіння температури $\Delta \approx 1^\circ\text{C}$ на кожні 100 метрів висоти. Оскільки

$$n = \frac{100g}{100g - \Delta R},$$

то отримаємо, що для стійкої рівноваги потрібно, щоб виконувалась нерівність $\Delta < 1^\circ\text{C}$; рівновага нестійка, якщо $\Delta > 1^\circ\text{C}$. Конвекція в атмосфері часто є наслідком нестійкості, котра виникає при прогрівання нижніх шарів повітря.

8.7. Про стійкість рівноваги плаваючих (частково занурених) тіл. Однією з важливих задач гідростатики є дослідження стійкості рівноваги тіл, що плавають на поверхні води.

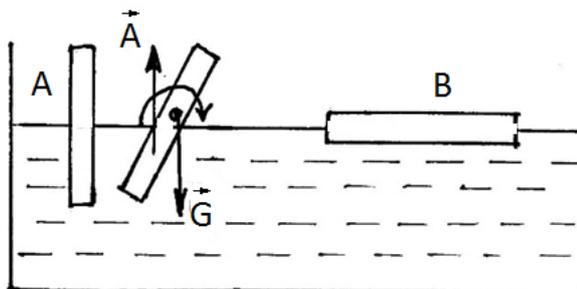


Рис. 2.16. До питання про рівновагу плаваючих тіл

Для фрагментарного розгляду цього питання звернемо увагу на те, що плаваюче на поверхні води тіло А (наприклад, дерев'яний брусок) (рис.2.16) перекидається при незначному відхиленні його від вертикального положення, і цей же брусок в положенні В, навпаки, вернеться в своє попереднє положення після будь-якого незначного відхилення. Теорія стійкості рівноваги плаваючих тіл називається «теорією стійкості» і має велике практичне значення для будови різноманітних суден, яхт тощо. З її допомогою розглядаються питання непотоплюваності суден, качки їх на хвилях тощо (рис.2.17).

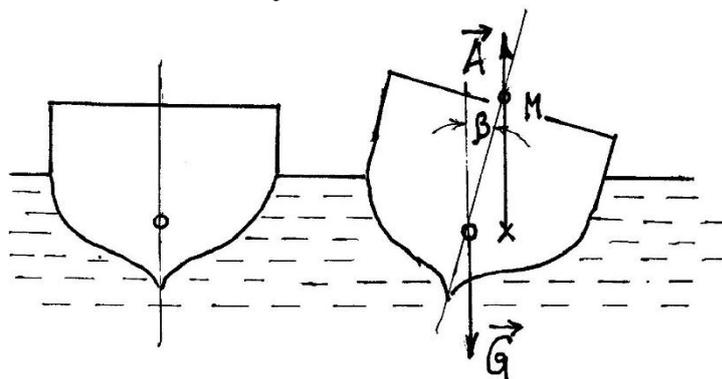


Рис.2.17. До питання «стійкості» суден при боковій качці

8.8. Рівновага рідини відносно рухомих систем координат.

Розглянемо ще питання про рівновагу вагової нестисливої рідини відносно системи координат, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Нехай ми маємо посудину, що обертається навколо вертикальної осі, рис. 2.18.

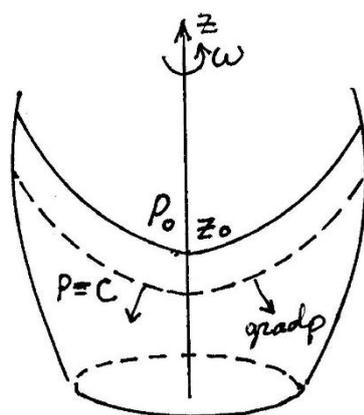


Рис. 2.18. Рівновага рідини відносно посудини, що обертається

Визначимо форму вільної поверхні налитої в посудину рідини при умові, що вона знаходиться в спокої по відношенню до посудини,

котра сама обертається. Тоді в праву частину рівнянь рівноваги (рівняння (4) із попередньої лекції), згідно з принципом Даламбера, треба додати відповідні сили інерції; і замість раніше вказаних рівнянь, будемо мати рівняння відносної рівноваги у вигляді:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (8.9)$$

Неважко бачити, що їх загальний розв'язок представляється формулою

$$p = C - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Для точки $x = y = 0$, $z = z_0$ на вільній поверхні маємо: $p = p_0$, тому

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

і

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (8.10)$$

Рівняння вільної поверхні, на якій $p = p_0$, знайдемо із (8.10):

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2), \quad (8.11)$$

тобто, вільна поверхня являє собою параболоїд обертання. Аналогічну форму будуть мати і всі інші поверхні сталого тиску (ізобаричні поверхні). Вектор $grad p$, як відомо, направлений вздовж нормалей до цих параболоїдів.

Константа z_0 для рідини в посудині визначається через об'єм рідини, наливої до цієї посудини до обертання. Якщо в рідину помістити зважені частинки різної густини, то в результаті обертання більш легкі частинки (що мають густину меншу, ніж у води) під дією сили Архімеда (що тепер обумовлена силою тяжіння і відцентровою силою інерції) будуть підніматись вгору і збиратись поблизу осі обертання., а більш важкі частинки будуть спускатися вниз і

розташовуватись біля стінок посудини. Таким чином, ми установили принцип дії і навіть принципову схему відцентрового сепаратора.

Розглянемо тепер, на сам кінець, випадок вагової рідини у цистерні, що рухається поступально зі сталим прискоренням a , рис. 9. Неважко бачити, що тепер рівень вільної поверхні буде площиною, нахиленою до горизонту під кутом $\varphi = \arctg\left(\frac{a}{g}\right)$.

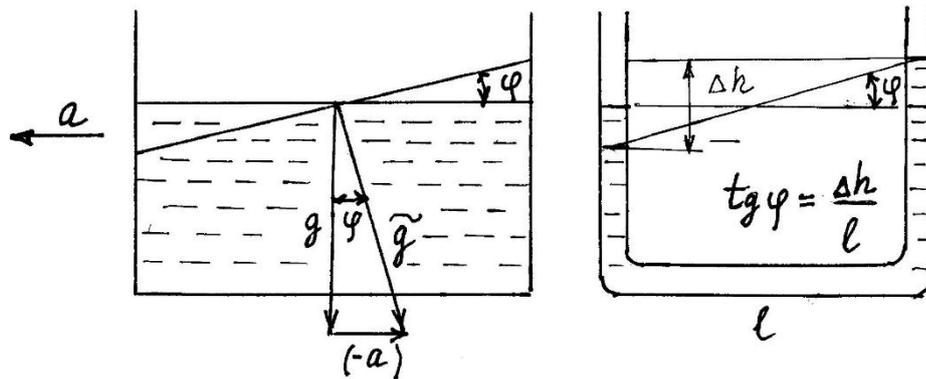


Рис. 9. Рівновага рідини при поступальному русі з прискоренням

Напрямок сумарних масових сил (сила тяжінні і сила інерції), що діють на кожну частинку рідини, складають кут φ з вертикаллю; вільна поверхня буде нахилена до горизонту під кутом φ . Кут нахилу вільної поверхні може служити мірою для визначення прискорення, яке має посудина. На вказаному принципі можна побудувати прилад для вимірювання прискорення транспортних засобів, зокрема залізничних.

○○○

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ЗА РОЗДІЛОМ 2

А) Резервуар з рідиною рухається рівномірно прискоренно вздовж похилої поверхні з прискоренням a . Знайти рівняння поверхонь однакового тиску і закон розподілу тиску в рідині. Кут нахилу поверхні до горизонту дорівнює β .

Б) неповна цистерна діаметром d з нафтою рухається з швидкістю V вздовж колії з заокругленням путі радіусом R . Знайти кут нахилу поверхні нафти у цистерні, вважаючи, що $\frac{d}{R} \ll 1$.

В) Циліндричний стакан висотою h і радіусом R , що був спочатку налитий водою до половини, обертається з кутовою швидкістю $\omega = \text{const}$. Знайти, при якій кутовій швидкості вода почне виливатись із стакана.

Г) Визначити надмірний тиск у носовій точці тіла, що рухається у морській воді з солоністю 30 промілів і температурою $t = 4^\circ\text{C}$ з поступальною швидкістю 10 м/сек.

Д) Визначити швидкість повітряного потоку ($t = 15^\circ\text{C}$) у відкритій робочій частині аеродинамічної труби з діаметром $d = 1\text{ м}$, якщо спиртовий манометр, під'єднаний до перерізу сопла труби з діаметром $D = 2,5\text{ м}$ показує $h = 150\text{ мм}$.

РОЗДІЛ 3. ПЛОСКІ БЕЗВИХОРОВІ ТЕЧІЇ І ТЕОРІЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

ДЛ–№9.

Плоскі безвихорові течії ідеальної рідини

Рух рідини називається плоским, якщо всі частинки, що лежать на одному і тому ж перпендикулярі до деякої нерухомої площини, мають однакові швидкості, паралельні до цієї площини. Очевидно, що у цьому випадку рух буде двохвимірним, і достатньо розглянути рух тільки у площині OXY , приймаючи за неї ту площину, паралельно до якої відбувається рух всієї рідини. Говорячи в подальшому про потік рідини через деяку криву на площині OXY , ми будемо під останнім підрозумівати потік через циліндричну поверхню (обечайку), для якої дана крива є направляючою, а твірні – паралельні до осі OZ і висота цієї циліндричної поверхні дорівнює одиниці. Таким чином, ми маємо площину OXY , на якій відбувається течія, що має дві компоненти швидкості: $v_x(x, y, t)$ і $v_y(x, y, t)$; інші гідрогазодинамічні функції також залежать від змінних x, y, t .

9.1. Потенціал і функція струменю. Ми вважаємо, що течія рідини є безвихоровою, тобто скрізь на площині виконується умова $rot\vec{V} = 0$, звідки, як ми вже знаємо, витікає, що існує така скалярна функція $\varphi(x, y)$ (можливо, $\varphi(x, y, t)$), що

$$\vec{V} = grad \varphi(x, y, t). \quad (9.1)$$

Таку функцію ми назвали потенціалом швидкості (далі будемо називати тільки «потенціалом»). Для випадку плоского руху функція $\varphi(x, y)$ зв'язана з компонентами швидкості формулами:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9.2)$$

У плоскому полі рідини (безвихоровому, чи вихровому) можна ввести ще деяку функцію $\psi(x, y)$, яка зв'язана з полем швидкості завдяки існуванню рівняння нерозривності. Для простоти розглянемо

стаціонарний рух; тоді існують стаціонарні лінії струменю, котрі в плоскому випадку задовольняють диференціальному рівнянню

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \quad (9.3)$$

яке запишемо у вигляді

$$-v_y dx + v_x dy = 0. \quad (9.4)$$

Із теорії диференціальних рівнянь добре відомо, що якщо задано диференціальний двочлен типу

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (9.5)$$

то цей вираз або є повним диференціалом деякої функції (яку будемо позначати як $\psi(x, y)$), або не є. Якщо диференціальний двочлен (9.5) є повний диференціал від функції $\psi(x, y)$, то тоді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi, \quad (9.6)$$

тобто

$$M(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{і} \quad N(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9.7)$$

і при цьому має виконуватись умова

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \quad (9.8)$$

Таким чином, якщо виконується умова

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (9.9)$$

то цього достатньо (крім, зрозуміло, неперервності і неперервної диференційованості) для того, щоб диференціальний двочлен (9.5)

був повним диференціалом деякої функції $\psi(x, y)$, яка може бути знайдена із рівнянь (9.7) з точністю до несуттєвої константи.

Звідси також витікає, що якщо задано диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (9.10)$$

то при умові (9.9) це рівняння еквівалентне рівнянню

$$d\psi(x, y) = 0, \quad (9.11)$$

і, значить, інтегралом рівняння (9.10) буде вираз

$$\psi(x, y) = C, \quad (C = \text{Const}). \quad (9.12)$$

Повернімось тепер до рівняння ліній струменю (9.4); оскільки ми розглядаємо нестисливу рідину, то для неї виконується рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \right), \quad (9.13)$$

що якраз і є умовою (9.9) для рівняння типу (9.5). Отже, для рівняння (9.4) (рівняння ліній струменю) існує така функція $\psi(x, y)$, для якої виконуються рівності

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, \quad (9.14)$$

і рівняння (9.4) має розв'язок у вигляді

$$\psi(x, y) = C. \quad (9.15)$$

Функція $\psi(x, y)$ називається функцією струменю, а рівняння (9.15) є рівнянням всього сімейства ліній струменю (кожній лінії струменю відповідає певне своє числове значення числа C). Якщо рівняння (9.15) розв'язати відносно y , то отримаємо рівняння сімейства ліній струменю у явному вигляді

$$y = F(x, C). \quad (9.16)$$

З'ясуємо ще один дуже важливий смисл функції струменю, крім того, що вона визначає компоненти швидкості (за допомогою формул (9.14)) і визначає сімейство ліній струменю. Проведемо на площині (x, y) між двома довільними точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ деяку криву L і знайдемо, як виражається об'ємна кількість рідини, що протікає через цю криву за одиницю часу (згадайте, що в дійсності ми знаходимо витрату рідини через деяку циліндричну поверхню, що опирається на криву L і має одиничну висоту, (рис.3.1) Об'ємна витрата рідини виражається криволінійним інтегралом:

$$Q = \int_A^B \vec{V} \vec{n} dS = \int_A^B (v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)) dS.$$

Маємо:

$$dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \cdot \sin \theta, \quad \cos(n, x) = \sin \theta, \quad \cos(n, y) = -\cos \theta,$$

так що

$$Q = \int_A^B (v_x \sin \theta - v_y \cos \theta) ds = \int_A^B v_x dy - v_y dx = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A. \quad (9.17)$$

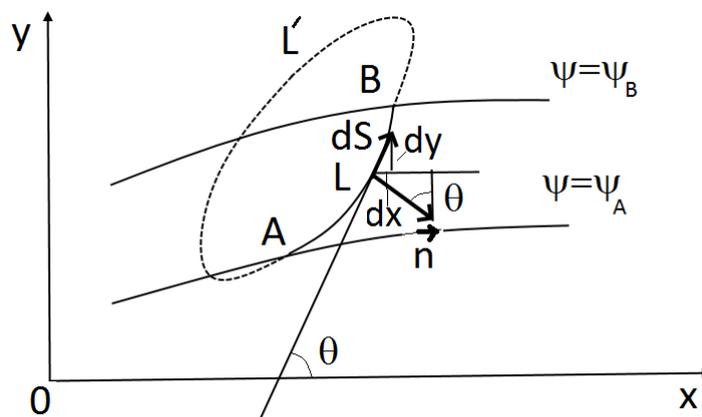


Рис. 3.1. До зв'язку витрати рідини через функцію струменю

Таким чином, потік рідини через довільну криву, що з'єднує початкову точку A з кінцевою точкою B кривої AB (додатна нормаль направлена вправо при переміщенні від A до B) дорівнює різниці значень функцій струменю в кінцевій точці і початковій. Якщо на площині (x, y) задано дві лінії струменю, одна з яких проходить через точку B , а інша – через точку A , то величина потоку між цими двома лініями у будь-якому місці буде однаковою, і може бути обчислена за формулою (9.17), де точка B – будь яка точка на лінії струменю $\psi = \psi_B$, а точка A – на лінії $\psi = \psi_A$. В якості кривої інтегрування можна взяти будь-яку лінію, – тільки б вона починалась на лінії $\psi = \psi_A$ і закінчувалась на лінії $\psi = \psi_B$.

9.3. Зв'язок функції струменю з потенціалом швидкості. Якщо в плоскій течії існує потенціал, то виконуються формули (9.2), тобто рівності

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{і} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (9.18)$$

Крім того виконуються формули (9.14):

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{і} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.19)$$

звідки випливає такий взаємозв'язок між функціями φ і ψ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.20)$$

а також

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (9.21)$$

Останнє рівняння означає, що кожна крива сімейства $\varphi = const$ (сімейства ізопотенціальних ліній) пересікається під прямим кутом з будь-якою кривою сімейства ліній струменю, тобто сімейство ліній струменю являється ортогональним до сімейства ізопотенціальних ліній і навпаки.

Умови (9.20) називаються умовами Коші-Рімана; вони дозволяють, знаючи одну із цих двох функцій φ , чи ψ , знайти іншу (з точністю до несуттєвої константи).

Із умов (9.20) неважко отримати, що і функція φ , і функція ψ задовольняють двомірному рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.22)$$

тобто являються двомірними гармонічними функціями. Дві гармонічні функції, зв'язані між собою умовами Коші-Рімана, називаються спряженими.

9.4. Комплексний потенціал і комплексна швидкість. Умови (9.20), тобто умови Коші-Рімана, як відомо, виражають той факт, що лінійна комбінація функцій φ і ψ у вигляді

$$w = \varphi + i \psi \quad (9.23)$$

(де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця) являється аналітичною функцією комплексного змінного (аргументу) $z = x + iy$, тобто

$$w = f(z), \quad \varphi + i \psi = f(x + iy). \quad (9.24)$$

Функцію $w(z) = \varphi + i \psi$ будемо називати комплексним потенціалом.

Як відомо із ТФКЗ, функція $f(z)$ має певну похідну по комплексній змінній z , яка виражається наступним чином через частинні похідні від функцій φ і ψ , а саме:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9.25)$$

Остання формула показує, що комплексна похідна $\frac{dw}{dz}$ тісно пов'язана з вектором швидкості рідини в двохмірних течіях, а саме

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y. \quad (9.26)$$

Якщо на комплексній площині (x, y) (рис.3.2) дійсні величини відкладати, як звичайно, по осі Ox , а уявні – по осі Oy , то комплексне число $V = v_x + iv_y$ буде зображати вектор швидкості, відкладений від початку координат, а спряжена швидкість $\frac{dw}{dz}$ буде зображена спряженим вектором \bar{V} , тому комплексну величину $\frac{dw}{dz}$ називають спряженою швидкістю, причому

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |V|. \quad (9.27)$$

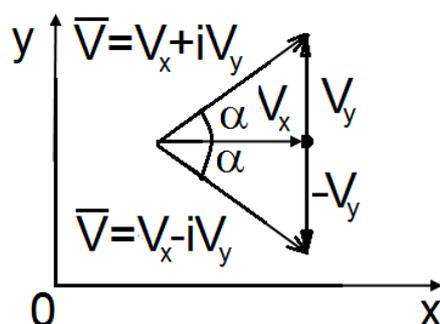


Рис.3.2. До поняття спряженої швидкості

9.5. Зв'язок плоских гідродинамічних задач із теорією функцій комплексної змінної. Співвідношення (9.23) свідчить про те, що кожній аналітичній функції комплексного змінного відповідає певна гідродинамічна течія з набором ліній струменю $\psi(x, y) = const$ і ізопотенціальних ліній $\phi(x, y) = const$; кожну аналітичну функцію $f(z)$ можна трактувати як певну гідродинамічну течію. Таким чином, кінематичне дослідження плоского руху нестисливої рідини самим безпосереднім чином пов'язано з теорією функцій комплексного змінного, і багато положень цієї глибоко розвиненої області математичного аналізу мають свої гідродинамічне тлумачення. Вирішити певну плоску гідродинамічну задачу – це значить знайти відповідну їй аналітичну функцію.

Далі обмежимося тлумаченнями деяких найбільш простих аналітичних функцій з точки зору гідродинаміки, щоб показати, як за певною аналітичною функцією скривається деяка гідродинамічна течія.

9.6. Приклади комплексного потенціалу. Розглянемо більш детально деякі приклади комплексного потенціалу.

1. Лінійна функція $w = az$, де число a для простоти будемо вважати дійсним. Маємо:

$$w = \varphi + i\psi = a(x + iy) = ax + iay, \quad (9.28)$$

тобто $\varphi = ax$, $\psi = ay$.

Звідси маємо сімейство ліній струменю:

$$\psi = ay = \text{const},$$

тобто це прямі лінії, паралельні до осі абсцис. Лінії рівного потенціалу

$$\varphi = ax = \text{const}$$

–це сімейство прямих, паралельних до осі ординат. Обидва сімейства між собою взаємно ортогональні. Швидкість у всьому полі стала:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Такий потік називається однорідним і поступальним. В ідеальній рідині немає тертя, тому будь-яку лінію струменю можна вважати твердою стінкою, оскільки рідина рухається вздовж стінки (тобто по дотичній до стінки). Отже, в даному прикладі ми можемо зробити твердою (далі будемо говорити «затвердити») ось абсцис і будь-яку поверхню, в якій лежить ось абсцис.

Легко бачити, що у випадку, коли число a комплексне ($a = \alpha + i\beta$), характер потоку принципово зберігається, змінюється тільки напрямок швидкості і, відповідно, напрямок ліній струменю.

2. Функція $w = az^2$, де a – дійсна величина, і нехай $a > 0$). Маємо:

$$\varphi + i\psi = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy.$$

Тобто, тут лініями струменю являються рівнобічні гіперболи
рис.3.3

$$\psi(x, y) = 2axy = \text{const}, \quad (9.29)$$

для котрих координатні осі суть асимптоти.

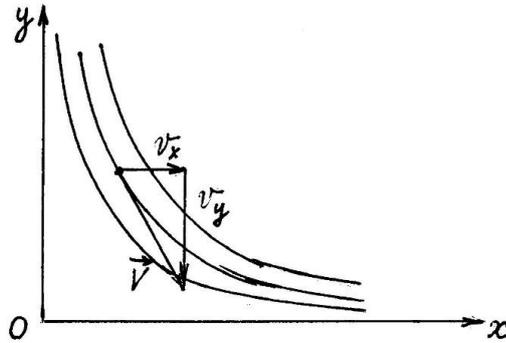


Рис. 3.3. Лінії струменю для комплексного потенціалу $w = az^2$

Компоненти швидкості можна визначити двоюко: або продиференціювати функцію $\varphi = a(x^2 - y^2)$:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay, \quad (9.30)$$

або спочатку визначити комплексну швидкість, а потім із її виразу знайти компоненти швидкості:

$$\frac{dw}{dz} = 2az = 2a(x + iy) = v_x - iv_y,$$

звідки : $v_x = 2ax$, $v_y = -2ay$.

При $a > 0$, як видно із рис.3.3, компонента швидкості v_x направлена вздовж осі абсцис, а компонента v_y – протилежно до осі ординат.

Поле течії, виражене функцією $w = az^2$, визначено на всій площині комплексного змінного (x, y) . Але, як ми вже говорили, будь-яку лінію струменю в ідеальній рідині можна прийняти за тверду границю. Так, наприклад, ми можемо додатні півосі Ox і Oy вважати твердими стінками, і тоді розглянута функція дає нам течію нестисливої рідини усередині прямого кута з твердими границями. Звертаємо увагу на те, що в початку координат $v_x = v_y = 0$. Така

точка в області рідини, чи на її границі, в якій обидві компоненти швидкості (тобто модуль швидкості) перетворюються в нуль, називається точкою гальмування потоку.

3. **Функція** $w = \frac{1}{z}$. Маємо: $w(z) = \varphi + i\psi = \frac{1}{(x+iy)}$,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{(x+iy)^2}. \quad (9.31)$$

Щоб відділити тут дійсну частину від уявної, помножимо праву частину в чисельнику і знаменнику на \bar{z} і скористаємось тим фактом, що $z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$. Будемо мати:

$$w(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2},$$

Звідси отримаємо, що $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Отже, лінії струменю представляють собою систему кривих з рівнянням

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} = C, \quad (9.32)$$

тобто систему кіл з рівняннями

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}. \quad (9.33)$$

Всі кола дотикаються до осі абсцис у початку координат; центри кіл при $C > 0$ знаходяться на осі ординат в точках $y = -\frac{1}{2C}$ (під віссю абсцис), а при $C < 0$ – над віссю абсцис. Картину ліній струменю, задану функцією $w = \frac{1}{z}$, зображено на рис.3.4.

Вираз для комплексної швидкості $\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$ для даної течії показує, що величина швидкості стає нескінченно великою в початку координат, тобто початок координат являє собою особливу точку, як для комплексного потенціалу, так і для комплексної швидкості. З точки зору математики комплексний потенціал в початку координат має простий полюс (полюс першого порядку), а комплексна

швидкість – двократний полюс (полюс другого порядку). Функція $w = \frac{1}{z}$ називається диполем.

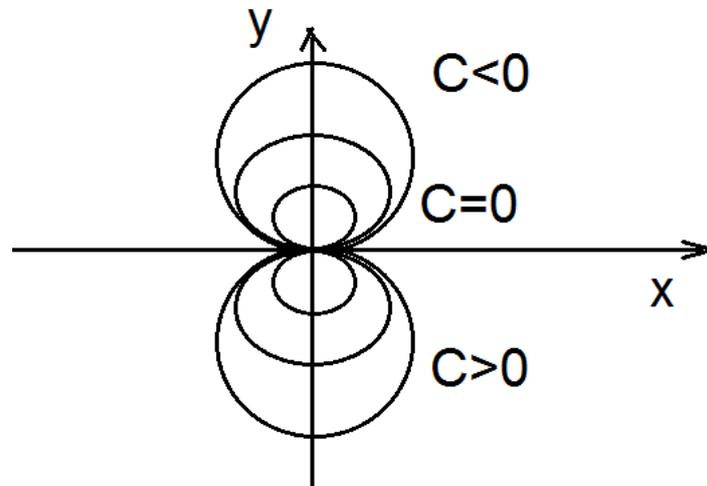


Рис.3. 4. Лінії струменю для диполя $w = \frac{1}{z}$

○○○

ЛД-№10.

Подальші приклади комплексних потенціалів.

10.1. Розглянемо комплексний потенціал вигляду $w(z)=a \ln z$, де число a дійсна величина. Відділимо дійсну частину від уявної:

$$z = re^{i\theta}, \quad w = a \ln(re^{i\theta}) = a \ln r + ia\theta .$$

Звідси

$$\varphi(r, \theta) = a \ln r, \quad \psi(r, \theta) = a\theta. \quad (10.1)$$

Ми отримали для цієї особливої точки вираз для потенціалу і функції струменю у полярній системі координат (r, θ) . Можна, природно, повернутися назад до декартових координат, оскільки $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, але в цьому немає необхідності: течію можна досліджувати і в полярній системі координат – треба тільки

пам'ятати, що в полярній системі компоненти швидкості виражаються через потенціал за формулами

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (10.2)$$

Використовуючи останні вирази, отримаємо, що для даної течії $v_r = \frac{a}{r}$, $v_\theta = 0$. Таким чином, у кожній частинці рідини є тільки радіальна компонента швидкості, а колова компонента швидкості дорівнює нулю. В початку координат $v_r \rightarrow \infty$, а при $r \rightarrow \infty$ $v_r \rightarrow 0$. Таке враження, що у випадку коли $a > 0$, рідина витікає з початку координат, розтікається вздовж будь-яких радіусів-векторів і зникає в нескінченності; а коли $a < 0$, то рідина із нескінченності вздовж всіляких радіусів-векторів підтікає до початку координат і щезає в початку координат.

В тому, що рідина тече вздовж радіусів, нас також впевнює і те, що рівняння ліній струменю мають вигляд

$$\psi = a \theta = \text{const}, \text{ тобто } \theta = C, \quad (10.3)$$

де C – деяка константа. Останній вираз представляє собою рівняння всіляких променів, що виходять із початку координат, звідки, між іншим, впливає, що при $a > 0$ константа C може змінюватись у діапазоні від 0 до 2π . Отже, при $a > 0$ рідина витікає із початку координат, і така особлива точка (особлива тому, що, при підході до початку координат $v_r \rightarrow \infty$) називається джерелом, а якщо $a < 0$, то рідина підтікає до початку координат із нескінченності і тому така особлива точка називається стоком. Таким чином, джерело від стока фактично відрізняється тільки знаком числа a .

Знайдемо кількість рідини, що протікає через деяке коло радіуса r , що охоплює початок координат. Через дугу кола довжиною ds , що опирається на кут $d\theta$ ($ds = r d\theta$) із внутрішності кола назовні витікає елементарний об'єм рідини, що дорівнює

$$dQ = v_r ds = v_r r d\theta = \frac{a}{r} r d\theta = a d\theta,$$

тобто в кожному куті величиною $d\theta$ протікає однакова кількість рідини. Інтегруючи останній вираз по всій довжині дуги кола (тобто по куту θ від $\theta=0$ до $\theta=2\pi$), отримуємо

$$\int_0^{2\pi} dQ = Q = \int_0^{2\pi} a d\theta = 2\pi a, \text{ (звідки } a = \frac{Q}{2\pi} \text{)}. \quad (10.4)$$

Таким чином, через коло будь-якого радіусу r за одиницю часу протікає однакова кількість (однаковий об'єм) рідини, що не повинно дивувати, оскільки рідина вважається нестисливою. Ця рідина витікає із початку координат (джерело!) і величина Q називається витратою (видатком, або потужністю джерела.

У випадку, коли $a < 0$ ($Q < 0$) величина Q називається потужністю стока в початку координат. Також кажуть, що стік – це джерело від'ємної потужності.

Неважко також бачити, що і через будь-яку іншу замкнену криву, що охоплює початок координат, у випадку джерела протікає така ж сама кількість рідини Q .

У подальшому комплексний потенціал джерела(стока), зосередженого в початку координат ми будемо записувати у стандартному вигляді

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (10.5)$$

Якщо використовувати останній вираз для комплексного потенціалу, то для спряженої швидкості будемо мати вираз

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Підставивши в цю формулу $z = re^{i\theta}$, отримаємо

$$v_x - iv_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{Q}{2\pi r} (\cos\theta - i\sin\theta), \text{ тобто}$$

$$v_x = \frac{Q}{2\pi r} \cos\theta, \quad v_y = \frac{Q}{2\pi r} \sin\theta,$$

причому, $\frac{Q}{2\pi r} = v_r$.

Отже, у випадку джерела початок координат є логарифмічною особливістю для комплексного потенціалу $w(z)$ і простим полюсом (згідно з (10.4)) для спряженої швидкості.

Якщо джерело (стік) потужності Q розташоване не в початку координат, а в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то комплексний потенціал такої особливості запишуватиметься наступним чином:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

і

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r_0, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta_0,$$

де r_0 і θ_0 – модуль і аргумент комплексного числа $(z - z_0)$; якщо в точках z_1, z_2, \dots, z_n знаходяться джерела, чи стоки з потужностями Q_1, Q_2, \dots, Q_n , то комплексний потенціал сумарної течії від цієї системи особливостей запишеться у вигляді

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \ln(z - z_k),$$

тобто комплексні потенціали алгебраїчно підсумовуються, і відповідно до цього:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \ln r_k, \quad \psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \theta_k,$$

де r_k і θ_k – модулі і аргументи комплексних чисел $(z - z_k)$.

10.2. Вихорові точки. Виявляється, що, з логарифмічними особливостями зв'язана не тільки наявність у полі течій джерел чи стоків, але і наявність так званих зосереджених вихорових точок. Дійсно, давайте розглянемо комплексний потенціал у вигляді

$$w(z) = \frac{b}{2\pi i} \ln z, \tag{10.6,a}$$

де b – дійсне число (додатне чи від'ємне). Ця формула відрізняється від формули (10.5) тільки тим, що числовий коефіцієнт перед $\ln z$ являється чисто уявним. Відділимо у комплексному виразі (10.5) дійсну частину від уявної. Як і раніше, отримаємо

$$w(z) = \frac{b}{2\pi i} (\ln r + i\theta) = \frac{b}{2\pi} \theta - i \frac{b}{2\pi} \ln r ,$$

тобто

$$\varphi = \frac{b}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{b}{2\pi} \ln r.$$

Із останнього виразу отримаємо рівняння ліній струменю у вигляді

$$\psi = -\frac{b}{2\pi} \ln r = \text{const},$$

звідки видно, що лініями струменю являються кола $r=C$ довільного радіусу. Із виразу для функції φ отримаємо, що компоненти швидкості виражаються як:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{b}{2\pi r}, \quad (10,6,б)$$

Тобто, рідина виконує колові рухи навколо початку координат; якщо число $b > 0$, то $v_\theta > 0$ (тобто, рідина рухається проти годинникової стрілки), якщо ж $b < 0$, то $v_\theta < 0$ (тобто рух виконується по ходу годинникової стрілки).

Обчислимо циркуляцію вектора швидкості по колу довільного радіуса r . Оскільки у рідині є тільки одна колова складова, то циркуляція по колу буде дорівнювати

$$\Gamma = \oint v_\theta ds = \int_0^{2\pi} \frac{b}{2\pi r} r d\theta = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = b.$$

Таким чином, число b у формулі (10.6,б) представляє собою величину циркуляції швидкості вздовж кола, а значить, і вздовж довільного іншого контуру, що охоплює початок координат один раз! Якщо $b (= \Gamma) > 0$, то обертання рідини відбувається проти годинникової стрілки, а якщо $b (= \Gamma) < 0$, то за ходом цієї стрілки.

Як видно із (10.6.б), швидкість $v_\theta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, а при наближенні до початку координат швидкість обертання рідини зростає до нескінченності.

Така особлива точка в потоці рідини називається вихоровою (оскільки циркуляція по будь-якому контуру, що охоплює її, не дорівнює нулю а значить, за формулою Стокса, усередині області, що охоплюється вказаним контуром, є вихори). Але, згідно з початковими уявленнями, течія рідини вважається потенціальною (тобто, безвихоровою заздалегідь), тобто вважається, що у всіх регулярних точках області (тобто, в тих точках, де компоненти швидкості неперервні і скінченні, течія безвихорова). По ходу наближення до особливої точки компоненти швидкості зростають до нескінченності, і в початку координат швидкість дорівнює нескінченності. Іншими словами, вихор знаходиться лише в одній точці, і він у цій точці представляє собою так звану δ -функцію.

10.3. Функція $w(z) = \frac{1}{z}$ Цю функцію (диполь) ми вже розглядали в лекції №9. Розглянемо її більш детально. Маємо:

$$w(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2},$$

$$\text{Звідси отримуємо, що } \varphi = \frac{x}{x^2+y^2}, \psi = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Прирівнявши функцію $\psi=C$, отримаємо рівняння ліній струменю у вигляді

$$x^2 + (y + 1/2C)^2 = \frac{1}{(2C)^2}. \quad (10.7)$$

Вираз (7), як вже було сказано, представляє собою сімейство кіл, центри яких знаходяться на осі «у» в точках $(-\frac{1}{2C})$. Радіуси цих кіл дорівнюють $\frac{1}{2C}$ (при $C>0$), тобто всі кола сімейства дотичні до осі абсцис у початку координат з боку нижньої напівплощини (при $C>0$) (або з боку верхньої напівплощини, коли $C<0$).

Для спряженої швидкості маємо вираз

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}.$$

тобто в початку координат знаходиться полюс другого порядку для спряженої швидкості і полюс першого порядку для функції $w(z)$.

Розглядувана функція представляє собою окремий випадок так званого диполя.

10.4. Поняття диполя у загальному випадку. Диполь представляє собою граничну течію, котру утворюють сумісно джерело і сток (з інтенсивностями Q і $(-Q)$), коли вони зближаються нескінченно близько один до одного, причому, при їх зближенні величина Q певним чином зростає.

Отже, розглянемо систему джерела і стоку: нехай джерело інтенсивності Q знаходиться в точці z_0 , а стік інтенсивністю $(-Q)$ в точці $z_1 = z_0 + \Delta z_0$. В довільній точці області z вони сумісно створюють поле течії з комплексним потенціалом

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_1) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{z - z_1} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{z - z_0 - \Delta z_0}. \quad (10.8)$$

Позначимо комплексне число $\Delta z_0 = z_1 - z_0 = \delta s e^{i\alpha}$, де через δs позначено модуль числа Δz_0 , котрий у майбутньому граничному переході буде зменшуватись и прямувати до нуля. Через α позначимо кут вектора Δz_0 , (що з'єднує точки z_0 і z_1 і йде від джерела до стоку) з віссю абсцис. При майбутньому граничному переході цей кут буде вважатись сталим. Отже, якщо модуль величини $z - z_0$ достатньо великий, то ми можемо вираз під знаком логарифма у формулі (8) перетворити наступним чином:

$$\frac{z - z_0}{z - z_0 - \Delta z_0} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta z_0}{z - z_0}} = 1 + \frac{\Delta z_0}{z - z_0}, \quad (10.9)$$

(останній вираз у формулі (10.9) ми отримали, розвинувши у ряд Тейлора по малій величині $\varepsilon = \frac{\Delta z_0}{z - z_0}$, функцію $\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \varepsilon$.

Таким чином, маємо

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{\Delta z_0}{z - z_0} \right) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\Delta z_0}{z - z_0} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta s e^{i\alpha}}{z - z_0}$$

(останній вираз ми отримали, застосувавши перший член ряду $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon$).

Будемо тепер стік із точки z_1 наближати до точки z_0 (тобто, будемо виконувати граничний перехід $\delta s \rightarrow 0$), зберігаючи при цьому напрямок відрізка $z_1 - z_0$, себто, зберігаючи кут α , але при цьому одночасно будемо збільшувати величину Q так, щоб у граничному переході отримати

$$\lim(Q \delta s) = M,$$

де M – деяка скінченна величина. В результаті ми отримуємо нову особливу точку z_0 , котра створює течію рідини з комплексним потенціалом

$$w(z) = \frac{Me^{i\alpha}}{2\pi(z-z_0)}.$$

Ця особливість і називається диполем, розташованим у точці z_0 . Величина M називається моментом диполя, кут α визначає напрямок осі диполя. Якщо відраховувати напрямок осі диполя від стоку до джерела, тобто, замість кута α , взяти кут $\beta = \alpha + \pi$, то отримаємо комплексний потенціал у вигляді

$$w(z) = -\frac{Me^{i\beta}}{2\pi(z-z_0)}. \quad (\beta = \alpha + \pi) \quad (10.10)$$

В останньому вигляді потенціал диполя використовується найбільш часто.

○○○

ДЛ-№11.

Вихроджерела.

11.1. Вихроджерело. Розглянемо течію, що визначається комплексним потенціалом вигляду

$$w(z) = \frac{A}{2\pi} \ln z, \quad (\text{де } A=Q-i\Gamma). \quad (11.1)$$

Якщо A – дійсна величина, то, як ми вже знаємо, що в початку координат знаходиться джерело (чи стік, якщо $A < 0$), а якщо A – чисто уявна величина, то в початку координат знаходиться вихор. У загальному випадку, коли величина A – комплексна, то в початку координат одночасно знаходяться і джерело, і вихор, які одночасно розташовані в одній точці. Така точка називається вихроджерелом; цю течію можна трактувати, як механічну накладку двох течій: течії від джерела і течії від вихору, котрі знаходяться геометрично в одній і тій же точці $z = 0$. Знайдемо потенціал і функцію струменя ψ для вихроджерела. Маємо:

$$w(z) = \frac{Q-i\Gamma}{2\pi} \ln(r + i\theta) = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r + \Gamma \theta) + i \frac{1}{2\pi} (Q\theta - \Gamma \ln r),$$

звідки

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r + \Gamma \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (Q\theta - \Gamma \ln r).$$

Лініями струменю будуть служити криві $\psi = C$, що зводяться до рівнянь

$$\frac{Q}{\Gamma} \theta - \ln r = -\ln C_1,$$

де ми довільну сталу взяли у вигляді $(-\ln C_1)$. Звідси видно, що лінії струменю приймають форму

$$r = C_1 e^{\frac{Q\theta}{\Gamma}}.$$

Отримане сімейство кривих представляє собою сукупність логарифмічних спіралей.

11.2.Зв'язок джерел та вихорів у гідродинаміці з теорією лишків в теорії функцій комплексної змінної. Як добре відомо із теорії аналітичних функцій комплексного змінного, структура аналітичної функції цілком визначається розподілом її особливих точок у площині z та характером їх сингулярностей. Відома також теорема Коші, згідно з якою, якщо в області задано деяку аналітичну функцію $f(z)$ з певною кількістю особливих точок, то інтеграл від цієї функції по

деякому замкнутому контуру дорівнює $2\pi i \sum A_k$, где $\sum A_k$ – сума лишків цієї функції відносно всіх особливих точок, котрі попали усередину даного контуру.

Розглянемо тепер похідну функцію від комплексного потенціалу течії рідини у деякій області, тобто функцію $f(z) = \frac{dw}{dz}$. Комплексний потенціал в області може бути і, як за правило, буває багатозначною функцією (як, наприклад, потенціал джерела і вихора), і до багатозначних функцій вищенаведена теорема Коші безпосередньо непридатна. Але похідна від комплексного потенціалу $\frac{dw}{dz}$, за своїм фізичним смислом (як спряжена швидкість) завжди є однозначною аналітичною функцією, до якої завжди можна застосовувати вказану теорему Коші. Покажемо, що між джерелами, вихорами і лишками аналітичної функції $\frac{dw}{dz}$ існує певний взаємозв'язок.

Отже, візьмемо деякий замкнутий контур L і розглянемо криволінійний інтеграл по цьому контуру:

$$\oint \frac{dw}{dz} dz.$$

Розділимо цей інтеграл на дійсну і на уявну складову. Матимемо:

$$\frac{dw}{dz} dz = (v_x - iv_y)(dx + idy) = (v_x dx + v_y dy) + i(v_x dy - v_y dx).$$

Отже

$$\oint \frac{dw}{dz} dz = \oint ((v_x dx + v_y dy) + i(v_x dy - v_y dx)). \quad (11.2)$$

Дійсна частина інтеграла (11.2) представляє собою циркуляцію вектора швидкості, а уявна частина, тобто інтеграл :

$$\oint v_x dy - v_y dx, \quad (11.3)$$

дає кількість рідини, що витікає через контур L із внутрішньої частини, охопленої контуром, назовні за одиницю часу. Позначимо цю кількість рідини через Q . Отже, згідно з теоремою Коші, маємо рівність:

$$\oint \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + iQ = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} A_k . \quad (11.4)$$

Тепер нагадаємо, що таке лишок аналітичної функції в деякій особливій точці. Як відомо, всяка однозначна аналітична функція $f(z)$ (в тому числі і $\frac{dw}{dz}$) в деякій кільцевій області коло особливої точки (тобто полюса довільного порядку) розкладається в ряд Лорана. Хай конкретна особлива точка має координату z_k . Тоді ряд Лорана в околі цієї точки матиме вигляд :

$$f(z) = \dots \frac{C_{-n}}{(z-z_k)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-z_k)} + C_0 + C_1(z-z_k) + C_2(z-z_k)^2 + \dots (11.5)$$

де числові коефіцієнти $C_{-n}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \dots$ залежать також від того, до якої особливої точки вони відносяться, тобто вони залежать від номера k .

Теорема Коші у початковому своєму варіанті стверджує, що інтеграл по контуру L дорівнює сумі інтегралів по всіх контурах L_k , кожний із яких охоплює одну особливу точку. Але при інтегруванні по контуру L_k ми можемо цей контур вибрати в тій кільцевій області, де справедливим є ряд Лорана (11.5). При інтегруванні ряду (11.5) почленно по контуру L_k в нуль обернуться інтеграли від усіх членів ряду, за винятком члена з номером (-1) , тобто ненульовим виявиться тільки інтеграл:

$$\oint \frac{C_{-1}}{(z-z_k)} dz = C_{-1} \oint \frac{dz}{(z-z_k)} = C_{-1} \ln(z-z_k)|_{L_k} = 2\pi i C_{-1} . \quad (11.6)$$

Число C_{-1} і називається лишком функції $f(z)$ в особливій точці z_k . Для подальшого позначимо це число, що відповідає певній особливій точці z_k , через A_k . А тепер проведемо ці ж самі міркування, вважаючи, що за функцію $f(z)$ взято аналітичну функцію $\frac{dw}{dz}$. Подивимось, що представляє собою член $\frac{C_{-1}}{(z-z_k)}$ в ряді Лорана для функції $\frac{dw}{dz}$. Оскільки число A_k взагалі може бути комплексним, то ми кожне таке число можемо представити у вигляді

$$A_k = \frac{1}{2\pi} (Q_k - i\Gamma_k),$$

а це значить, що член $\frac{c_{-1}}{(z-z_k)}$ у ряді Лорана для функції $\frac{dw}{dz}$ представляє собою вираз

$$\frac{1}{2\pi} (Q_k - i\Gamma_k) \frac{1}{(z-z_k)} = \frac{Q_k}{2\pi} \frac{1}{(z-z_k)} - \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{(z-z_k)},$$

звідки видно, що з точки зору гідромеханіки, ми маємо тут справу з вихороджерелом, розташованим у точці z_k .

Таким чином, теорема про лишки стверджує (див. формулу (11.4)), що

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} A_k = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(Q_k - i\Gamma_k)}{2\pi},$$

тобто

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{k=n} Q_k.$$

Іншими словами: циркуляція вектора швидкості по будь-якому контуру L дорівнює алгебраїчній сумі циркуляцій всіх вихорів, що знаходяться усередині контуру; і точно так же витрата рідини через контур L дорівнює алгебраїчній сумі інтенсивностей (потужностей) всіх джерел і стоків, розташованих усередині контуру L .

Плоска задача про рух тіла в ідеальній рідині та про обтікання тіла рідиною.

Попередні зауваження. Спочатку ми будемо розглядати рух окремого твердого тіла у безмежному у всіх напрямках об'ємі, зайнятому нестисливою рідиною, котра на нескінченності знаходиться у стані спокою. Припущення про те, що тіло одиночне, значить, що ми нехтуємо (не враховуємо) впливом на розглядуване тіло інших тіл, що можуть оточувати виділене.

Рухоме тіло визиває рух частинок рідини(газу), що оточують безпосередньо тіло, і взаємодіють з ним. Ми, як за правило, будемо мати справу з двома постановками задачі:

а) перша. Закон руху тіла наперед задано; і треба визначити той стан руху рідини, котрий визиває рухоме тіло у рідині, що його оточує і, як правило, визначити також сили взаємодії між рідиною та рухомим тілом.

б) друга. Наперед задано зовнішні сили, прикладені до тіла, і потрібно визначити, як буде рухатись тіло, а також, як буде рухатись рідина, що оточує тіло.

Форма поверхні тіла вважається відомою і при тій, і при іншій постановці задачі. В процесі руху тіла форма його поверхні вважається незмінною, тобто тіло вважається абсолютно жорстким і під дією зовнішніх сил не деформівним.

В цьому курсі ми в основному будемо займатися питаннями постановок задач гідродинаміки (тобто побудовами математичних моделей), а не розробкою методів їх розв'язання. Тому будемо розглядати найпростіші випадки руху тіл – прямолінійний і рівномірний рух. Створюваний таким рухом тіла рух самої рідини буде, очевидно, усталеним, якщо його розглядати відносно системи координат, що рухається разом з тілом. У цьому випадку для розрахунку течії рідини ми можемо скористатись принципом відносності Галілея й прийняти за умовно нерухомі осі, зв'язані з рухомим тілом і тоді ми прийдемо до оберненої задачі: тіло знаходиться у стані спокою, а на нього набігає безграничний потік рідини, причому нескінченно віддалені частинки рідини мають всюди однакові по величині і напрямку швидкості.

При розгляді плоских задач для нестисливої рідини ми перш за все будемо звертати увагу на побудову кінематичної картини течії при обтіканні нерухомого тіла.

Граничні умови. Задача Дирихле і задача Неймана.

Ми в даний момент часу займаємось плоскими безвихровими задачами для нестисливої рідини, і для таких течій завжди існує комплексний потенціал

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

тобто, визначення поля течії фактично зводиться або до пошуку функції $\varphi(x, y)$, або до пошуку функції $\psi(x, y)$ (так як одна із цих функцій може бути визначена через відому іншу згідно з умовами Коші-Рімана). Але часто, виявляється, що знайти безпосередньо комплексний потенціал $w(z)$ буває навіть більш просто, ніж знайти окремо $\varphi(x, y)$ чи $\psi(x, y)$. Покажемо, до яких математичних задач зводиться задача визначення функцій $\varphi(x, y)$ (або $\psi(x, y)$) у випадку, коли тіло рухається у рідині, котра знаходиться у стані спокою на нескінченності.

Ми знаємо, що і функція $\varphi(x, y)$, і функція $\psi(x, y)$ обидві являються гармонічними, тобто задовольняють рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\psi = 0;$$

у плоскому випадку тіло проявляє себе лише своїм контуром C , тому можна говорити про рух жорсткого (недеформівного) контуру в рідині, що знаходиться у стані спокою на нескінченності (рис.3.5).

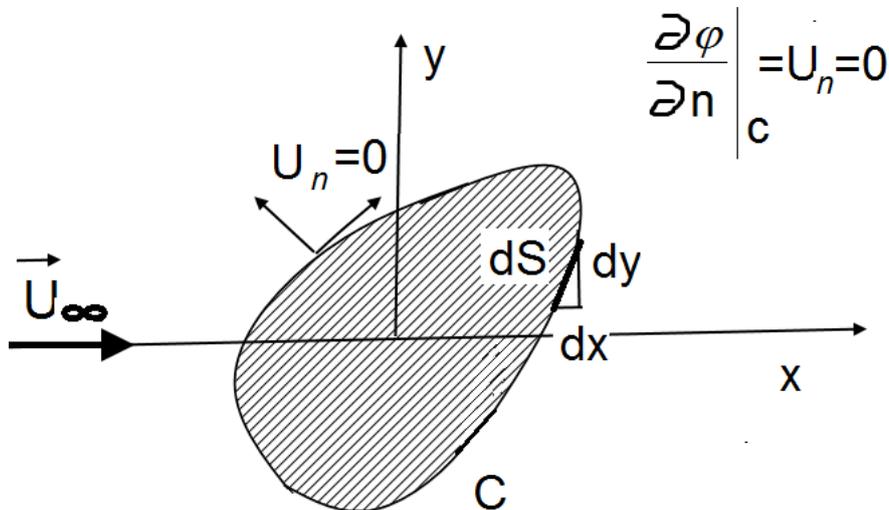


Рис. 3.5. До постановки задачі про обтікання рідиною жорсткого контуру

а). Умови на нескінченності. Якщо рідина на нескінченності знаходиться у стані спокою, то рух деякого контуру із фізичних міркувань не може визвати зміну цього стану в нескінченності. А це значить, що компоненти швидкості на нескінченності так і залишаться нульовими, тобто на нескінченності будемо мати умови:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

б) Умови на поверхні тіла. За умовами непроникання рідини через жорсткий контур нормальна компонента швидкості рідини v_n має співпадати с нормальною компонентою швидкості руху самого контуру u_n , тобто, в кожній точці контуру має виконуватись умова

$$v_n = u_n.$$

Якщо задано форму (профіль) рухомого контуру і задано швидкість його руху, то функція u_n в кожній точці контуру відома. Але нормальна компонента швидкості рідини v_n – це $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Отже, якщо ставити задачу в термінах функції φ , то ми маємо вирішувати рівняння Лапласа $\Delta \varphi = 0$ і задовольняти граничній умові на границі рухомого тіла у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n$$

(плюс природні нульові умови в нескінченності). Задача визначення гармонічної функції (тобто функції, що задовольняє рівнянню Лапласа) в деякій області по заданій нормальній похідній цієї функції на межі цієї області називається задачею Неймана.

Функцію u_n , задану на поверхні контуру для плоскої задачі, можна представляти як функцію довжини дуги контуру s , розрахованої від довільної початкової точки, тобто

$$u_n = f(s).$$

Із умови Коші-Рімана неважко тоді буде отримати, що в кожній точці контуру буде виконуватись умова

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

(якщо обхід контуру робити проти ходу годинникової стрілки). Беручи до уваги попередні результати, заключаємо, що на контурі тіла виконується умова

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = f(s),$$

котру можна проінтегрувати вздовж контуру тіла (від умовної початкової точки) і отримати значення функції струменю $\psi(s)$ в точках контуру:

$$\psi(s) = \int_0^s f(s) ds + C.$$

(з точністю до довільної сталої C , котра звичайно несуттєва).

Таким чином, якщо за основу пошуку взяти функцію ψ , то наша математична задача буде полягати у розв'язанні рівняння Лапласа для функції ψ по граничному значенню функції ψ на рухомому контурі (і по природним граничним умовам на нескінченності). Задача визначення гармонічної функції в певній області по заданному значенню цієї функції на границі області називається задачею Діріхле.

Таким чином, у гідродинамічних застосуваннях при розв'язанні задач про рух контуру в нестисливій рідині ми стикаємось з необхідністю розв'язувати або задачу Неймана для функції φ , або задачу Діріхле для функції ψ . Як видно із приведених міркувань, ці задачі еквівалентні.

○○○

ДЛ–№12.

Постановка оберненої задачі про обтікання тіла потоком, швидкість якого на нескінченності задано.

Припустимо, що ми розглядаємо обернену задачу, тобто: тіло (чи профіль тіла) знаходиться у нерухомому стані (як в аеродинамічній трубці, чи в гідравлічному лотку), а на нього набігає потік газу чи рідини, швидкість якого в далічині від тіла (тобто на нескінченності) стала як по величині так і за напрямком. Іноді говорять, що розглядається задача в лабораторній системі відліку. Власне, при дослідженні в аеродинамічній трубці ми маємо як правило, нерухоме

тіло, на яке набігає потік повітря, що витікає із дюзи аеродинамічної труби.

Зв'яжемо з нерухомим тілом нерухому систему координат (див. рис.3.5) з Попередньої лекції). Контур тіла C в розглядуваній системі координат є нерухомим, тому в нерухомій лабораторній системі координат на поверхні будь-якого контуру маємо $u_n = 0$, і, значить, гранична умова непроникання на контурі C запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C = u_n = 0. \quad (12.1)$$

Якщо цю граничну умову записати через функцію струменю, то отримаємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_C = 0,$$

звідки випливає, що на контурі

$$\psi(s) = C = const, \quad (12.2)$$

але останній вираз значить, що контур нерухомого тіла при обтіканні його потоком є лінією струменю.

Ми завжди можемо так вибрати систему координат, щоб ось Ox за напрямком співпадала з вектором швидкості набіжного потоку на нескінченності U_∞ , тобто, завжди можна так улаштувати, щоб у нескінченно віддалених точках було

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty.$$

При цьому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty,$$

звідки випливає, що, в нескінченності

$$\psi = U_\infty y + const. \quad (12.3)$$

Розглядаючи комплексний потенціал $w = \varphi + i\psi$, можна вважати, що в нескінченності завжди виконується умова

$$\frac{dw}{dz} = v_x = U_\infty. \quad (12.4)$$

Розв'язання задачі про обтікання потоком колового циліндра.

Займемось розв'язанням найбільш простої задачі: обтікання контуру у вигляді кола, тобто циліндра з поперечним перетином у вигляді кола. Таким чином, нехай задано контур тіла (тобто, коло) радіуса R . Виберемо початок координат у центрі кола; ось Ox , як домовлялись, направимо вздовж вектра швидкості набіжного потоку U_∞ . Потік нехай тече із $(-\infty)$ вздовж осі ox і обтікає розташований контур так, як ніби вітер обтікає довгу циліндричну трубу, розташовану поперек потоку.

Течії рідини, що виникає при обтіканні нею заданого контуру, відповідає певна аналітична функція $w(z)$, визначена в нескінченній області навкруги кола радіуса R . Як ми вже неодноразово згадували, функція $w(z)$ в розглядуваній області може бути неоднозначною, тому почнемо з розгляду функції $\frac{dw}{dz}$, котра із фізичних міркувань завжди є однозначною функцією в будь-якій області течії.

У кільцевій області зовні круга радіуса R (і усередині круга радіуса R_∞ , де R_∞ – будь-яка завгодно велика величина, котра може прямувати до нескінченності) однозначна аналітична функція $\frac{dw}{dz}$, (як і довільна інша однозначна аналітична функція) розкладається у ряд Лорана вигляду

$$\frac{dw}{dz} = \dots + \frac{C_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-1}}{z} + C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots \quad (12.5)$$

Оскільки на нескінченності $z = \infty$ у нашому випадку спряжена швидкість скінченна, то у виразі (12.5) члени з додатними степенями z мають бути відсутні, тобто мають виконуватись умови $C_1 = C_2 = \dots = 0$. Отже, в нашому разі – ряд Лорана для $\frac{dw}{dz}$ повинен мати вигляд

$$\frac{dw}{dz} = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots \quad (12.6)$$

В точці $z = \infty$ із (12.6) маємо, що $\frac{dw}{dz} = C_0$, а із (4), що: $\frac{dw}{dz} = U_\infty$, так що ми знайшли одну константу ряду Лорана $C_0 = U_\infty$. Залишається тепер підібрати комплексні константи $C_{-1}, C_{-2} \dots$ так, щоб задовольнити граничним умовам на всій поверхні кола (тобто на всьому контурі).

Проінтегруємо вираз (12.6) з метою отримати явний вираз функції $w(z)$; с точністю до несуттєвої сталої отримуємо:

$$w(z) = U_\infty z + C_{-1} \ln z - \frac{C_{-2}}{z} - \frac{C_{-3}}{2z^2} - \dots \quad (12.7)$$

Попутно зауважимо, що отриманий вираз для комплексного потенціалу за рахунок наявності в ньому доданку $C_{-1} \ln z$ є багатозначною функцією.

Для визначення коефіцієнтів $C_{-1}, C_{-2} \dots$ відокремимо у виразі (12.7) на контурі тіла уявну частину від дійсної, для чого скористаємось відомою граничною умовою на контурі.

Введемо на площині XOY полярні координати (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r e^{i\theta},$$

і нехай числа $C_{-k} = A_k + iB_k$.

Підставивши у вираз (12.7) прийняті представлення для змінної комплексної величини z і констант C_{-k} , отримуємо:

$$\varphi = U_\infty r \cos \theta + A_1 \ln r - B_1 \theta - \frac{A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta}{r} - \frac{A_3 \cos 2\theta + B_3 \sin 2\theta}{2r^2} - \dots \quad (12.8)$$

і

$$\psi = U_\infty r \sin \theta + A_1 \theta + B_1 \ln r - \frac{B_2 \cos \theta - A_2 \sin \theta}{r} - \frac{B_3 \cos 2\theta - A_3 \sin 2\theta}{2r^2} - \dots \quad (12.9)$$

Прийнявши у останній формулі $r=R$ (тобто, обчислюючи функцію ψ на обтічному контурі C), отримуємо вираз

$$\psi|_C = B_1 \ln R + A_1 \theta + \left(U_\infty R + \frac{A_2}{R} \right) \sin \theta - \frac{B_2}{R} \cos \theta + \frac{A_3}{2R^2} \sin 2\theta - \frac{B_3}{2R^2} \cos 2\theta + \dots \quad (12.10)$$

Згідно з умовою (12.2), цей вираз при довільному θ має тотожно дорівнювати деякій константі, звідки заключаємо, що, якщо прийняти $A_1 = B_2 = A_3 = B_3 = 0 \dots$ і вибрати

$$A_2 = -R^2 U_\infty, \quad (12.11)$$

то гранична умова (12.2) буде тотожно виконуватись. Підводячи підсумок нашим перетворенням і міркуванням, отримуємо, що комплексний потенціал обтікання циліндра (круга) радіуса R потоком, швидкість якого в нескінченності дорівнює U_∞ , представляється формулою

$$w(z) = U_\infty z + iB_1 \ln z + \frac{R^2 U_\infty}{z}, \quad (12.12)$$

або, положивши $B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}$, – формулою

$$w(z) = U_\infty z + \frac{R^2 U_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (12.13)$$

Якщо потік на нескінченності тече під деяким кутом α до осі абсцис (такий кут називають кутом атаки), то замість виразу (12.13) для комплексного потенціалу отримаємо наступний вираз (з точністю до деякої сталої):

$$w(z) = (U_\infty - iV_\infty)z + \frac{R^2(U_\infty + iV_\infty)}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (12.14)$$

Якщо внести позначення $v_\infty = U_\infty + iV_\infty$, тоді $U_\infty - iV_\infty = \bar{v}_\infty$, і вираз (12.14) запишеться у вигляді

$$w(z) = \bar{v}_\infty z + \frac{R^2 v_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (12.15)$$

Звертаємо увагу на те, що комплексний потенціал обтікання кола (синоніми: циліндра, круга, колового контуру) складається із трьох доданків, кожен із яких має самостійний сенс:

1. $w_1(z) = \bar{v}_\infty z$ – це потенціал незбуреного (набіжного) рівномірного потоку з заданою на нескінченності швидкістю потоку з компонентами U_∞ і V_∞ .

2. $w_2(z) = \frac{R^2 v_\infty}{z}$ – це комплексний потенціал диполя, розташованого в початку координат.

3. $w_3(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ – це комплексний потенціал вихору, розташованого в початку координат з довільною циркуляцією, котра в рамках моделі ідеальної рідини виявляється невизначеною.

Таким чином присутність у рівномірному потоці циліндричного тіла у гідродинамічному сенсі проявляє себе як присутність диполя в початку координат з певним моментом та деякого вихора, розташованого також у початку координат з однозначно невизначеною(довільною) циркуляцією.

Дослідження безциркуляційного обтікання циліндра поступальним потоком.

Якщо припустити, що $\Gamma = 0$, то отримаємо обтікання циліндра, котре називається безциркуляційним. Ця течія при додатковому припущенні, що на нескінченності швидкість U_∞ направлена вздовж осі абсцис), має комплексний потенціал:

$$w(z) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (12.16)$$

Дослідимо більш детально цю течію.

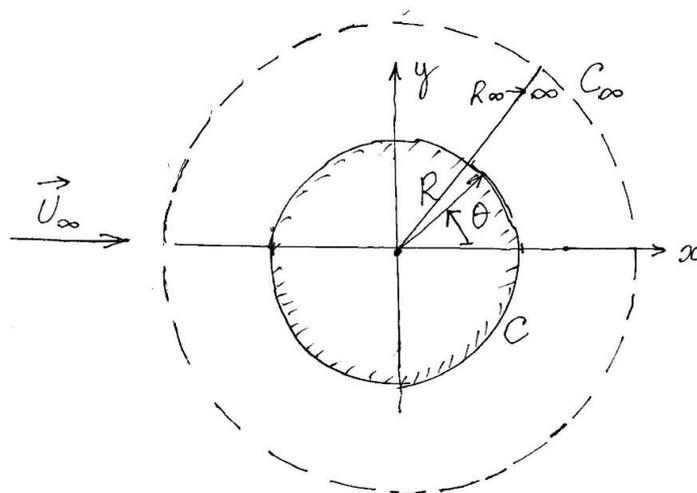


Рис.3.6. До постановки задачі про обтікання колового циліндра

Знайдемо її лінії струменю і компоненти швидкостей в околі циліндра. Підставляючи в вираз (12.16) $z=re^{i\theta}$ і відділяючи дійсну частину від уявної, знайдемо

$$\varphi = U_{\infty} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos\theta = U_{\infty} x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2} \right), \quad (12.17)$$

$$\psi = U_{\infty} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin\theta = U_{\infty} y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2} \right). \quad (12.18)$$

(Ми вирази для функцій φ і ψ подаємо і в полярній, і в декартовій системі координат). Із останнього виразу видно, що лініями струменю являються криві з рівняннями

$$y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2} \right) = \text{const}. \quad (12.19)$$

А із (12.19) витікає, що лінії струменю симетричні відносно осі OY (наявність x^2 у виразі (12.19)!) і антисиметричні відносно осі OX .

Звертаю увагу на те, що формули (12.17) і (12.18) справедливі також і усередині кола радіуса R . Дійсно, вираз (12.16) зображає течію і усередині кола, але в результаті взаємодії диполя, що знаходиться в початку координат з поступальним потоком утворюється замкнута лінія струменю у вигляді кола радіуса R , котру ми і можемо інтерпретувати як тверду непрониклу поверхню циліндра.

Якщо прийmemo, що константа в (12.19) дорівнює нулю, то отримаємо рівняння нульової лінії струменю:

$$y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Звідки видно, що нульова лінія струменю складається із двох ліній: із прямої лінії $y=0$ (ось абсцис) і кола $x^2 + y^2 = R^2$, котре і є контуром тіла, як це має бути за фізичним смислом.

Компоненти швидкості в полі течії знайдемо за допомогою диференціювання виразу (12.17). В полярних координатах отримуємо

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta, v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_\infty \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \sin \theta. \quad (12.20)$$

Із виразу (12.20) для v_r витікає, що на колі $r=R$ радіальна компонента швидкості $v_r = 0$, як і має бути в силу умови непроникання твердого контуру; підставляючи у вираз для v_θ $r=R$, знайдемо розподіл кругової компоненти швидкості вздовж поверхні циліндра:

$$v_\theta = -2U_\infty \sin \theta. \quad (12.21)$$

Із (12.21) видно, що кругова компонента швидкості перетворюється в нуль на поверхні кола в двох точках: $\theta = 0$ (задня точка гальмування потоку, точка В) і $\theta = \pi$ (передня точка гальмування потоку, точка А). Максимального значення $2U_\infty$ за величиною колова швидкість набуває в точках з координатами $\theta = \frac{\pi}{2}$ (точка D) і $\theta = 3\frac{\pi}{2}$ (точка E) рис.3.7.

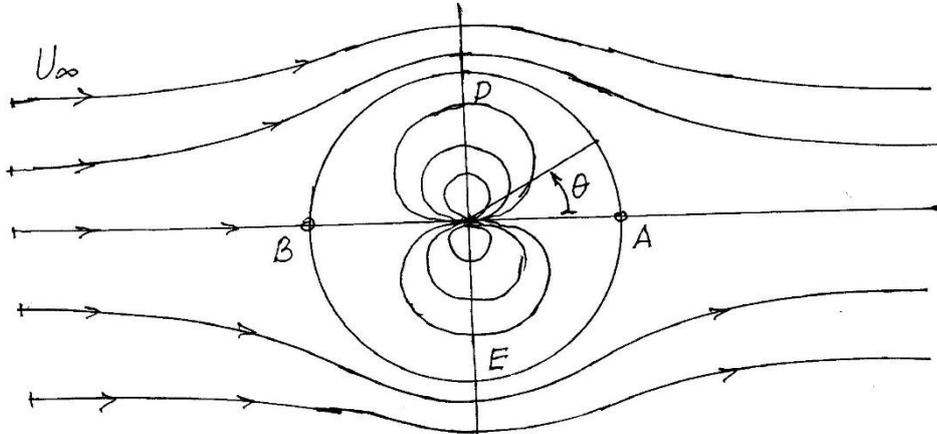


Рис. 3.7. Лінії струменю при бесциркуляційному обтіканні кола (циліндра)

○○○

ДЛ-№13

Розподіл тиску по поверхні циліндра.

Визначимо, як розподіляється по поверхні циліндра тиск. Як ми вже знаємо, при стаціонарному русі рідини має місце рівняння

Бернуллі вздовж кожної лінії струменю і, зокрема, вздовж колового контуру тіла, який також є однією із ліній струменю. Якщо не враховувати вплив сили тяжіння, то рівняння Бернуллі має вигляд:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (13.1)$$

Розглянемо нульову лінію струменю, що приходить із $(-\infty)$ по від'ємній півосі ox на поверхню тіла в точку A ($\theta = \pi$) і подальше роздвоюється та йде далі по верхній та нижній частинах поверхні кола. Застосувавши інтеграл Бернуллі для нескінченно віддаленої точки (де швидкість дорівнює U_∞ і тиск, нехай буде дорівнювати p_∞), для довільної точки на поверхні тіла матимемо

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2}.$$

На поверхні кола $v^2 = v_\theta^2$ (оскільки $v_r = 0$), і, підставивши в рівняння Бернуллі для v_θ вираз $v_\theta = -2U_\infty \sin\theta$, отримаємо таку формулу для розподілу надлишкового тиску по поверхні кола (порівняно зі статичним тиском)

$$p - p_\infty = \rho \frac{U_\infty^2}{2} (1 - 4\sin^2\theta). \quad (13.2)$$

Вираз (13.2) представляє собою закон розподілу надлишкового тиску по поверхні кола, що обтікається потоком ідеальної рідини. В аерогідромеханіці звичайно користуються безрозмірною величиною надлишкового тиску (коефіцієнтом надлишкового тиску) у вигляді:

$$\bar{p} = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho U_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta. \quad (13.3)$$

(В англійській науковій літературі замість \bar{p} використовується позначення C_p).

Формула (13.3) зручна тим, що в безрозмірному вигляді вона однаково придатна для будь-яких циліндрів (довільного радіуса) при будь-яких густинах газу чи рідини, будь-яких швидкостях набіжного потоку та будь-яких значеннях p_∞ .

Із (13.3) видно, що максимальний коефіцієнт надлишкового тиску дорівнює $\bar{p}_{max} = 1$, і це значення досягається в двох точках гальмування потоку : точці В ($\theta = 0$) і точці А ($\theta = \pi$). В точках поперечного діаметра С ($\theta = \frac{\pi}{2}$) і D ($\theta = 3\frac{\pi}{2}$) коефіцієнт $\bar{p} = -3$, тобто, в цих точках досягається максимальне розрідження потоку $p < p_{\infty}$. На поверхні циліндра є і такі точки, в яких тиск дорівнює тиску в набіжному потоці p_{∞} ; в таких точках $\bar{p} = 0$. Прирівнюючи правую частину виразу (13.3) до нуля, отримуємо рівняння для визначення місцезнаходження таких точок на циліндрі:

$$1 - 4\sin^2\theta = 0 \quad .(13.4)$$

Розв'язавши це тригонометричне рівняння, знаходимо кутові координати цих точок: їх чотири на поверхні циліндра, їх кутові координати наступні:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad \theta_3 = -\frac{5\pi}{6}, \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{6}.$$

Якщо місцевий надлишковий тиск (або місцевий безрозмірний коефіцієнт надлишкового тиску) відкласти по нормалі від поверхні тіла, тобто від поверхні кола (додатні значення всередину кола, від'ємні значення – на зовні) то отримаємо графічне зображення розподілу тиску по колу, котре називається епюрою розподілу тиску (див. графік рис.3.8)).

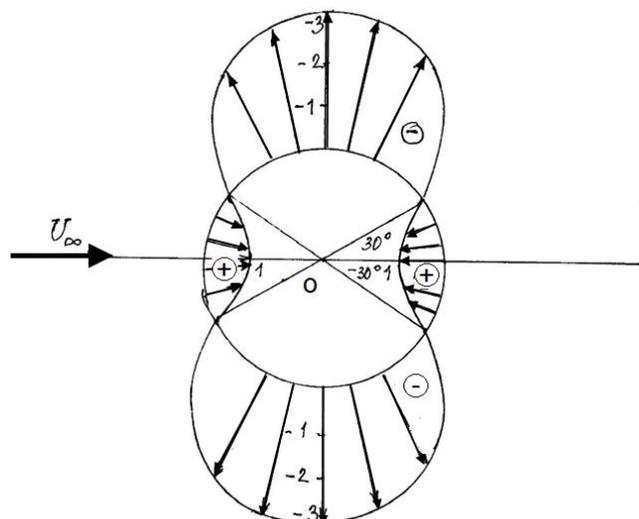


Рис. 3.8. Епюра розподілу тиску по поверхні циліндра при бесциркуляційному обтіканні кола (циліндра)

До речі, із симетрії цієї епюри відносно осі OX і відносно осі OY , постає, що проєкції сумарної гідродинамічної сили, що могли б діяти на тіло, у даному випадку обидві дорівнюють нулю. що, взагалі кажучи, суперечить спостереженням, у зв'язку з чим це протиріччя у науці називається парадоксом Даламбера.

Зауважимо, що в чисто циркуляційному потоці

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z},$$

і ми маємо таке поле швидкостей

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (13.5)$$

Тобто, на поверхні циліндра швидкість скрізь однакова, і, значить, однаковим буде і тиск, так що чисто циркуляційний рух рідини також не може привести до виникнення ніякої результуючої сили.

Циркуляційне обтікання циліндра.

Тепер розглянемо випадок, коли на потік, що обтікає коло, накладається чисто циркуляційний потік з деякою циркуляцією. В результаті такого накладання поле течії (поле швидкостей) втрачає симетрію по відношенню до осі ox . Розглянемо більш детально, що відбувається у подібному випадку.

Отже, якщо ми маємо обтікання циліндра з накладанням циркуляційного потоку рідини, то ми маємо справу з комплексним потенціалом у вигляді

$$w(z) = U_\infty z + \frac{R^2 U_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (13.6)$$

Щоб дослідити картину течії, що визначається комплексним потенціалом (13.6), спочатку визначимо ті точки в потоці, в яких швидкість перетворюється в нуль. Точки, в яких обидві компоненти швидкості (тобто модуль швидкості) перетворюються в нуль, у гідродинаміці називаються або критичними, або точками гальмування потоку.

Обчислимо із (13.6) похідну $\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y$:

$$\frac{dw}{dz} = U_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (13.7)$$

Прирівнюючи функцію $\frac{dw}{dz}$ до нуля, отримуємо (після незначних перетворень) квадратне рівняння відносно z для визначення місця розташування критичних точок:

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi U_{\infty}} z - R^2 = 0, \quad (13.8)$$

Це рівняння має два комплексних кореня:

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi U_{\infty}} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi U_{\infty}}\right)^2 + R^2}. \quad (13.9)$$

Підкорінний вираз у цій формулі, в залежності від величини циркуляції (при фіксованих R і U_{∞}) може бути: додатним, від'ємним, або дорівнювати нулю. Розглянемо всі ці випадки окремо. Коли циркуляція достатньо мала, підкорінний вираз є додатним. У цьому випадку існують два комплексних кореня

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi U_{\infty}}\right)^2 + R^2} + \frac{i\Gamma}{4\pi U_{\infty}} = \pm a + ib, \quad (a > 0). \quad (13.10)$$

Для простоти будемо вважати, що $\Gamma > 0$, тоді і $b > 0$. Звертаємо увагу на те, що у обох коренів z_1 і z_2 уявні частини однакові, а дійсні частини відрізняються знаками. Щоб зрозуміти, де розташовані точки z_1 і z_2 , знайдемо квадрати їх модулів. Як видно,

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = a^2 + b^2 = \left(R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi U_{\infty}} \right)^2 \right) + \left(\frac{\Gamma}{4\pi U_{\infty}} \right)^2 = R^2,$$

тобто обидві критичні точки знаходяться на поверхні кола, що обтікається. При $\Gamma = 0$ (випадок бесциркуляційного обтікання) із формули (13.10) виходить, що $z_1 = R$ (задня точка гальмування потоку, $\theta = 0$) і $z_2 = -R$ (передня точка гальмування потоку, $\theta = \pi$). При збільшенні циркуляції ($\Gamma > 0$) критичні точки, залишаючись на

колі, починають, в міру зростання Γ , підніматись, наближаючись до точки C ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

В точці C обидва кореня z_1 і z_2 , зливаються ($a \rightarrow 0, b \rightarrow R$). Це злиття відбувається при тому значенні циркуляції, при якому підкорінний вираз у формулі (13.9) перетворюється в нуль, тобто при

$$\Gamma = 4\pi U_\infty R. \quad (13.11)$$

При подальшому збільшенні циркуляції вище значення (13.11), підкорінний вираз у формулі (13.9) стає від'ємним, і формули (13.10) тепер доцільно записати у вигляді

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi U_\infty} \pm i \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty}\right)^2 - R^2} = i \left[\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty}\right)^2 - R^2} \right]. \quad (13.12)$$

Як бачимо, у цьому випадку обидва кореня z_1 і z_2 стають уявними (обидва тепер розташовуються на додатній півосі y), причому корінь z_1 (той, що відповідає знаку $(+)$ перед коренем квадратним у формулі (13.10)) залишає поверхню кола і по осі ординат віддаляється в поле течії; другий корінь z_2 (що відповідає знаку $(-)$ в тій же формулі (13.10), також покидає поверхню круга і заходить усередину кола по осі ординат.

Поведінка ліній струменю в аналітичній формі у даному випадку більш складна, ніж у безциркуляційному випадку, однак ці лінії можна розрахувати чисельно із розв'язку дифференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{v_x(x,y)} = \frac{dy}{v_y(x,y)}, \quad (13.13)$$

де компоненти швидкості знаходяться із виразу (13.7) для $\frac{dw}{dz}$.

Якісно лінії струменю для вказаних випадків величини циркуляції добре зображені в класичному підручнику: Кочин, Кибель, Розе, – Теоретическая гидромеханика, часть первая, 1955 г. рис. 92, 93, 94.(стр. 249) .

Обчислення компонентів сумарних сил, що діють на контур. Як вже неодноразово говорилося, будемо розраховувати сили, що діють на елемент трубопроводу одиничної довжини (обечайку), умовно

вирізаний із нескінченного трубопроводу. В ідеальному середовищі сумарна сила створюється лише за рахунок дії сил тиску на елементи поверхні тіла, причому тиск завжди діє тільки по внутрішній нормалі до елементів поверхні. У плоских задачах вектор сумарної сили \vec{P} , має тільки дві компоненти: X і Y , що визначаються через тиск формулами

$$\vec{P} = - \oint p \vec{n} ds, \quad (13.14)$$

де криволінійний інтеграл обчислюється по обтічному контуру; \vec{n} – зовнішня одинична нормаль до контуру; ds – елемент довжини дуги контуру.

Якщо ми розглядаємо контур у вигляді кола, то в кожній його точці

$$\vec{n} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}, \quad ds = R d\theta, \quad (13.15)$$

де θ – кут нахилу радіус-вектора із початку координат до даної точки на колі. В результаті для компонентів сили \vec{P} отримаємо інтеграли

$$X = - \oint p \cos\theta ds, \quad Y = - \oint p \sin\theta ds. \quad (13.16)$$

Тиск p у формулах (13.16) визначається за допомогою інтеграла Бернуллі і має вигляд

$$p = C - \rho \frac{v^2}{2},$$

де v^2 – квадрат модуля швидкості на поверхні контуру. Підставивши вираз для тиску в формули (13.16), отримаємо:

$$\begin{aligned} X &= -CR \oint_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \frac{\rho R}{2} \oint_0^{2\pi} v^2 \cos\theta d\theta, \\ Y &= -CR \oint_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + \frac{\rho R}{2} \oint_0^{2\pi} v^2 \sin\theta d\theta, \end{aligned} \quad (13.17)$$

тут інтеграли, що містять константу C , обертаються в нуль; залишаються тільки інтеграли, що утримують v^2 .

Знайдемо вирази для квадрата швидкості на поверхні обтічного кола. У випадку безциркуляційного обтікання на поверхні кола маємо

$$v_{\theta} = -2U_{\infty} \sin\theta,$$

а для чисто циркуляційної течії $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi R}$. Отже, при циркуляційному обтіканні кола результативна швидкість v_{θ} буде дорівнювати

$$v_{\theta} = -2U_{\infty} \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}.$$

і

$$v^2 = v_{\theta}^2 = 4 U_{\infty}^2 \sin^2\theta - \frac{2U_{\infty}\Gamma}{\pi R} \sin\theta + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2, \quad (13.18)$$

Підставляючи останній вираз для v^2 до формул (13.17), отримуємо наступні значення компонентів гідродинамічної сили:

$$X = \frac{\rho R}{2} \left\{ 4U_{\infty}^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos\theta d\theta - \frac{2U_{\infty}\Gamma}{\pi R} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta + \right. \\ \left. (\Gamma/2\pi R)^2 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \right\},$$

$$Y = \frac{\rho R}{2} \left\{ 4U_{\infty}^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta - \frac{2U_{\infty}\Gamma}{\pi R} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \right\}.$$

Обчисливши всі інтеграли, упевнимось, що $X = 0$, $Y = -\rho U_{\infty} \Gamma$.

Таким чином, виявляється, що сумісна дія на тіло поступального та чисто циркуляційного потоків створює на тіло суммарну силу реакції з боку рідини, направлену перпендикулярно до вектора швидкості набіжного потоку; при $\Gamma > 0$ сила $Y < 0$ (направлена вниз), а при $\Gamma < 0$ сила $Y > 0$ (направлена вгору). Сила, що діє перпендикулярно до вектора швидкості набіжного потоку, називається підйомною силою. Отриманий вираз для сили Y є окремим випадком теореми Жуковського, отриманої ним для довільного профілю, навколо якого утворюється циркуляція у потоці. Виникнення підйомної сили пояснюється виникненням асиметрії поля швидкостей, що з'являється у такому потоці. Якщо, наприклад циркуляція додатна, то на верхній

половині кола швидкості окремих складових потоків, направлені протилежно одна до одної і результативна швидкість зменшується, а тиск зростає. На нижній же половині кола швидкості складових потоків додаються, в результаті чого модуль швидкості зростає і тиск падає. У відповідності з інтегралом Бернуллі над верхньою половиною кола тиск зростає, а на нижній половині, навпаки, зменшується, що і призводить до виникнення результативної сили, направленої вниз.

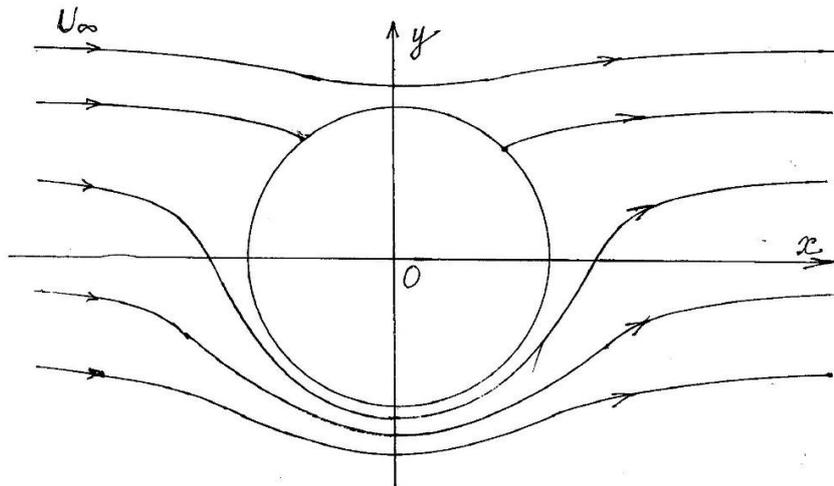


Рис.3.9. Лінії струменю при циркуляційному обтікання кола (випадок малої циркуляції)

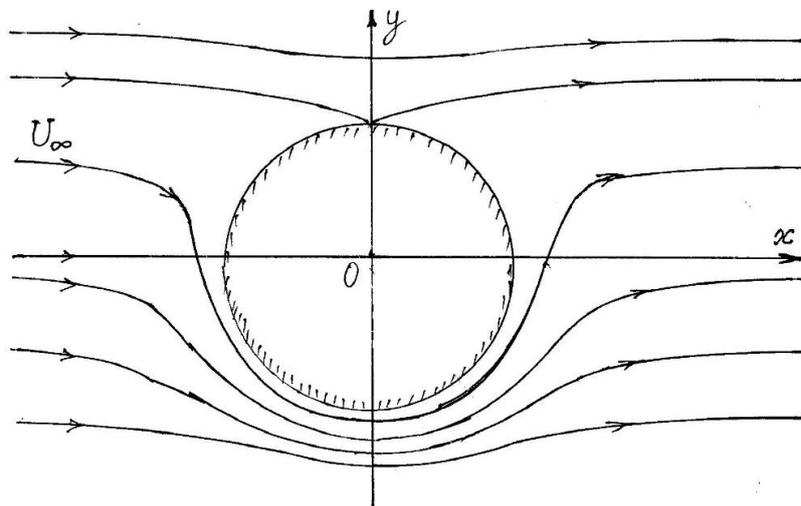


Рис.3.10. Лінії струменю при циркуляційному обтікання кола (випадок деякої середньої циркуляції)

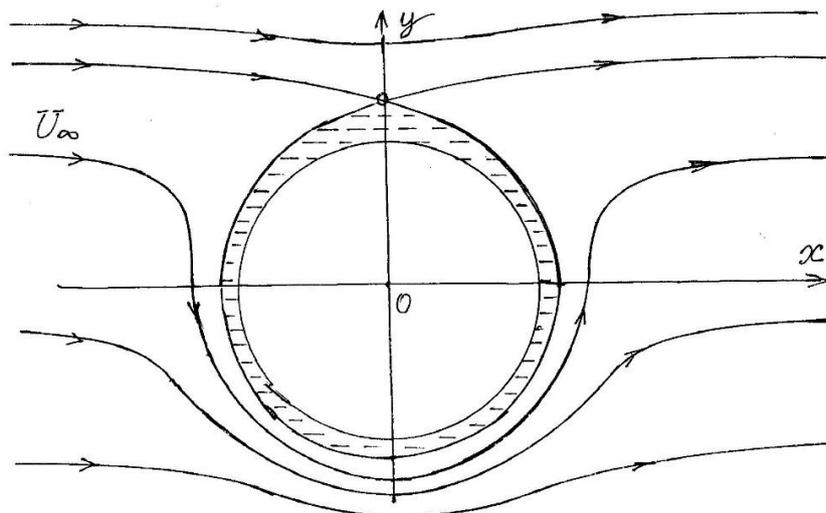


Рис. 3.11. Лінії струменю при циркуляційному обтіканні кола (випадок великої циркуляції)

Останній випадок цікавий тим, що крім контуру тіла в потоці виникає ще одна замкнена лінія струменю, а між ними з'являється замкнута циркуляційна зона (так звана «атмосфера вихору», на рис.3.11 – заштрихована). Кажуть, що вихор захопив частину рідину і закрутив її.

○○○

ДЛ-№14.

Загальні формули для гідродинамічних реакцій. Формули Чаплигіна-Блазіуса.

У попередній лекції ми вже користувались виразом для гідродинамічної реакції на контур тіла у вигляді:

$$\vec{P} = X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 = - \int p\vec{n} ds, \quad (14.1)$$

де \vec{n} – зовнішня одинична нормаль до контуру; \vec{x}_0 і \vec{y}_0 – орты системи координат; криволінійний інтеграл обчислюється по довжині контуру. Компоненти одиничної нормалі до контуру позначимо через

$$\vec{n} = \cos(n, x)\vec{x}_0 + \cos(n, y)\vec{y}_0,$$

так що проєкції сумарної сили на координатні осі виражатимуться інтегралами

$$X = - \int p \cos(n, x) ds, \quad Y = - \int p \cos(n, y) ds.$$

Кут нахилу до осі абсцис дотичної до контуру C (при обході його проти годинникової стрілки позначимо через θ ; тоді неважко отримати, що:

$$dx = ds \cos\theta, \quad dy = ds \sin\theta, \quad \cos(n, x) = \sin\theta, \quad \cos(n, y) = -\cos\theta.$$

Далі, маємо:

$$dz = dx + i dy = ds \cos\theta + i ds \sin\theta = ds(\cos\theta + i \sin\theta) = ds e^{i\theta},$$

$$\overline{dz} = dx - i dy = ds e^{-i\theta}.$$

В подальшому нам буде зручно розглядати силу не в традиційному векторному представленні (як у формулі (14.1)), а як комплексну величину. Введемо комплексну силу:

$$P = X + iY, \text{ а також } \overline{P} = X - iY.$$

Із попередніх формул маємо:

$$\begin{aligned} \overline{P} = X - iY &= - \int p (\cos(n, x) - i \cos(n, y)) ds = - \int p (\sin\theta + \\ &+ i \cos\theta) ds = -i \int p e^{-i\theta} ds = -i \int p \overline{dz}. \end{aligned}$$

Тепер для обчислення тиску застосовуємо інтеграл Бернуллі

$$p = C - \rho \frac{v^2}{2}. \tag{14.2}$$

Із виразу для \overline{P} отримуємо

$$\overline{P} = -i \oint (C - \frac{1}{2} \rho v^2) \overline{dz} = -iC \oint \overline{dz} + \frac{i\rho}{2} \oint v^2 \overline{dz}.$$

Тут перший інтеграл дорівнює нулю, оскільки:

$$\oint \bar{dz} = \oint dx - i \oint dy = 0 .$$

Далі, на контурі маємо $dz = dse^{i\theta}$, $\bar{dz} = dse^{-i\theta}$, так що $\bar{dz} = e^{-2i\theta} dz$. Тепер для спряженої сили отримуємо вираз

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint v^2 e^{-2i\theta} dz = \frac{i\rho}{2} \oint (ve^{-i\theta})^2 dz . \quad (14.3)$$

Тут v – модуль швидкості на поверхні контуру тіла. Далі, маємо

$$ve^{-i\theta} = v(\cos\theta - i \sin\theta) = v_x - iv_y = \frac{dw}{dz},$$

так що для спряженої сили реакції з боку рідини на контур будемо мати вираз

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz . \quad (14.4)$$

Це і є перша формула Чаплигіна-Блазіуса. Але головний смисл формули (14.4) занадто більш глибокий, ніж простий перехід від виразу сили через інтеграл від тиску (14.1) до виразу через інтеграл від квадрата спряженої швидкості (14.4). Із виводу формули (14.4) випливає, що в ній інтеграл обчислюється по контуру тіла C . Але під знаком інтеграла у формулі (14.4) знаходиться значення однозначної аналітичної функції $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ на контурі C . А це значить, що контур інтегрування у виразі (14.4) можна довільно деформувати (тільки б цей контур не пересікав особливих точок підінтегральної функції). В нашій задачі обтікання твердого контуру функція $\frac{dw}{dz}$ регулярна у всій зовнішності контуру, так що в якості контуру інтегрування можна, зокрема, вибрати коло будь-якого радіусу i , розклавши підінтегральну функцію в ряд Лорана в околі нескінченно далекої точки, можна звести обчислення вказаного інтеграла до визначення лишка підінтегральної функції в околі безкінечно віддаленої точки.

Ми це і зробимо трохи пізніше, а зараз звернемось до виводу другої формули Чаплигіна-Блазіуса, формули для обчислення моменту сил

реакції, що діє на профіль тіла з боку обтічної рідини. Але спочатку нагадаємо, як в механіці визначається момент сили відносно деякого полюса O . Нехай до деякого тіла в точці A , радіус-вектор котрої відносно полюса O дорівнює

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0,$$

прикладена сила $\vec{F} = F_x\vec{x}_0 + F_y\vec{y}_0 + F_z\vec{z}_0$; тоді момент цієї сили відносно полюса O визначається за формулою

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (yF_z - zF_y)\vec{x}_0 + (zF_x - xF_z)\vec{y}_0 + (xF_y - yF_x)\vec{z}_0.$$

В плоских задачах ми маємо справу тільки з однією компонентою моменту M_z , котра направлена перпендикулярно до площини OXY і дорівнює

$$M_z = xF_y - yF_x \equiv xY - yX.$$

Із сказаного випливає, що вказане значення моменту від сил тиску, прикладених до елементів контуру, котре в подальшому будемо позначати просто M , буде дорівнювати

$$M = - \oint p(x \cos(n, y) - y \cos(n, x)) ds = \int p(xdx + ydy). \quad (14.5)$$

Скориставшись для тиску інтегралом Бернуллі (2) і зауваживши, що

$$c \oint (xdx + ydy) = \frac{c}{2} \oint d(x^2 + y^2) = 0,$$

для моменту M отримаємо вираз

$$M = -\frac{\rho}{2} \oint v^2 (xdx + ydy).$$

Тепер, врахувавши, що

$$z\overline{dz} = (x + iy)(dx - idy) = (xdx + ydy) + i(ydx - xdy),$$

і отже

$$xdx + ydy = \operatorname{Re}(z\overline{dz})$$

отримаємо

$$M = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint v^2 z\overline{dz}\right).$$

Раніше ми вже показували, що $v^2\overline{dz} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$, завдяки чому остаточно отримуємо наступну формулу для моменту сил тиску з боку рідини на плоске тіло у потоці рідини (друга формула Чаплигіна-Блазіуса):

$$M = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz\right). \quad (14.6)$$

Як і в формулі для сили (14.4), в формулі (14.6) інтегрування можна проводити не обов'язково по контуру тіла C , а по будь-якому контуру, що один раз охоплює контур тіла C , в тому числі і по колу радіуса R_∞ .

Вирази для сили и момента, діючих на контур згідно з формулами

Чаплигіна-Блазіуса. Формула Жуковського для підйомної сили профілю.

Скористаємось тепер вказаним вище фактом, що в формулах Чаплигіна-Блазіуса інтегрування можна проводити не обов'язково по контуру самого тіла, а можна контур довільно деформувати в області течії. Оскільки функція $\frac{dw}{dz}$ регулярна у всій зовнішності контуру C , включаючи і нескінченно віддалену точку $z=\infty$, то ця функція в околі нескінченно віддаленої точки розкладається у ряд Лорана типу

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (14.7)$$

де $\bar{v}_\infty = U_\infty - iV_\infty$ – спряжена швидкість набіжного потоку в нескінченності; A_1, A_2, \dots – деякі числові коефіцієнти (взагалі, комплексні), конкретні числові значення яких залежать від форми профілю.

Зверніть увагу на те, що для значних модулів чисел z (тобто, як можна сказати, з точки зору нескінченно віддаленого спостерігача) поле швидкостей, визване присутністю тіла в потоці, представляється як поле, визване набором певних особливостей, розташованих в початку координат (початок координат, по визначенню, знаходиться всередині матеріального контуру): вихорджерела – член $\frac{A_1}{z}$, диполя (член $\frac{A_2}{z^2}$) та мультиполів більш високих порядків (члени $\frac{A_3}{z^3}$), накладених на рівномірний набіжний потік.

Отримаємо тепер степеневі ряди підінтегральних функцій, що входять до формул Чаплигіна-Блазіуса. Маємо:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = (\bar{v}_\infty)^2 + \frac{2A_1\bar{v}_\infty}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_2\bar{v}_\infty}{z^2} + \dots \quad (14.8)$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z = (\bar{v}_\infty)^2 z + 2A_1\bar{v}_\infty + \frac{A_1^2 + 2A_2\bar{v}_\infty}{z} + \dots \quad (14.9)$$

Згідно з відомими теоремами про лишки, будемо мати:

$$\oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\pi i(2A_1\bar{v}_\infty), \quad (14.10)$$

$$\oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz = 2\pi i(A_1^2 + 2A_2\bar{v}_\infty). \quad (14.11)$$

Користуючись формулою (14.4), тепер отримаємо наступний вираз для спряженої сили, що діє на контур

$$\bar{P} = -2\pi\rho A_1\bar{v}_\infty. \quad (14.12)$$

Уточнимо, що представляє собою величина A_1 у виразі (14.7). Член $\frac{A_1}{z}$ представляє собою поле швидкості від вихорджерела,

зосередженого в точці $z=0$ всередині контуру, і цю величину в принципі ми можемо представити в вигляді

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}(Q - i\Gamma), \quad (14.13)$$

де Q – інтенсивність (сумарна) всіх джерел усередині контуру, а Γ – сумарна циркуляція всіх вихорів, розташованих усередині контуру (ця ж величина дає сумарну циркуляцію навколо твердого контуру C і взагалі по довільному контуру, що охоплює контур C !). А тепер згадаємо, що на поверхні твердого контуру нормальна компонента швидкості рідини $v_n=0$, так що сумарний потік рідини через контур Q дорівнює нулю. Отже, якщо мова йде про обтікання твердого контуру, то $Q = 0$, і коефіцієнт A_1 має бути чисто уявним, так що його можна записати у вигляді

$$A_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad (14.14)$$

де Γ – циркуляція навколо контуру C , так що згідно з (14.12) ми отримуємо так звану формулу Жуковського для підйомної сили:

$$\bar{P} = i\rho\Gamma\bar{v}_\infty. \quad (14.15)$$

Виконавши операцію спряження, будемо мати:

$$P=X+iY=-i\rho\Gamma v_\infty=-i\rho\Gamma(U_\infty + iV_\infty). \quad (14.16)$$

Формули (14.15) (або (14.16)) називаються формулами Жуковського (за рубежом – Кутта-Жуковського). Із останньої формули виходить, що фізичний вектор сили повернутий по відношенню до вектора швидкості на кут $\frac{\pi}{2}$ (завдяки наявності множника $(i = e^{i\frac{\pi}{2}})$ в формулі (14.15). Знак повороту залежить від знака циркуляції. Але, у будь-якому разі вектор сили направлений перпендикулярно до вектора швидкості; саме тому сила Жуковського і називається підйомною.

Зверніть увагу на те, що проекція сили реакції на напрямок вектора швидкості відсутня (дорівнює нулю). Останнє значить, що сила опору взагалі відсутня. Це і є так званий «парадокс Даламбера», про який ми

вже неодноразово згадували. Парадокс Даламбера є результатом не зовсім адекватної математичної моделі ідеальної рідини. Можна сказати, що парадокс Даламбера є недоліком моделі ідеальної рідини.

○○○

ДЛ–№15.

Застосування методу конформних перетворень до вирішення задач обтікання довільних профілів.

Отриманий вище загальний розв'язок задачі обтікання поступальним потоком кругового циліндра (кола) дозволяє розв'язати і задачу обтікання будь-якого довільного контуру (профілю). Для цього треба скористатись конформним відображенням зовнішності заданого профілю на зовнішність кола і, таким чином, звести початкову задачу обтікання профілю до задачі обтікання кола, розв'язок якої ми вже знаємо, а потім через обернене конформне відображення повернутися до початкової задачі.

Отже, нехай на площині комплексного змінного z (будемо говорити, що це фізична площина) задано деякий жорсткий (тобто незмінний за формою профіль C_z). Зовнішність цього контуру (тобто, область течії рідини позначимо через D_z). Область D_z включає в себе нескінченно віддалену точку площини z . Будемо вважати, що цей контур обтікає потік рідини, компоненти швидкості котрого у вибраній системі координат у нескінченності на площині z (XOY) задані і дорівнюють U_∞ і V_∞ ; тобто на нескінченності задано спряжену швидкість фізичного потоку.

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=\infty} = U_\infty - iV_\infty . \quad (15.1)$$

Ми не будемо розв'язувати безпосередньо поставлену задачу обтікання заданого профілю, а постараємось за допомогою так званого конформного відображення звести її до попередньо розв'язаної задачі обтікання кола, а потім за допомогою оберненого конформного перетворення отримати і розв'язок задачі обтікання заданого профілю.

Введемо допоміжну площину комплексної змінної $\zeta = \xi + i\eta$ і на цій площині побудуємо коло радіуса R з центром в початку координат

системи $\xi O \eta$. Це коло радіусом R (контур круга) позначимо C_ζ , а зовнішню область кола C_ζ , що вміщує нескінченно віддалену точку $\zeta = \infty$, позначимо як D_ζ .

Таким чином, із-за складності вирішення початкової задачі гідромеханіки, (а, власне, математичної задачі ТФКЗ) ми відходимо від задачі на фізичній площині z і переходимо до деякої допоміжної задачі на допоміжній площині ζ . Подивимось, у що виливається ця допоміжна задача на допоміжній площині ζ .

Як відомо із теорії ТФКЗ, між будь-якими двома областями на площинах z і ζ , в тому числі і між областями D_z і D_ζ можна установити взаємно однозначну відповідність за допомогою деякої однозначної аналітичної функції

$$\zeta = F(z) \quad (15.2.a)$$

і оберненої до неї функції

$$z = f(\zeta). \quad (15.2,b)$$

Ця відповідність називається конформним відображенням тому, що локально (в околі кожної окремої точки воно зберігає (з точністю до величин другого порядку малості) форму геометричних фігур, скажімо, елементарне коло переходить в коло, квадрат – в квадрат і т.п. Відомо також, що конформне відображення (тобто функція (15.2,a) і (15.2,b)) не єдина, – існує безліч способів установити вказану відповідність. Для того, щоб отримати деяке конкретне відображення, треба конкретизувати, як говорять в теорії конформних перетворень «три довільності», а саме:

необхідно зажадати, щоб деяка конкретна внутрішня точка фізичної області $D_z(x_0, y_0)$ перейшла в деяку певну вибрану нами точку (ξ_0, η_0) допоміжної області D_ζ на площині ζ (цим самим ми вже використаємо дві із вказаних трьох довільностей, оскільки кожна конкретна точка задається двома параметрами, – її координатами).

Щоб конформне відображення стало повністю єдиним, необхідно ще зажадати, щоб, скажімо, вектор швидкості на нескінченності в допоміжній задачі мав певний кут α порівняно з кутом нахилу швидкості у фізичній площині, наприклад, можна потребувати щоб

і в тій і в іншій площині потіки у нескінченності були однаково орієнтовані, тобто, мали один і той же кут α по відношенню до, скажімо, осі абсцис. Заданням кута α конкретизується третій довільний параметр конформного відображення. Якщо ми задовольнили цим трьома умовам, то тоді функція $\zeta = F(z)$ (і обернена до неї функція $z = f(\zeta)$) будуть визначатися єдиним способом.

До речі, конформне відображення визнається єдиним способом, тобто можна зразу задовольнити всім трьома умовам, якщо заздалегідь вибрати по три довільних точки A, B, D на контурі C_z і A', B', D' на контурі C_ζ і забезпечити відповідність точок $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', D \leftrightarrow D'$ з дотриманням топології розташування цих точок на контурах C_z і C_ζ . Повертаючись до відображення зовнішності контуру C_z на зовнішність контура C_ζ , ми зажадаємо, щоб точці $z = \infty$ відповідала б на допоміжній площині точка $\zeta = \infty$ і щоб кути нахилу вектора швидкості у нескінченно віддаленій точці $\zeta = \infty$ на допоміжній площині і в нескінченно віддаленій точці площини z були б однакові (тобто, другими словами, щоб аргумент похідної $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty}$) і кут нахилу «фіктивної швидкості» у нескінченно віддаленій точці на площині ζ , були, наприклад, однакові.

Позначимо

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} e^{-i\alpha} = U_\infty - iV_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha}, \quad (15.3)$$

де α – кут напрямку вектора швидкості набіжного (фізичного) потоку в нескінченності на фізичній площині по відношенню до осі Ox (кут атаки).

Позначимо ще

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} e^{-i\beta}. \quad (15.4)$$

Величину β ми, взагалі кажучи, можемо задати довільно завчасно. Кут β означає кут атаки на допоміжній площині для допоміжної фіктивної течії рідини, якщо похідну $\frac{dw}{d\zeta}$ трактувати, як спряжену швидкість течії на фіктивній площині ζ . Для подальшого нам зручно буде вибирати $\beta = \alpha$, тобто кут атаки і в фізичній течії, і в фіктивній течії на допоміжній площині будемо вважати однаковими.

В подальшому комплексний потенціал фіктивної течії на допоміжній площині будемо позначати як $w(z)=w[f(\zeta)] =W(\zeta)$. Оскільки

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta},$$

то щоб похідна від конформного відображення $\frac{dz}{d\zeta}$ у нескінченно віддаленій точці була б додатною (хоча розв'язувати задачу можна і при довільному куті $\beta \neq \alpha$.)

Аналітична функція $z=f(\zeta)$ має бути голоморфною (тобто не мати особливих точок в області D_ζ , і щоб забезпечити взаємний перехід околів точок $z = \infty$ і $\zeta = \infty$, ця функція в околі нескінченно віддаленої точки має розкладатися в ряд Лорана, щоб забезпечити у нескінченності рівність кутів β і α , заформуємо:

$$z = k \zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots \quad (15.5)$$

причому як ми вже домовились, $\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} = k > 0$.

Зауважимо, що радіус R кола на площині ζ можна вибрати довільним, і тоді визначиться значення дійсної константи k ; можна навіть прийняти $R=1$. Навпаки, можна прийняти $k = 1$, і тоді визначиться значення радіуса R .

Тепер розглянемо більш конкретно задачу про безвідривне обтікання контуру C_z потенціальним потоком, швидкість якого на нескінченності дорівнює

$$v_\infty = U_\infty + iV_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}. \quad (15.6)$$

Шуканий комплексний потенціал обтікання контуру C_z , як звичайно, позначимо через

$$w(z) = \varphi + i\psi. \quad (15.7)$$

Початкова математична задача по визначенню функції $w(z)$ є задача по визначенню аналітичної функції в області D_z з наступними крайовими умовами на цю функцію:

1. $\psi|_{C_z} = const$ (умова безвідриного обтікання, – одночасно умова того, що контур C_z є лінією струменю);
2. $\frac{dw}{dz}|_{z=\infty} = |v_\infty|e^{-i\alpha}$ – умова в нескінченності.

Далі у нас мова йде про знаходження функції $z=f(\zeta)$, що здійснює конформне відображення області D_z на область D_ζ . Якщо підставити цю функцію в комплексний потенціал $w(z)$, то, як вже говорилося, отримаємо складну функцію

$$w[f(\zeta)] = W(\zeta) = \Phi + i\Psi, \quad (15.8)$$

де через Φ і Ψ ми позначили

$$\Phi(\xi, \eta) = \operatorname{Re} W(\zeta), \quad \Psi(\xi, \eta) = \operatorname{Im} W(\zeta). \quad (15.9)$$

Функція $W(\zeta)$ є аналітичною в області – зовнішності кола радіуса R , тому ми її можемо розглядати як комплексний потенціал деякого фіктивного руху рідини, що відбувається на площині ζ в області D_ζ , тобто зовні кола радіуса R . Комплексна швидкість цієї фіктивної течії виражається формулою

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta}.$$

В нескінченно віддаленій точці

$$\frac{dw}{dz}|_{z=\infty} = \bar{v}_\infty = U_\infty - iV_\infty, \quad \frac{dz}{d\zeta}|_{\zeta=\infty} = k,$$

Тобто, спряжена швидкість дорівнює

$$\frac{dW}{d\zeta}|_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_\infty, \quad (15.10),$$

тобто в нескінченно віддаленій точці площини ζ ми маємо фіктивний потік з швидкістю $k\bar{v}_\infty$.

$$kv_{\infty} = k(U_{\infty} + iV_{\infty}) = k|v_{\infty}|e^{i\alpha}. \quad (15.11)$$

Далі, згідно з (15.8) у відповідних точках пл. z і пл. ζ виконуються рівності:

$$w(z) = W(\zeta), \quad \varphi = \Phi, \quad \psi = \Psi. \quad (15.12)$$

Остання рівність із (15.12) свідчить про те, що оскільки на контурі C_z функція ψ має стале значення, то, значить, і функція Ψ на контурі C_{ζ} має також стале значення; (тобто коло радіуса R) являється лінією струменю на допоміжній площині для фіктивної течії.

Отже, підведемо висновок: яку задачу ми отримали на допоміжній площині? – Треба знайти аналітичну функцію $W(\zeta)$ зовні кола радіуса R , контур кола є лінією струменю для фіктивної течії і в нескінченно віддаленій точці задано фіктивну швидкість течії, котра дорівнює kv_{∞} . Але це вже – розв’язана нами задача обтікання кола радіуса R – з єдиною відмінністю, що раніше швидкість на нескінченності дорівнювала v_{∞} , а на цей раз вона дорівнює kv_{∞} (і що раніше незалежна змінна обзначалась літерою z , а на цей раз – літерою ζ !)

Використовуючи вже отриманий раніше розв’язок задачі про обтікання кола і враховуючи вказані відміни, можемо зразу записати розв’язок задачі для фіктивної течії на допоміжній площині ζ :

$$W(\zeta) = k\bar{v}_{\infty}\zeta + \frac{kv_{\infty}R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \quad (15.13)$$

Підставивши сюди обернену функцію конформного відображення $\zeta = F(z)$, отримаємо розв’язок початкової задачі про обтікання контуру C_z потоком з швидкістю v_{∞} в нескінченно віддаленій точці

$$w(z) = k\bar{v}_{\infty}F(z) + \frac{kv_{\infty}R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z). \quad (15.14)$$

В розв’язок задачі, як і раніше, ввійшла довільна стала Γ , котра значить циркуляцію навколо контуру C_z . Якщо контур C_z гладкий, значення циркуляції не визначено і має бути додатково задано; саме такий випадок ми маємо в задачі про обтікання циліндра (кола).

○○○

ДЛ–№16.

Постулат Жуковського-Чаплигіна-Кутта.

Профілі крил, що використовуються в авіації, звичайно мають загострену задню крайку (кромку). У цьому випадку при довільно заданому значенні циркуляції швидкість рідини в гострій крайці є, як звичайно, нескінченною, що не є фізичним. І лише тільки при одному єдиному значенні величини циркуляції $\Gamma_{\text{ж}}$ швидкість у гострій кромці виявляється скінченною. М.Є. Жуковський запропонував саме так і визначати значення істинної циркуляції навколо профілю з гострою кромкою, тобто із умови, щоб швидкість всюди в потоці (у тому числі, і в гострій кромці була скінченною). Гіпотеза про те, що циркуляція навколо профілю з гострою кромкою автоматично установлюється в потоці такою, щоб виконувалась умова скінченності швидкості в гострій крайці в аерогідромеханіці називається гіпотезою (постулатом) Жуковського-Чаплигіна-Кутта.

Ми не будемо глибоко аналізувати фізичний зміст вказаного постулату – тим більше, що ми поки ще не знайомі з теоремами Томсона. Але наведемо деякі математичні викладки, котрі витікають із постулату Жуковського-Чаплигіна .

Спочатку зробимо невеличке зауваження щодо конформного перетворення. Хай на площині $z = x + iy$ задано область D_z у вигляді нескінченного сектора з кутом α (рис.3.12) при вершині, котра знаходиться в початку координат. Границею області D_z являються два променя, що виходять із початку координат під кутом α один до одного, причому один промінь співпадає з додатною піввіссю абсцис. Нехай на іншій площині другої комплексної змінної $\zeta = \xi + i\eta$ задано аналогічну область D_ζ у вигляді нескінченного кутового сектора з кутом розкриття β .Потрібно знайти конформне відображення між цими нескінченними трикутними областями (з умовою, щоб вершини одного і другого сектора відповідали одна одній).

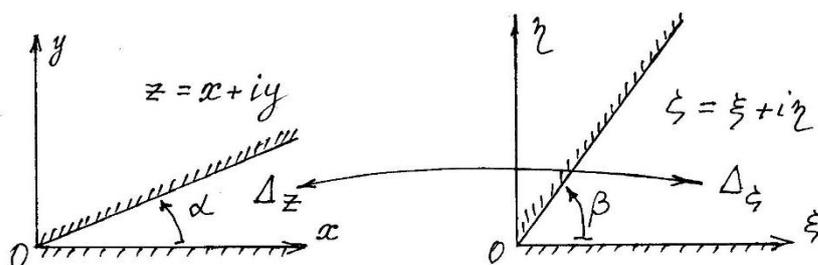


Рис.3.12. До конформного відображення нескінченного сектора на другий нескінченний сектор з іншим кутом розкриття

Неважко бачити, що така функція визначається формулою

$$\zeta = Mz^{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (16.1)$$

де M – будь-яка (у нашому випадку, без додаткових вимог) додатна константа, що визначає масштаб перетворення; дійсно, як видно із формули (16.1), точка $z=1$ перетворюється в точку $\zeta = M$ і ця формула придатна як у випадку $\beta > \alpha$, так і у випадку $\beta < \alpha$, а також і при $\beta = \alpha$. Якщо кутові точки мають відповідно координати z_0 і ζ_0 , то замість перетворення (16.1) будемо мати

$$\zeta - \zeta_0 = M(z - z_0)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (16.2)$$

де у загальному випадку величина M може бути комплексною.

Обчислимо похідну від функції (16.1):

$$\frac{d\zeta}{dz} = M \frac{\beta}{\alpha} z^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}, \quad (16.3)$$

і звернемо увагу на те, як веде себе ця похідна при $z \rightarrow 0$ (тобто в кутовій точці). Маємо

$$\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow 0 \quad (\text{якщо } \beta > \alpha),$$

$$\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow \infty \quad (\text{якщо } \beta < \alpha),$$

$\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow M$ (якщо $\beta = \alpha$; тобто, тут похідна може бути будь-яким числом). Аналогічний результат отримуємо і для виразу (16.2).

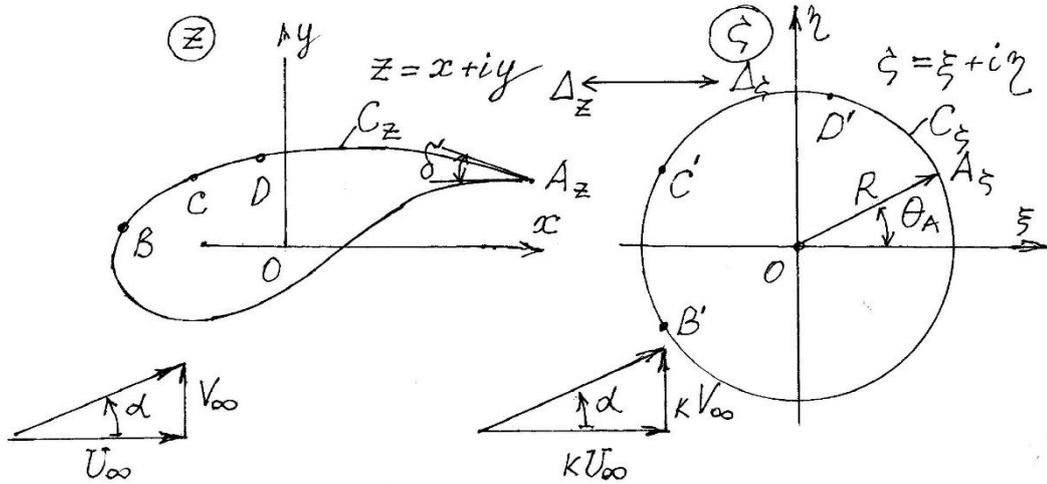


Рис.3.13. До використання конформного відображення при розв'язанні задачі про обтікання довільного контуру

Нехай тепер на площині z задано гладкий контур C_z (рис.3.13), котрий має одну гостру крайку (кромку) (типу, як у профілі крила). Позначимо цю точку A , і нехай координата цієї вершини є z_A і нехай при конформному відображенні зовнішності контуру C_z на зовнішність кола (тобто контура C_ζ на площині ζ) образом гострої крайки A є точка A' на колі з координатою

$$\zeta_A = R e^{i\theta_0}. \quad (16.4)$$

Нехай дотичні до контуру C_z в точці загострення A (на площині z) утворюють гострий кут δ (кут загострення профілю крила в задній гострій крайці). Тоді в малому околі точки A на площині z в області течії маємо в першому наближенні сектор з кутом $\alpha = 2\pi - \delta$. Цей окіл при конформному відображенні переходить в окіл точки A' зовні кола, котрий локально представляє собою у першому наближенні сектор з кутом $\beta = \pi$. Звідси випливає, що (с точністю до величин другого порядку малості) конформне перетворення в околі точки A (A') в головних своїх членах повинно мати вигляд

$$\zeta - \zeta_A = M(z - z_A)^{\frac{\pi}{2\pi - \delta}} + \dots, \quad (16.5)$$

або

$$z - z_A = N(\zeta - \zeta_A)^{\frac{2\pi - \delta}{\pi}} + \dots \quad (16.6)$$

і, оскільки кут загострення δ достатньо малий, то

$$\frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow \zeta_A} = 0. \quad (16.7)$$

Але

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta}, \quad (16.8)$$

і ця формула справедлива як в області течії, так і на контурах (тобто на фізичному контурі і його образі в допоміжній площині), то вона справедлива і при підході до гострої окрайки. Якщо скористуватись постулатом Жуковського-Чаплигіна, то перший множник справа у формулі (6.8) в гострій окрайці обмежений, а другий множник, згідно з (6.7) в цій точці перетворюється в нуль. В результаті в образі гострої кромки, тобто в точці з координатою $\zeta_A = Re^{i\theta_0}$ величина

$$\frac{dW}{d\zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_A} = 0. \quad (16.9)$$

Але рівність (6.9) означає, що для фіктивної течії $W(\zeta)$ точка $\zeta = \zeta_A$ на колі радіуса R є критичною точкою (точкою гальмування фіктивного потоку).

Користуючись формулою (16.8), знаходимо $\frac{dW}{d\zeta}$:

$$\frac{dW}{d\zeta} = k\bar{v}_\infty - \frac{kv_\infty R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}. \quad (16.10)$$

Підставивши сюди $\zeta = \zeta_A = Re^{i\theta_0}$ і прирівнявши $\frac{dW}{d\zeta}$ до нуля, знаходимо значення величини Γ :

$$\Gamma = 2\pi i k R (v_\infty e^{-i\theta_0} - \bar{v}_\infty e^{i\theta_0}).$$

Використовуючи, нарешті, тригонометричні перетворення

$$v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha}, \bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha},$$

отримуємо

$$\Gamma = 2\pi ikR|v_\infty|(e^{-i(\theta_0-\alpha)} - e^{i(\theta_0-\alpha)}) = 4\pi kR|v_\infty|\sin(\theta_0 - \alpha). \quad (16.11)$$

Як видно, задача визначення циркуляції, а значить, і підйомної сили профілю в ідеальній нестисливій рідині зводиться до чисто геометричної задачі конформного відображення зовнішності заданого контуру на зовнішність кола. Циркуляція, як видно із формули (16.11), залежить від трьох геометричних параметрів, що характеризують конформне перетворення: радіуса кола R на допоміжній площині, коефіцієнта k и кута θ_0 , що характеризує положення на допоміжній площині образу гострої окрайки профілю.

Використавши для підйомної сили формулу Жуковського, отримаємо наступний вираз для підйомної сили профілю

$$P=X+iY=-i\rho\Gamma v_\infty = -4\pi kR\rho|v_\infty|^2\sin(\theta_0 - \alpha)e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}. \quad (16.12)$$

Из останньої формули видно, що діюча підйомна сила пропорційна добуткові $\rho|v_\infty|^2$, тобто швидкістному напору набіжного потоку; наявність множника $e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$ значить, що діюча сил перпендикулярна до вектора швидкості набіжного потоку, направленою під кутом атаки α , тобто сила P являється підйомною. Из формули (16.12) також видно, що у кожного профілю існує такий напрямок обтікання набіжним потоком, при якому підйомна сила дорівнює нулю. Цей кут атаки визначається із умови

$$\sin(\theta_0 - \alpha) = 0,$$

тобто це кут $\alpha^* = \theta_0$ (або відрізняється від нього на кут π). При переході дійсного кута атаки через значення α^* напрямок підйомної сили змінюється на протилежний, так що для величини підйомної сили маємо вираз

$$P = -4\pi kR\rho|v_\infty|^2(\alpha^* - \alpha),$$

котрий показує, що при порівняно незначних кутах атаки підйомна сила від кута атаки залежить фактично лінійно.

○○○

ДЛ–№17.

Обтікання еліптичного контуру (еліптичного циліндра).

Представимо собі контур у вигляді еліпса в системі координат XOY с поздовжньою піввіссю a (вздовж осі абсцис) і поперечною піввіссю b (вздовж осі ординат) ($a > b$); рівняння еліпса, як добре відомо із аналітичної геометрії, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (17.1)$$

В загальному випадку потік на нескінченності може бути направлений під деяким кутом α до більшої осі, так що маємо

$$v_\infty = (U_\infty + iV_\infty) = |v_\infty|e^{i\alpha}. \quad (17.2)$$

Як ми знаємо із попередньої лекції, для розв'язання задачі про обтікання еліпса ми попередньо маємо знайти таку аналітичну функцію

$$z=f(\zeta), \quad \zeta = F(z), \quad (17.3)$$

котра б зовнішність еліпса на площині z відображала б на зовнішність кола деякого радіуса R з центром в початку координат на допоміжній площині змінного ζ . При цьому, ми шукаємо таке конформне перетворення, котре б точку $z=\infty$ відображало б у точку $\zeta = \infty$. Знаючи комплексний потенціал обтікання кола на площині ζ , тобто функцію $W(\zeta)$, ми за допомогою оберненої функції до конформного перетворення можемо знайти шуканий потенціал течії $W(F(z))=w(z)$ на площині z , тобто потенціал обтікання еліпса. Щоб впоратись з задачею пошуку конформного відображення, ми підемо послідовними кроками. Перший крок: учинимо перетворення подібності, тобто введемо нову комплексну змінну z' , зв'язану з попередньою змінною z співвідношенням:

$$z = c z', \quad (x=cx', y=cy'), \quad (17.4)$$

де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – так званий лінійний ексцентриситет еліпса. При цьому, попередньому еліпсу на площині z на площині z' буде відповідати еліпс з рівнянням

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \quad (a' = \frac{a}{c}, \quad b' = \frac{b}{c}), \quad (17.5)$$

лінійний ексцентриситет якого дорівнює одиниці. Із (17.4) видно, що точкам $z=0$ і $z=\infty$ будуть відповідати точки $z' = 0$ и $z' = \infty$.

Тепер розглянемо конформне перетворення, котре здійснюється функцією

$$z' = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (17.6)$$

яка називається функцією Жуковського. Подивимось, в яку область на площині z' перетворює ця функція зовнішність кола радіуса R на площині ζ . Із формули (17.6) видно, що ця функція зовні вказаного кола голоморфна; далі, точка $\zeta = \infty$ переходить у точку $z' = \infty$. Вияснимо, в яку криву на площині z' переходить коло радіуса R із площини ζ . Для довільної точки цього кола маємо $\zeta = R e^{i\theta}$, де θ – полярний кут цієї точки. Підставляючи останній вираз для ζ в формулу Жуковського (17.6), отримуємо на площині z' криву з параметричним рівнянням:

$$z' = x' + iy' = \frac{1}{2} \left(R e^{i\theta} + \frac{1}{R e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos\theta + \frac{i}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin\theta,$$

тобто

$$x' = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos\theta; \quad y' = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin\theta. \quad (17.7)$$

Вирази (17.7) представляють собою параметричні рівняння (з параметром θ !) тих кривих, в які перетворюються кола радіуса R ($0 < \theta < 2\pi$). Виключивши із рівнянь (17.7) параметр θ , отримаємо явне рівняння цих кривих. Неважко бачити, що ці рівняння – це рівняння еліпсів:

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y'^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = 1. \quad (17.8)$$

Рівняння (17.8) представляє собою еліпс з півосями:

$$a' = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b' = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right). \quad (17.9)$$

Звідси ми бачимо, що, якщо нами вже задано радіус кола в пл. ζ , то на площині z' ми отримуємо еліпс з півосями a' і b' , які знаходяться за співвідношеннями (17.9). Якщо ж навпаки, у нас є еліпс з деякими заданими півосями a' і b' , то тоді із рівнянь (17.9) ми можемо знайти такий радіус R кола на площині ζ , який би при відображенні за допомогою функції Жуковського привів би до вже наявного еліпса.

Будем вважати, що у нас в початковій задачі задано фізичні півосі a і b . Тоді, враховуючи (17.4), із (17.9) отримаємо наступні рівняння.

$$a' = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right), \quad (17.10)$$

Ці рівняння не незалежні і з них легко отримуємо, що

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} = R, \quad \text{або} \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} > 1. \quad (17.11)$$

Таким чином, шукана аналітична функція, що виконує конформне відображення зовнішності кола радіуса $R > 1$ на площині ζ на зовнішність еліпса (17.1) с півосями a і b (і переводить контур кола в контур еліпса) буде мати вигляд

$$z=f(\zeta)=\frac{c}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \quad (c=\sqrt{a^2-b^2}). \quad (17.12)$$

Задача фіктивного обтікання кола радіуса R на площині ζ має вигляд

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{kv_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\zeta, \quad (17.13)$$

де $k = \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\infty}$. В нашому випадку похідна $\frac{dz}{d\zeta}$ від виразу (17.12) дорівнює

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{c}{2}. \quad (17.14)$$

В подальшому, оскільки еліпс представляє собою гладкий контур (без точок загострення), то циркуляція при обтіканні не визначена, і ми будемо розглядати тільки безциркуляційне обтікання, так що в формулі (17.13) покладемо $\Gamma = 0$. Безциркуляційному обтіканню кола відповідає потенціал

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{kv_\infty R^2}{\zeta} = \frac{c}{2} \left(\bar{v}_\infty\zeta + \frac{v_\infty R^2}{\zeta}\right). \quad (17.15)$$

Для отримання комплексного потенціала $W(z)$ у фізичній площині обтікання еліпса необхідно у формулу (17.15) підставити функцію $\zeta = F(z)$, обернену до функції Жуковського (17.12). Для обернення функції Жуковського запишемо її у вигляді квадратного рівняння

$$\zeta^2 - \frac{2z}{c} \zeta + 1 = 0. \quad (17.16)$$

Рівняння (17.16) має два комплексних кореня:

$$\zeta = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - c^2}}{c}. \quad (17.17)$$

Як видно, обернена функція неоднозначна. Неважко зрозуміти, що необхідно взяти ту гілку цієї функції, що відповідає знаку «+» перед корнем у формулі (17.17): якраз саме ця гілка нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ ставить у відповідність точку $\zeta = \infty$ (та гілка, що відповідає знаку «-» точці $z = \infty$ ставить у відповідність точку $\zeta = 0$).

Таким чином, ми установили, що обернена функція, відповідна функції Жуковського, має бути взята у вигляді

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c} = F(z). \quad (17.18)$$

Підставивши цей вираз у формулу (17.15), після елементарних алгебраїчних перетворень отримаємо потенціал безциркуляційного

обтікання еліпса (випадок косою обтікання під кутом атаки). Цей вираз має такий остаточний вигляд:

$$w(z) = \frac{1}{a-b} [(az - b\sqrt{z^2 - c^2})U_\infty + i(bz - a\sqrt{z^2 - c^2})V_\infty]. \quad (17.19)$$

Визначення моменту сил, діючих на еліпс при його косому (похилому) обтіканні.

Після того, як ми знашли функцію $w(z)$, ми можемо будувати лінії струменю, знаходити розподіл компонентів швидкості в потоці, знаходити розподіл швидкості рідини і тиску по поверхні тіла тощо. Але найбільш цікавий результат заключається в тому, що за допомогою формули Чаплигіна-Блазіуса ми можемо знайти момент реакції рідини на рухоме тіло (при безциркуляційному обтіканні суммарна сила, діюча на еліпс, відсутня). Схема до розв'язання задачі показана на рис.3.14, 3.15.

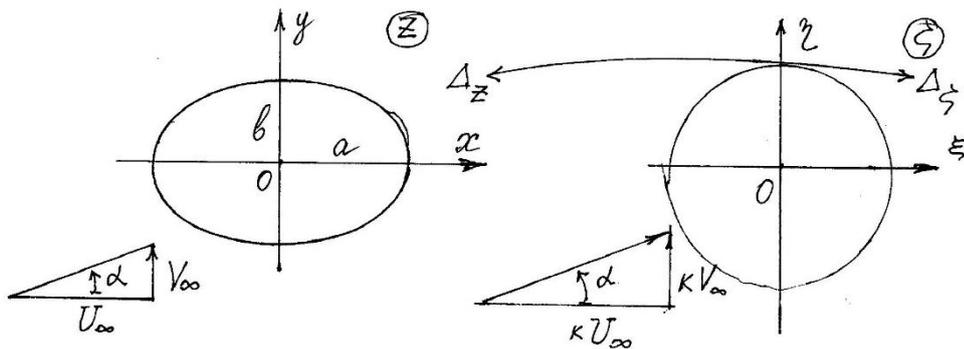


Рис.3.14. До задачі безциркуляційного обтікання еліпса

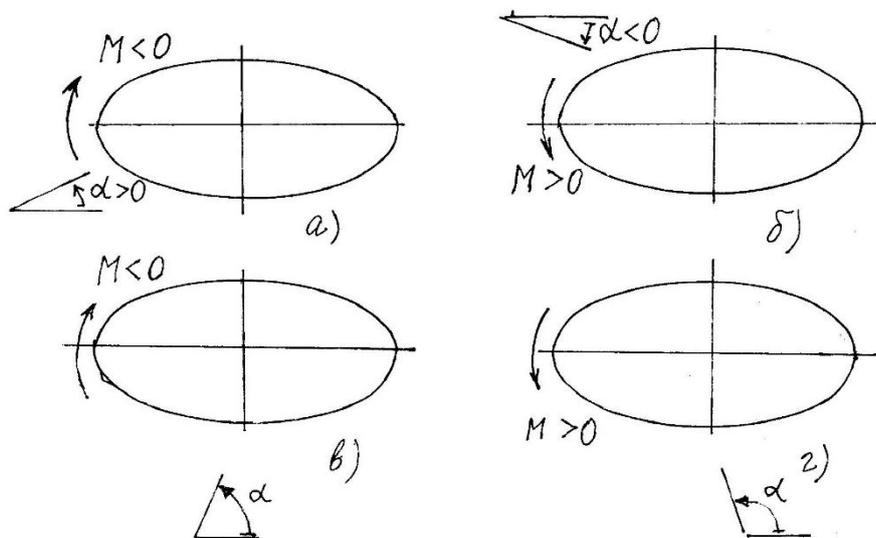


Рис. 3.15. До питання, який гідродинамічний момент діє на еліпс при безциркуляційному обтіканні

Згадаємо, що для виразу моменту сил тиску на контур у потоці можна використовувати другу формулу Чаплигіна-Блазіуса, яка, нагадуємо, має наступний вигляд:

$$M = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz\right) \quad (17.20)$$

Минулий раз ми розповідали про те, що інтеграл, який входить в цю формулу, можна визначити, виходячи із теорії лишків, для чого потрібно розкласти функцію $\frac{dw}{dz}$ в околі нескінечно віддаленої точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Цей ряд має вигляд:

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (17.21)$$

Минулий раз ми установили, що при обтіканні будь-якого непроникливого контуру коефіцієнт A_1 є чисто уявним і може бути представлений у вигляді

$$A_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad (17.22)$$

де Γ – циркуляція навколо контуру.

Тоді ж ми також установили, що за теоремою про лишки інтеграл, що входить до формули (17.22), дорівнює

$$\oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz = 2\pi i (A_1^2 + 2A_2 \bar{v}_\infty). \quad (17.23)$$

Але, оскільки ми розглядаємо зараз безциркуляційне обтікання еліпса, то циркуляція дорівнює нулю, тобто, коефіцієнт $A_1 = 0$. Таким чином, згідно з формулами (17.20) та (17.23), момент, діючий на еліпс, дорівнює

$$M = \operatorname{Re}(-2\pi i \rho A_2 \bar{v}_\infty), \quad (17.24)$$

так що для остаточного визначення момент необхідно визначити коефіцієнт A_2 з ряду (17.23).

Знайдемо похідну від виразу (17.19); отримаємо:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{a-b} \left[\left(a - \frac{bz}{\sqrt{z^2-c^2}} \right) U_\infty + i \left(b - \frac{az}{\sqrt{z^2-c^2}} \right) V_\infty \right]. \quad (17.25)$$

Із (17.25) видно, що належить розкласти в ряд Лорана тільки функцію

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-c^2}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{c^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

При $z \rightarrow \infty$ величина $\varepsilon = \frac{c^2}{z^2}$ прямує до нуля і, таким чином, підлягає розкладу в ряд Тейлора по змінній ε функція $\varphi(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$. Маємо:

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \dots$$

звідки

$$\left(1 - \frac{c^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{z^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{c^2}{z^2} \right)^2 + \dots$$

Подставляючи вказаний ряд в формулу (17.25), и приводячи подібні члени, отримаємо наступне розвинення функції $\frac{dw}{dz}$ в ряд Лорана при $z \rightarrow \infty$:

$$\frac{dw}{dz} = U_\infty - iV_\infty + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

де

$$A_2 = -\frac{1}{2}(a+b)(bU_\infty + iaV_\infty).$$

Тепер із формули (17.24) отримуємо наступний вираз для моменту

$$M = \operatorname{Re}(-2\pi i \rho A_2 \bar{v}_\infty) = -\pi \rho (a^2 - b^2) U_\infty V_\infty.$$

Замінивши U_∞ и V_∞ виразами

$$U_{\infty} = |v_{\infty}| \cos \alpha, \quad V_{\infty} = |v_{\infty}| \sin \alpha,$$

представимо формулу для моменту, діючого з боку набіжного потоку рідини на еліпс у вигляді:

$$M = -\pi \rho |v_{\infty}|^2 (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (17.26)$$

Детальне дослідження моменту, діючого на еліпс у потоці, проведемо на наступному занятті.

○○○

ДЛ-№18.

Дослідження моменту, діючого на еліпс в залежності від кута атаки.

У попередній лекції ми отримали наступний вираз для величини моменту, діючого на еліпс у потоці рідини:

$$M = -\pi \rho |v_{\infty}|^2 (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (18.1)$$

із якого видно, що існує два напрямки набігання потоку на еліпс ($\alpha = 0$ (2π) и $(\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($3\frac{\pi}{2}$)), при яких $M=0$, тобто при обтіканні еліпса вздовж великої півосі як спереду, ($\alpha = 0$), так і сзаду ($\alpha = \pi$) і при обтіканні вздовж малої осі, як знизу ($= \frac{\pi}{2}$), так і зверху ($\alpha = \frac{3}{2}\pi$). Ці положення представляють собою положення рівноваги еліпса (відсутність моменту, але, як виявляється, положення обтікання еліпса вздовж великої осі є нестійким, тоді, як положення обтікання вздовж малої осі – стійким.

Давайте згадаємо, що значить рівновага стійка і що значить рівновага нестійка? Ці стани визначаються за наступним знаком: якщо після виведення тіла (системи) із стану рівноваги воно (тіло) чи ВОНА (система) намагається повернутись до висхідного попереднього стану, то такий висхідний стан являється стійким. А якщо після навіть незначного відхилення від стану рівноваги тіло (система) намагається ще далі відійти від висхідного стану рівноваги, то такий стан рівноваги являється нестійким.

Дуже наглядним у цьому сенсі є положення малого шарика на дні ямки (стійке положення) і положення шарика на вершині бугорка (нестійке положення); при незначному підйомі шарика із дна ямки, предоставлений самому собі, шарик буде опускатись у попереднє положення, на дно ямки, тоді як при незначному відхиленні шарика від вершини бугорка шарик буде скочуватись все далі, тобто буде намагатись все дальше відхилитись від свого висхідного стану. Тобто, положення шарика на дні ямки (положення рівноваги) являється стійким, а положення шарика на бугорці (також положення рівноваги) являється нестійким.

Щоб упевнитись в тому, чи являється вказаний раніше стан рівноваги еліпса у потоці стійким чи не стійким, давайте представимо собі, що еліпс может обертатись навкруги осі, що проходить через центр еліпса (початок координат.). Нагадаємо що в формулі (18.1) момент обчислюється відносно початку координат і вважається додатним, якщо він намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки.

Отже, представимо собі, що на площині знаходиться еліпс, котрий обтікається потоком зліва (с боку від'ємної сторони осі OX) вздовж напрямку додатної осі OX). Цей стан відповідає нульовому куту атаки. Згідно з формулою (18.1) момент обертання відсутній, $M=0$, тобто маємо положення рівноваги: кут напрямку вектора швидкості співпадає з напрямком осі OX . Хай тепер вектор швидкості набіжного потоку повернувся проти годинникової стрілки на деякий, хай невеликий кут α . Такий кут атаки вважається додатним він може виникнути, якщо вектор швидкості зберігає свій напрямок, а еліпс отримує початковий поворот на кут α за годинниковою стрілкою. Згідно до формули (18.1) виникає момент M , величина якого від'ємна, тобто виникший момент буде намагатись повернути еліпс за годинниковою стрілкою і тим самим збільшити кут між вектором швидкості і додатним напрямком осі OX (кут атаки). Отже, при виникненні навіть надзвичайно малого кута, створюється момент, котрий буде прагнути цей кут збільшити. Це і є ознака нестійкості стану рівноваги,

Якщо вектор швидкості повернути на кут α за годинниковою стрілкою, або, навпаки, еліпс проти годинникової стрілки на кут α (такої кут атаки вважається від'ємним), тоді, згідно з формулою (18.1), виникає момент M , величина якого буде додатною, і цей

момент буде намагатись повертати еліпс і даліше проти годинникової часової стрілки, тим самим намагаючись збільшити абсолютну величину кута між вектором швидкості і великою віссю.

Таким чином, обидва ці випадки показують, що такий стан, коли вектор швидкості направлений вздовж великої осі еліпса, являється нестійким, оскільки навіть незначне відхилення вектора швидкості від напрямку великої осі в ту чи в іншу сторону (тобто виникнення кута атаки, провокує виникнення такого додаткового момента, котрий намагається цей кут атаки збільшити по абсолютному значенню, звідки видно, що положення еліпса в потоці, коли вектор швидкості направлений вздовж великої осі, являється нестійким.

Рекомендується студентам на основі тієї ж формули (18.1) самостійно довести, що положення еліпса в потоці, коли вектор швидкості набіжного потоку направлений вздовж малої осі, являється стійким, тобто будь-яке відхилення кута атаки від значення $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в ту, чи в іншу сторону приводить до виникнення відновлювального момента, що буде намагатися відновити порушений стан рівноваги і відновити попередній стан рівноваги. Таким чином, стан обтікання еліпса, коли кут атаки дорівнює $\alpha = \frac{\pi}{2}$ є стійким.

Із сказанного витікає, що, якщо взяти деякий відрізок еліптичного циліндра і насадити його на поперечну вісь, що проходить через центр, то така конструкція может служити добрим флюгером – циліндр буде завжди показувати напрямок швидкості потоку (вітру), тобто завжди буде орієнтуватись в потоці так, щоб його мала вісь була направлена вздовж напрямку набіжної швидкості потоку.

Задача обтікання пластинки.

Звернемось тепер до більш детального розгляду задачі обтікання тонкої пластинки: обтікання тонкої пластинки можна розглядати як граничний випадок обтікання еліпсоподібного тіла, у якого пластинка являється граничним випадком обтікання еліпсоподібного тіла у граничному переході, коли відношення малої осі до великої прямує до нуля. Розглянемо спочатку задачу безциркуляційного обтікання. В одній із попередніх лекцій для комплексного потенціалу безциркуляційного обтікання еліпса ми отримали наступний вираз для потенціалу обтікання:

$$w(z) = \frac{1}{a-b} \left[(az - b\sqrt{z^2 - c^2})U_\infty + i(bz - a\sqrt{z^2 - c^2})V_\infty \right], \quad (18.2)$$

де, якщо хто пам'ятає, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – так званий ексцентриситет еліпса. В граничному переході, коли $b \rightarrow 0$ (і a – зберігає свою величину) еліпс вироджується в плоску двохсторонню нескінченно тонку пластинку довжиною $(-a, +a)$ (в математичному сенсі участок, зайнятий пластинкою, можна розглядати як математический розріз вздовж осі абсцис від $-a$ до $+a$ з відмінністю верхнього його берега (верхньої сторони пластинки) від нижнього. Береги розрізу верхньої сторони поверхні пластинки і нижньої хоча геометрично ніби і співпадають, але, скажімо, гідродинамічні параметри на них треба відрізняти, оскільки гідродинамічні параметри на них (зокрема компоненти швидкості можуть сильно відрізнитись і їх треба відрізняти на верхньому і нижньому березі розрізу вони можуть бути різними).

Таким чином, переходячи у виразах (18.2) до границі при $b \rightarrow 0$, отримаємо потенціал безциркуляційного обтікання пластинки у вигляді)

$$w(z) = U_\infty z - i\sqrt{z^2 - a^2}V_\infty. \quad (18.3)$$

Для спряженої швидкості матимемо вираз

$$\frac{dw}{dz} = U_\infty - iV_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (18.4)$$

Із останньої формули видно, що на обох кінцях пластинки (тобто на обох гострих крайках пластинки) $z = \pm a$ швидкість досягає нескінченності

Спробуємо знайти критичні точки в потоці (точки гальмування потоку). Для цього вираз (18.4) прирівняємо до нуля

$$U_\infty - iV_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = 0. \quad (18.5)$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо координати точок гальмування потоку. Запишемо рівняння (18.5) у вигляді

$$U_{\infty} \sqrt{z^2 - a^2} = iV_{\infty} z.$$

Підводячи ліву і праву частину до квадрату, отримуємо

$$U_{\infty}^2 (z^2 - a^2) = -V_{\infty}^2 z^2.$$

Із останнього рівняння знаходимо

$$z^2 = \frac{U_{\infty}^2}{U_{\infty}^2 + V_{\infty}^2} a^2,$$

звідки, у свою чергу, отримуємо

$$z_{1,2} = \pm a \cos \alpha, \quad \rightarrow x_{1,2} = \pm a \cos \alpha, \quad y_{1,2} = 0. \quad (18.6)$$

Таким чином, виявляється, що у потоці існують дві точки гальмування потоку і обидві вони знаходяться в межах пластинки. На жаль, із останніх формул не видно, на яких сторонах пластинки лежать ці критичні точки, зверху чи знизу.

Щоб розібратись із цими тонкощами, треба перш за все впевнитись у тому, що значення аналітичної функції $\sqrt{z^2 - a^2}$ на верхньому і на нижньому березі розрізу відмінні між собою.

Отже, розглянемо аналітичну функцію $F(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ і запишемо її у вигляді

$$F(z) = \sqrt{(z + a)(z - a)}.$$

Комплексні числа, взагалі кажучи, представляють собою «вектори», що мають свої модулі та аргументи, і їх зручно писати у формі Ейлера таким чином

$$(z - a) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad (z + a) = r_2 e^{i\theta_2},$$

де r_1 і r_2 – модулі вказаних комплексних чисел, що дорівнюють

$$r_1 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2},$$

а θ_1 і θ_2 – їх аргументи (кути векторів, що відраховуються (як правило) від додатного напрямку осі абсцис (проти годинникової стрілки– додатні значення, по годинниковій стрілці – від’ємні значення, тобто $\theta_1 = \arctg \frac{y}{x-a}$, $\theta_2 = \arctg \frac{y}{x+a}$.

Маємо:

а) коли точка z знаходиться на осі ox справа від точки a ($x > a$), то:

$$\theta_1 = 0, r_1 = (x - a) ; \theta_2 = 0, r_2 = x + a , F(z) = \sqrt{x^2 - a^2};$$

б) коли точка z попадає на верхній берег ділянки осі ($-a < x < a$), обходячи точку $x=a$ зверху, тоді

$$\theta_1 = \pi, r_1 = |x - a| = a - x; \theta_2 = 0, r_2 = x + a,$$

$$F(z) = \sqrt{(z + a)(z - a)} = \sqrt{r_1 r_2 e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{r_1 r_2} = i\sqrt{a^2 - x^2};$$

в) коли точка z попадає на ділянку осі абсцис $x < -a$, то:

$$\theta_1 = \pi, r_1 = |x - a| = a - x ; \theta_2 = \pi, r_2 = |x + a| = -(x + a) ,$$

$$F(z) = \sqrt{(z + a)(z - a)} = \sqrt{r_1 r_2 e^{2i\pi}} = e^{i\pi} \sqrt{r_1 r_2} = -\sqrt{x^2 - a^2} .$$

Таким чином, ми установили, що якщо точка z , переміщаючись у верхній напівплощині попадає з ділянки (a, ∞) на ділянку $(-a, +a)$, а потім на ділянку $(-\infty, -a)$, то функція $F(z)$ послідовно приймає значення

$$\sqrt{x^2 - a^2}, i\sqrt{a^2 - x^2} \text{ та } -\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Рекомендую студентам для тренування роботи з аналітичними функціями перевірити, що, скажімо, якщо точка z з ділянки осі Ox $(a, +\infty)$ переходить на нижній берег розрізу, обходячи точку $x=a$ знизу), то на нижньому березі функція $F(z)$ прийматиме значення– $i\sqrt{a^2 - x^2}$, а при подальшому переході знизу на ділянку $(-\infty, -a)$, вона набуде значення $-\sqrt{x^2 - a^2}$.

Звертаємо увагу студентів, по-перше, на те, що функція $F(z)$ на верхньому березі розрізу приймає значення $i\sqrt{a^2 - x^2}$, а на нижньому березі – значення $-i\sqrt{a^2 - x^2}$ (обидва значення чисто уявні і відрізняються тільки знаками i , по-друге на те, що при обході розрізу зверху вниз і при переході на участок $(-\infty, -a)$ функція $F(z)$ прийме одне і те ж саме значення.

Останнє значить, що, взагалі кажучи, в многозв'язній області з розрізом $(-a, +a)$ у функції $F(z)=\sqrt{(z+a)(z-a)}$ ми виділили її деяку однозначну гілку. Виділення було здійснено таким чином, що ми фіксували певним чином аргументи множників $(z-a)$ і $(z+a)$ на ділянці осі абсцис $(a, +\infty)$.

Після деякого заглиблення в ТФКЗ, повертаємось до рівняння (18.5) і до більш конкретного визначення місцеположення критичних точок на сторонах пластинки. Звернемось до формули (18.4), що виражає поле швидкостей при обтіканні пластинки під кутом атаки (безциркуляційне обтікання):

$$\frac{dw}{dz} = U_\infty - iV_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (18.7)$$

Обчислимо тепер компоненти швидкості на верхній та на нижній сторонах пластинки, користуючись отриманими вище значеннями функції $F(z)=\sqrt{z^2 - a^2}$ на цих сторонах. Позначимо компоненти швидкості на верхній та на нижній сторонах відповідно як v_x^+ , v_y^+ та v_x^- , v_y^- . Із (18.7) будемо мати

$$\begin{aligned} v_x^+ - iv_y^+ &= U_\infty - iV_\infty \frac{x}{i\sqrt{a^2 - x^2}} = U_\infty - V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = v_x^+, v_y^+ = 0; \\ v_x^- - iv_y^- &= U_\infty - iV_\infty \frac{x}{-i\sqrt{a^2 - x^2}} = U_\infty + V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = v_x^-, v_y^- = 0. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Із цих формул видно, що і на нижній, и на верхній сторонах пластинки компоненти швидкості $v_y^+ = v_y^- = 0$ (як і має бути згідно з умовою непроникання сторін пластинки). Для дотичних компонентів швидкості на верхній і на нижній сторонах пластинки маємо вирази

$$v_x^+ = U_\infty - V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v_x^- = U_\infty + V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (18.9)$$

В точках гальмування потоку має перетворюватись в нуль не тільки нормальна компонента швидкості, а і дотична складова швидкості так що для визначення місцеположення точок гальмування на верхній стороні будемо мати рівняння

$$U_\infty = V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad (18.10)$$

а на нижній стороні – рівняння

$$U_\infty = -V_\infty \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (18.11)$$

Якщо $V_\infty > 0$, (тобто, якщо кут атаки $\alpha > 0$), то із (18.10) видно, що на верхній стороні координата точки гальмування потоку додатна і, розв'язавши рівняння (18.10), знайдемо

$$x_T^+ = a \cos \alpha. \quad (18.12)$$

Точно так же із рівняння (18.11) знайдемо, що на нижній стороні координата точки гальмування потоку дорівнює

$$x_T^- = -a \cos \alpha. \quad (18.13)$$

Вирази (18.12) і (18.13) уточняють і конкретизують формули (18.6), із яких раніше було незрозуміло, на якій стороні пластинки яка із двох критичних точок знаходиться, Момент на пластинку в потоці знаходиться із загальної формули Чаплигіна-Блазіуса, і обчислюється, як і раніше із загальної формули для еліпса (18.1), в якій треба покласти $b=0$, тобто:

$$M = -|v_\infty|^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (18.14)$$

Всі наші міркування про стійкість та нестійкість стану обтікання еліпса придатні і для обтікання пластинки; при цьому, обтіканню еліпса вздовж великої осі відповідає обтікання вздовж плоскої

поверхні, а обтіканню еліпса вздовж малої осі відповідає обтікання пластинки, перпендикулярне до її поверхні.

Теперь розглянемо питання про визначення підйомної сили для плоскої пластинки за допомогою створення циркуляційної течії навколо пластинки і вибору певного значення циркуляції навколо пластинки згідно до постулата Жуковського-Чаплигіна-Кутта. Правда, при разгляді пластинки з двома гострими крайками на нас чекає нова проблема, яку доведеться якось вирішувати. Справа в тому, що у пластинки дві загострені крайки: передня і задня, і в кожній із них швидкість при безциркуляційному обтіканні нескінченна. Наложивши на безциркуляційну течію обтікання пластинки чисто циркуляційним потік, ми згідно з постулатом Жуковського-Кутта-Чаплигіна можемо так вибрати цю циркуляцію, щоб в одній із вказаних двох точок швидкість стала скінченною. Але в іншій гострій крайці швидкість, як і раніше, залишиться нескінченною.

Вважаючи, що кут атаки пластинки порівняно малий, ми можемо відрізнати у неї передню і задню гострі крайки. Тому ми, як и для профілів з єдиною гострою задньою крайкою застосуємо і для пластинки постулат Жуковського-Чаплигіна по відношенню до задньої крайки пластинки. При цьому ми допускаємо існування особливої точки з нескінченною швидкістю в передній крайці. Що насправді відбувається у такому випадку в передній крайці, потребує додаткового дослідження.

Із попередніх занять ми знаємо, що циркуляція, котра забезпечує виконання постулату Жуковського в загостреній крайці $z_A = a$, виражається наступною формулою.

$$\Gamma = 4\pi kR |v_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha), \quad (18.15)$$

де R – радіус допоміжного кола на допоміжній площині ζ , на зовнішність якого відображається у теперешньому нашому випадку зовнішність пластинки (тобто, розрізу); $k = \frac{dz}{d\zeta} |_{\zeta=\infty}$; θ_0 – кутова координата образу гострої кромки $z_A = a$ на допоміжній площині ζ .

Як ми памятаємо із розв'язку задачі для еліпса, $k = \frac{c}{2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – ексцентриситет еліпса. Для пластинки: $b=0$ и $k = \frac{a}{2}$, тобто конформне

перетворення зовнішності розрізу на зовнішність кола радіуса R (формула Жуковського) має вигляд:

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

причому радіус кола $R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = 1$. Для оберненої формули Жуковського для пластинки маємо

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}, \quad (18.16)$$

звідки випливає, що образом задньої гострої крайки $z_A = a$ на колі радіуса $R = 1$ являється точка $\zeta = 1$, так що $\theta_0 = 0$. В зв'язку з цим формула (18.15) перетворюється у більш просту

$$\Gamma = 4\pi k R |v_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha) = -2\pi a |v_\infty| \sin \alpha, \quad (18.17)$$

і підйомна сила отримує значення

$$P = \rho |\Gamma| |v_\infty| = 2\pi a \rho |v_\infty|^2 \sin \alpha. \quad (18.18)$$

Оскільки підйомна сила перпендикулярна до напрямку вектора швидкості, то її проєкції на осі OX і OY будуть виражатися за формулами

$$X = \Gamma |v_\infty| \sin \alpha = -2\pi a \rho |v_\infty|^2 \sin^2 \alpha, \quad (18.19)$$

$$Y = -\rho \Gamma |v_\infty| \cos \alpha = 2\pi a \rho |v_\infty|^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (18.20)$$

А тепер питання: на пластинці всі сили тиску направлені перпендикулярно до поверхні пластинки, тобто паралельно осі OY , а звідки ж тоді взялась ненульова сила X , та до того ще і від'ємна, тобто направлена протилежно осі OX , і, значить сила тянуча? Появу цієї сили з'ясував М. І. Жуковський, він назвав її підсмоктуючою силою. Якби ми розглядали не граничну пластинку, що немає товщини, а дуже тонкий еліпс, то тоді у його переднього тонкого

торця виникла б дуже велика швидкість i , значить, понижений тиск, тоді як у заднього торця швидкість була б звичайною i , значить, тиск порівняно більший, ніж біля переднього краю. Внаслідок виникає сила, направлена протилежно осі ox від заднього краю до переднього. Ця сила зберігається навіть при граничному переході $b \rightarrow 0$, коли еліпс перетворюється в нескінченно тонку пластинку.

Знайдемо, яким буде поле швидкостей коло пластинки, якщо обтікання буде циркуляційним і циркуляція задовольнятиме постулату Жуковського-Чаплыгина в задній окрайці.

В допоміжній площині ζ комплексний потенціал у випадку розгляду еліпса був таким

$$W(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{kv_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\zeta; \quad (18.21)$$

при граничному переході до пластинки він буде дорівнювати ($k = \frac{a}{2}$, $R = 1$, $\Gamma = -2\pi a|v_\infty|\sin\alpha$):

$$W(\zeta) = \frac{a}{2}\bar{v}_\infty\zeta + \frac{av_\infty}{2\zeta} + ia|v_\infty|\sin\alpha \ln\zeta. \quad (18.22)$$

Поле швидкостей у фізичній площині при обтіканні пластинки виражається як

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}, \quad (18.23)$$

де $\frac{dW}{d\zeta}$ – похідна від функції (18.22), а $\frac{d\zeta}{dz}$ – похідна від функції (18.16). Обчисливши ці похідні і підставивши їх у формулу (18.23), знайдемо поле швидкостей навколо пластинки при циркуляційному обтіканні:

$$\frac{dw}{dz} = |v_\infty| \left\{ \cos\alpha - i\sin\alpha \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right\}. \quad (18.24)$$

Із (18.24) видно, що в задній гострій кромці швидкість скінченна, а в передній має кореневу особливість

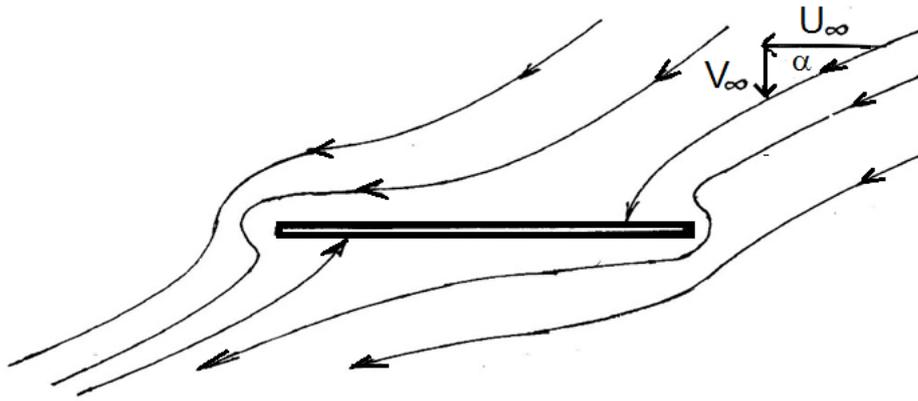


Рис. 3.16. Лінії струменю при безциркуляційному обтіканні тонкої пластинки

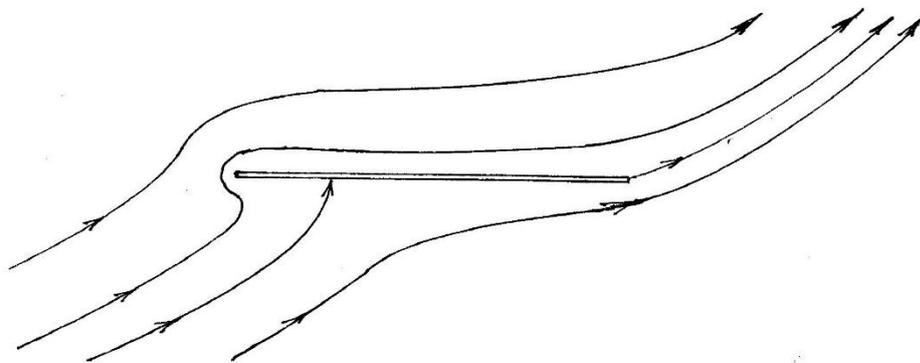


Рис. 3.17. Лінії струменю при обтіканні тонкої пластинки з циркуляцією, що забезпечує виконання постулату Жуковського-Чаплигіна в задній гострій кромці

○○○

ДЛ-№19.

Теорія тонкого крила

Як ми бачили, задача обтікання контуру (профілю) довільної форми розв'язується, якщо відомо конформне перетворення зовнішності контуру на зовнішність кола. Але задача знаходження виду цього перетворення (тобто задача знаходження потрібної аналітичної функції для довільного профілю представляє значні труднощі.

На зарі авіації метод конформних перетворень використовувався не в прямому вигляді (коли задається форма профілю і шукається відповідна іналітична функція), а в оберненому вигляді – коли задається не форма первинного профілю, а задається деяка аналітична функція і знаходиться відображення за допомогою цієї функції кола

на контур деякого профілю, що з'являється при даному відображенні. Знання цієї функції заздалегідь дозволяло розраховувати циркуляцію та підйомну силу того профілю, котрий з'являвся при вибранному відображенні. При деякому досвіді можна було підібрати так вихідну аналітичну функцію, щоб отримана форма профілю підходила для використання його в авіації.

За теперішнього часу існують численні методики, які дозволяють чисельними методами розраховувати задачі обтікання будь-якого профілю не тільки ідеальною рідиною, але і в'язкою. Але, до сих пір, тим не менш, існує потреба в пошуку аналітичних методів розрахунку обтікання профілів. Одним из таких аналітичних методів є метод розрахунку обтікання так званого «тонкого крила» («тонкого профілю»).

Профілі крил (лопатів, використовуваних у авіації і у вітроенергетиці, звичайно достатньо тонкі. Під «тонким профілем» розуміють наступне: якщо позначити максимальну товщину профілю через h , а довжину хорди через b , то для авіаційних профілів відношення $\frac{h}{b}$ складає від 6 до 12 %. Крім того, будемо припускати, що такий тонкий профіль знаходиться у потоці при достатньо малому куті атаки.

Для таких достатньо тонких профілів при малих кутах атаки можна отримати наближений розв'язок задачі, похибка котрого складає величину порядку $(\frac{h}{b})^2$.

Хай нам задано достатньо тонкий профіль. Ідея методу «тонкого профілю» заключається в тому, що крило замінюється нескінченно тонкою кривою поверхнею (профіль – лінією), що проходить посередині між верхньою та нижньою сторонами контуру і розглядається обтікання цієї кривої жорсткої поверхні, чи жорсткої лінії.

Хай рівняння цієї лінії, котру ми позначимо через C , буде

$$y=F(x). \quad (19.1)$$

Ось x виберемо так, щоб вона проходила через передній та задній кінець цієї лінії, а початок системи координат розташуємо таким чином, щоб передня гостра окрайка лінії C (точка A) мала б координату $x = -a$, а задня гостра окрайка (точка B) мала б

координату $x = +a$. Відстань АВ називають хордою профілю, довжина хорди дорівнює $l=2a$.

Будемо вважати що похідна функції $y=F(x)$, тобто кут нахилу елементів контуру С до осі OX малий. Таким чином, ми фактично перейшли до розгляду нескінченно тонкого криволінійного профілю у вигляді твердої, недеформівної лінії з рівнянням (19.1).

Отже, функція $F(x)$ задана на відрізку $(-a, +a)$, в точках $x=\pm a$ вона перетворюється в нуль, має достатньо малу похідну $F'(x)$ і відхилення лінії (тобто величина $F(x)$) від осі x мале порівняно з довжиною хорди.

Тепер розглянемо гідродинамічну сторону обтікання вказанного нескінченно тонкого профілю. Вважаємо, що тонкий профіль С обтікається поступальним потоком зліва, що має на нескінченності швидкість, рівну за величиною $|v_\infty|$ і нахилену до осі OX під малим кутом атаки α . Якби профілю в потоці не було, то течія рідини представляла б собою незбурений потік, тобто поступальну течію, з комплексним потенціалом, який ми позначимо

$$w_0 = |v_\infty|e^{-i\alpha}z. \quad (19.2)$$

Завдяки внесенню в набіжний потік тонкого профілю поступальна течія, задана потенціалом (19.2), зміниться або, як кажуть, буде збурена. Позначимо потенціал вказаного збурення через $w(z)$. Тобто, потенціал обтікання тонкого тіла будемо шукати у вигляді накладання на потенціал набіжного потоку (19.2) деякого додаткового потенціалу збурення $w(z)$, визваного присутністю в потоці профілю:

$$W(z) = |v_\infty|e^{-i\alpha}z + w(z). \quad (19.3)$$

Взагалі кажучи, у вигляді (19.3) можна шукати розв'язок задачі для будь-якого профілю (та ми його так і шукали в задачах про обтікання еліпса та еліпса і пластинки). Просто, для тонкого тіла, як ми побачимо далі, нам вдасться порівняно просто знайти розв'язок цієї задачі в формі квадратур для довільного контуру (в межах оговорених обмежень). Нехай

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (19.4)$$

тобто

$$\Psi(x, y) = |v_{\infty}|(ycos\alpha - xsin\alpha) + \psi(x, y). \quad (19.5)$$

При обтіканні довільного контуру потоком цей контур є лінією струменю, тобто функція струменю приймає сталі значення на контурі C

$$\Psi(x, y)I_C = const,$$

причому, значення цієї сталої може бути прийнято рівним нулю, так що з формули (19.5) отримуємо наступну умову для функції $\psi(x, y)$ на контурі C :

$$|v_{\infty}|(F(x)cos\alpha - xsin\alpha) + \psi(x, F(x)) = 0, \quad (19.6)$$

Вираз (19.6) можна розглядати як крайову умову для функції $\psi(x, y)$ на контурі $y=F(x)$. Але в такому вигляді ця умова незручна для розв'язання задачі: умова (19.6) по суті є нелінійною, оскільки функція $F(x)$ входить як аргумент у функцію $\psi(x, F(x))$. Враховуючи, що величина $F(x)$ мала (порівняно з власним лінійним масштабом – довжиною хорди), будемо мати:

$$\psi(x, F(x)) = \psi(x, 0) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0)F(x) + \dots = \psi(x, 0),$$

з точністю до величини другого порядку малості, оскільки малі і $F(x)$, і $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ (остання похідна представляє собою компоненту швидкості збурення v_x , яка, за припущенням також мала). Замінивши ще з точністю до величин другого порядку малості

$$cos\alpha \approx 1, \dots, sin\alpha \approx \alpha,$$

із умови (19.6) отримаємо наступну граничну умову для функції $\psi(x, y)$ на контурі C :

$$\psi(x, 0) = -|v_{\infty}|(F(x) - \alpha x). \quad (19.7)$$

Звертаємо увагу на те, що значення функції ψ в останній формулі в дійсності обчислюється не на контурі C , а на ділянці осі OX ($-a, +a; y=0$). Про таку заміну виконання граничної умови говорять: переніс граничної умови з дійсного контуру на близький контур (у нашому випадку з контуру C на його проєкцію на ось OX).

Рівняння (19.7) може бути продиференціровано по змінній x :

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} = |v_{\infty}|(\alpha - F'(x)).$$

За умовами Коші-Рімана $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y$, так що останнє співвідношення приводиться до наступної граничної умови, що з вказаною точністю виконується на ділянці: $y=0, -a < x < +a$:

$$v_y(x, 0) = |v_{\infty}|(F'(x) - \alpha). \quad (19.8)$$

Звертаємо увагу на те, що умова (19.8) виконується як на верхній стороні пластинки (точніше, на верхньому березі розрізу по осі ox від $-a$ до $+a$), так и на нижній (нижньому березі розрізу).

Отже, можна стверджувати, що задачу обтікання тонкого профілю з рівнянням $y=F(x)$ ми звели до задачі визначення однозначної аналітичної функції $\frac{dw}{dz}$ в області зовні розрізу ($y=0, -a < x < +a$), на обох берегах якого виконується гранична умова (19.8).

Ще раз акцентуємо увагу на тому, що перенесення граничних умов з контуру C на його проєкцію AB на ось OX можливо тільки завдяки зробленому припущенню про незначну зігнутість контуру C , що представляє собою сильне спрощення задачі.

Будемо вважати, що точка B тонкого профіля ($x=a$) відповідає задньому вістря первісного контуру i , у зв'язку з этим, будем шукати розв'язок задачі обтікання тонкого профілю зі скінченною швидкістю саме в точці B . При цьому, природно, на передній гострій кромці A швидкість може виявитись, взагалі кажучи, нескінченною. Єдине, що треба мати на увазі, щоб поблизу точки A швидкість зростала не сильніше, ніж $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, где δ – відстань від поточної точки до точки A .

Цікаво, що швидкість v_y , згідно з (19.8), на ділянці АВ не має розриву; складова же v_x (тобто дотична швидкість до тонкого профілю з прийнятою точністю) може (и буде) терпіти розрив. Але розрив дотичної складової на деякій лінії можна трактувати як наявність вихорового шару вздовж цієї лінії. Тому розглядувану течію можна трактувати як течію, визвану від системи вихорів, неперервно розподілених по ділянці АВ осі OX . Візьмемо тепер в площині z две точки M_1 і M_2 , розташовані симетрично відносно осі OX . Будь-який точковий вихор, що лежить на осі OX , створює в цих двох точках швидкості з однаковими складовими по осі OY і з прямо протилежними по знаку складовими вздовж осі OX . Аналогічне заключення справедливо и для всієї системи вихорів, моделюючих тонкий профіль і розподілених вздовж ділянки АВ.

Підводячи підсумок цим міркуванням про вихори, запишемо:

$$v_x(x, -y) = -v_x(x, y), \quad v_y(x, -y) = v_y(x, y), \quad (19.9)$$

тобто компонента швидкості v_y має бути парною функцією по y , а компонента v_x – непарною. При підході до ділянки АВ зверху і знизу дотична складова швидкості (тобто v_x) буде мати однаковий модуль, але протиположні знаки.

А тепер приступимо до знаходження розв'язку поставленої задачі. Розглянемо наступну функцію, аналітичну в області з вказаним розрізом $(-a, +a)$

$$f(z) = \frac{dw}{dz} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}, \quad (19.10)$$

причому домовись, що при $z = x > a$ береться додатне значення кореня. При цьому функція $\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}$ являється голоморфною і однозначною в області з розрізом; на нескінченності ця функція прямує до одиниці. Функція $f(z)$ виявляється однозначно аналітичною функцією, що згасає на нескінченності (збурена швидкість $\frac{dw}{dz}$ на нескінченності по фізичному смислу має згасати).

Для представлення аналітичної функції зовні розрізу, і згасаючої в нескінченності, можна скористатись її представленням за формулою

Коші. А саме: візьмемо деякий контур L , охоплюючий розріз, и деяку точку z , що лежить зовні цього контуру. Поточну точку на контурі L позначимо через ζ . Тоді згідно до формули Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \quad (19.11)$$

де криволінійний інтеграл виконується вздовж контуру L за годинниковою стрілкою. Оскільки в області аналітичності контур інтегрування можна як завгодно деформувати, то ми стягнемо тепер контур L до двічі проходного відрізка AB (по верхньому берегу від A до B і по нижньому берегу – від B до A), а також і, взагалі кажучи, по двох півколах нескінченно малих радіусів, охоплюючих кінцеві точки A і B . Будемо вважати, що інтеграли по цих півколах прямують до нуля разом з радіусами цих півкіл.

Для виконання інтегрування вздовж берегів розріза, введемо позначення: на верхньому березі $\frac{dw}{dz} = v_x^+ - iv_y^+$, а на нижньому – $\frac{dw}{dz} = v_x^- - iv_y^-$. Далі, на верхньому березі розрізу маємо:

$$\sqrt{\frac{\xi+a}{\xi-a}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\xi+a}{a-\xi}} = -i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}, \quad (19.12)$$

А на нижнем березі

$$\sqrt{\frac{\xi+a}{\xi-a}} = -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{\xi+a}{a-\xi}} = i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}. \quad (19.13)$$

Із виразу (19.11) тепер отримуємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(-i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}})(v_x^+ - iv_y^+) - i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}(v_x^- - iv_y^-)}{\xi-z} d\xi. \quad (19.14)$$

Враховуючи вказані властивості парності і непарності компонентів швидкості зверху і знизу ділянки AB , а саме, те, що

$$v_x^+ = -v_x^-, \quad v_y^+ = v_y^- = v_y,$$

після приведення подібних членів, із виразу (19.14) отримаємо

$$\frac{dw}{dz} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} = -\frac{1}{i\pi} \int_{-a}^a \frac{v_y(\xi, 0)}{\xi-z} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (19.15)$$

Подставивши сюди значення $v_y(x, 0)$ із граничної умови (19.8), отримуємо остаточно розв'язок задачі у вигляді «квадратури»:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{|v_\infty|}{i\pi} \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \int_{-a}^a \frac{(F'(\xi) - \alpha)}{\xi-z} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (19.16)$$

Із останньої формули видно, що в задній гострій кромці особливість відсутня, тоді як в передній гострій кромці ($z=-a$) збурена швидкість $\frac{dw}{dz}$ має особливість порядку $\frac{1}{\sqrt{z+a}}$.

Формула (19.16) сразу ж дозволяє знайти циркуляцію навколо профілю (тобто обчислити під'ємну силу) і момент сил реакції рідини. Для цього потрібно вираз (19.16) розкласти в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки $z=\infty$. Для цього розкладемо функції, присутні у виразі (19.16) і залежні від змінної z , в ряд по оберненим степеням змінної z (при $z \rightarrow \infty$). Маємо

$$\sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a}{z}}{1+\frac{a}{z}}} = 1 - \frac{a}{z} + \dots, \quad \frac{1}{\xi-z} = -\frac{1}{z(1-\frac{\xi}{z})} = -\frac{1}{z} - \frac{\xi}{z^2} - \dots$$

Підставляючи ці розкладення у вираз (19.16), отримаємо, що для $\frac{dw}{dz}$ при $z \rightarrow \infty$ виконується розвинення такого вигляду

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (19.17)$$

де

$$\Gamma = 2|v_\infty| \int_{-a}^a (F'(\xi) - \alpha) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi, \quad (19.18)$$

$$A_2 = -\frac{|v_\infty|}{i\pi} \int_{-a}^a (F'(\xi) - \alpha) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi. \quad (19.19)$$

Оскільки

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi = \int_{-a}^a \frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}} d\xi = \pi a; \quad \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi = \frac{\pi a^2}{2},$$

то отримаємо наступний вираз для циркуляції

$$\Gamma = 2|v_\infty| \int_{-a}^a F'(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi - 2\pi a |v_\infty| \alpha, \quad (19.20)$$

а для коефіцієнта A_2 – вираз

$$A_2 = \frac{i|v_\infty|}{\pi} \int_{-a}^a F'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi - \frac{i|v_\infty| a^2 \alpha}{2}. \quad (19.21)$$

Для визначення проєкцій сумарної сили на координатні осі і момента (відносно початку координат) скористуємось формулами Чаплигіна-Блазіуса, якими ми вже користувались:

$$X - iY = i\rho\Gamma\bar{v}_\infty, \quad M = \text{Re}\{-2\pi i\rho A_2\bar{v}_\infty\}.$$

Далі, з прийнятою точністю

$$\bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha} = |v_\infty| (\cos\alpha - i\sin\alpha) = |v_\infty| (1 - i\alpha),$$

і для силових факторів отримаємо

$$X = \rho\Gamma|v_\infty|\alpha = -2\pi a\rho|v_\infty|^2\alpha^2 + 2\rho|v_\infty|^2\alpha \int_{-a}^a F'(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi, \quad (19.22)$$

$$Y = -\rho\Gamma|v_\infty| = 2\pi a\rho|v_\infty|^2\alpha - 2\rho|v_\infty|^2 \int_{-a}^a F'(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi, \quad (19.23)$$

$$M = -\pi\rho|v_\infty|^2 a^2 \alpha + 2\rho|v_\infty|^2 \int_{-a}^a F'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi. \quad (19.24)$$

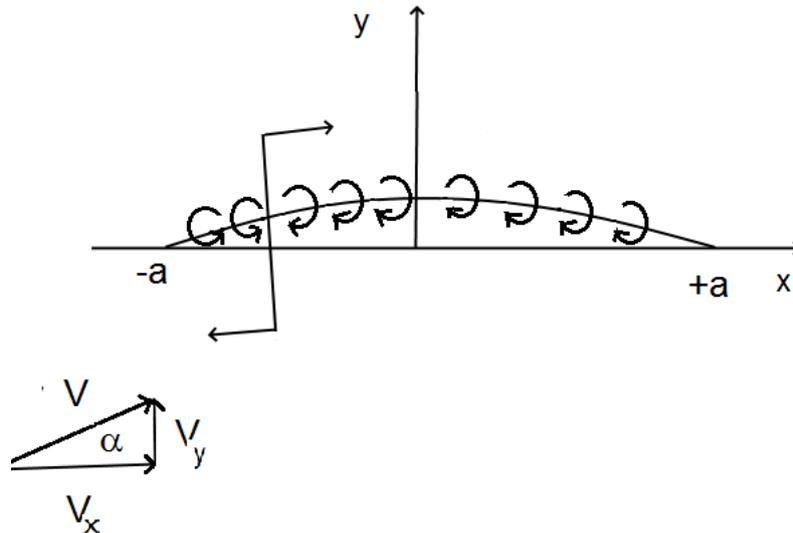


Рис.3.18. До теорії тонкого профілю

○○○

ДЛ-№20.

Деякі приклади застосування теорії тонкого крила

Розглянемо деякі приклади застосування теорії тонкого крила. Першим прикладом розглянемо плоску пластинку, яка простягається від точки $z=-a$ до точки $z=a$. В цьому випадку $F(x)=0$, $F'(x) = 0$, і із формул (19.20), (19.22)–(19.24) отримуємо наступні вирази для циркуляції, проєкцій сил і момента для плоскої пластинки в рамках теорії тонкого крила:

$$\Gamma = -2\pi a |v_\infty| \alpha ; \quad X = -2\pi a \rho |v_\infty|^2 \alpha^2 ; \quad (20.1)$$

$$Y = 2\pi a \rho |v_\infty|^2 \alpha ; \quad M = -\pi \rho |v_\infty|^2 a^2 \alpha .$$

Якщо ми повернемося трохи назад, де ми розглядали точний розв'язок задачі про пластинку, то там були отримані такі формули

$$\Gamma = -2\pi a |v_\infty| \sin \alpha ; \quad X = -2\pi a \rho |v_\infty|^2 \sin^2 \alpha ; \quad (20.2)$$

$$Y = 2\pi a \rho |v_\infty|^2 \sin \alpha \cos \alpha ; \quad M = -\pi \rho |v_\infty|^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Як видно, наближена теорія тонкого крила дає результати, що погоджуються з результатами, отриманими по точній теорії з заміною тригонометричних формул їх наближеннями з точністю до величин другого порядку малості.

Знайдемо тепер поле швидкості в околі пластинки в рамках теорії тонкого крила. Це поле визначається за формулою (19.16), яка в даному випадку для плоскої пластинки приймає вигляд:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{|v_\infty| \alpha}{i\pi} \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \int_{-a}^a \frac{1}{\xi-z} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi. \quad (20.3)$$

Залишається тільки обчислити інтеграл у формулі (20.3) (комплексна змінна z у цьому інтегралі служить параметром) і отримати явний аналітичний розв'язок. Цей інтеграл обчислюється елементарно, без труда, але, раз уже ми працюємо з аналітичними функціями, то покажемо, як можна застосувати формулу Коші для обчислення цього інтеграла.

Розглянемо функцію

$$g(z) = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} - 1,$$

яка голоморфна на всій площині z с розрізом по відрізьку АВ осі OX і в нескінченності перетворюється уль Візьмемо, як і раніше, контур L , охоплюючий розріз і точку z зовні цього контуру. Тоді до цієї функції і цього контуру застосовна формула Коші у попередньому вигляді, а саме:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta-z}, \quad (20.4)$$

де інтеграл обчислюється по контуру L при обходе контуру за годинниковою стрілкою (нагадаємо, що формула Коші (20.4) в данному випадку справедлива тільки для функцій, що перетворюються в нуль в нескінченності; саме тому ми при розгляді функції $g(z)$ від корня $\sqrt{\frac{z+a}{z-a}}$ відняли одиницю!). Як ми вже говорили при розгляді інтеграла для функции $f(z)$ (19.11), тут контур можна

деформувати довільним чином, впритул до того, щоб «укласти» його на берег розрізу, і тоді формула Коші (20.4) набуде вигляду:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g^+(\xi) - g^-(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (20.5)$$

де через $g^\pm(\xi)$ позначено значення функції $g(z)$ на верхньому та нижньому берегах розрізу. Як ми вже розповідали раніше, нетрудно отримати, що

$$g^+(\xi) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1 = -i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1,$$

$$g^-(\xi) = -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1 = i \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} - 1,$$

так що із формули (20.6) маємо

$$\sqrt{\frac{z+a}{z-a}} - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g^+(\xi) - g^-(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \frac{d\xi}{\xi - z},$$

звідки знайдемо, що

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \frac{d\xi}{\xi - z} = \pi \left\{ 1 - \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \right\}.$$

Порівнюючи цей вираз з (20.6), знайдемо для поля збурення $\frac{dw}{dz}$ при обтіканні тонкої пластинки в рамках теорії тонкого профілю вираз:

$$\frac{dw}{dz} = i|v_\infty| \alpha \left(1 - \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right). \quad (20.7)$$

Отриманий вираз є поле збуджених швидкостей, і, якщо тепер взгадати формулу (19.3), то для поля швидкостей обтікання пластинки в рамках моделі тонкого тіла отримаємо:

$$\frac{dW}{dz} = |v_\infty| e^{-i\alpha} + \frac{dw}{dz}.$$

Записавши тут перший доданок в наближенні теорії тонкого профілю і використовуючи для $\frac{dw}{dz}$ вираз (20.7), отримаємо наближене поле швидкостей для обтікання пластинки у вигляді

$$\frac{dW}{dz} = |v_\infty| \left(1 - i \alpha \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right). \quad (20.8)$$

котре від точного розв'язку

$$\frac{dW}{dz} = |v_\infty| \left\{ \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right\}$$

відрізняється тільки наближенням тригонометричних функцій.

Із (20.8) отримуємо наступні формули для компонентів швидкості v_x^\pm на верхній і на нижній сторонах пластинки (в наближенні теорії тонкого профілю і з умовою виконання постулату Жуковського-Чаплигіна в задній кромці):

$$v_x^\pm = |v_\infty| \left\{ 1 \pm \alpha \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} \right\}. \quad (20.9)$$

Розрив дотичних швидкостей на деякій лінії можна завжди розглядати як систему неперервних вихорів, розподілених вздовж цієї лінії. В конкретному випадку ми маємо плоску пластинку (тобто, пряму лінію), яка простяглася від точки $z=-a$ до точки $z=a$. Якщо ввести поняття погонної інтенсивності вихорів (тобто циркуляції вихорів у розрахунку на одиницю довжини лінії $\gamma(\xi)$), то із теореми Стокса неважко отримати, що:

$$\gamma(\xi) = v_x^- - v_x^+ = -2|v_\infty| \alpha \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}. \quad (20.10)$$

Із останньої формули видно, що інтенсивність вихорів перетворюється в нуль на задній гострій кромці пластинки, як аеродинамічного профілю, де швидкість залишається скінченною; при наближенні до передньої кромки інтенсивність вихорів нескінченно зростає, якраз з цим пов'язана наявність нескінченної

швидкості поблизу переднього краю і виникнення підсмоктувальної сили Жуковського.

В якості другого прикладу візьмемо профіль у вигляді дужки в формі параболічної дуги:

$$F(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \quad (20.11)$$

Із формул (19.20), (19.22)–(19.24) отримаємо:

$$\Gamma = -2\pi a |v_\infty| \left(\alpha + \frac{h}{a}\right); \quad X = -2\pi a \rho |v_\infty|^2 \alpha \left(\alpha + \frac{h}{a}\right); \quad (20.12)$$

$$Y = 2\pi a \rho |v_\infty|^2 \left(\alpha + \frac{h}{a}\right); \quad M = -\pi \rho |v_\infty|^2 a^2 \alpha.$$

Цікаво, що в першому наближенні, величина моменту дугового профілю і прямолінійного профілю однакові. Далі, циркуляція, а, значить, і підйомна сила перетворюється в нуль при $\alpha = -\frac{h}{a}$, тобто, критичною віссю (віссю нульової підйомної сили) служить лінія, що проходить через вершину дужки і її задній кінець.

Користуючись формулою (20.7), нетрудно отримати вираз для швидкості збурення

$$\frac{dw}{dz} = i |v_\infty| \left\{ \alpha + \frac{2hz}{a^2} - \left(\alpha + \frac{2h}{a} + \frac{2hz}{a^2}\right) \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right\}. \quad (20.13)$$

Зведення задачі обтікання тонкого профілю до деякого сингулярного інтегрального рівняння

Використання апарату теорії аналітичних функцій для розв'язання задач обтікання довільного тонкого профілю приводить нас до цікавого нового класу рівнянь – до так званих сингулярних інтегральних рівнянь. Познайомимось із цим питанням поближче.

Ми вже неодноразово зазначали, що на поверхні тонкого профілю дотична складова швидкості зверху і знизу зазнає розрив, завдяки чому лінію розриву дотичних швидкостей можна трактувати як лінію, на якій неперервним чином розподілені точкові вихори.

Згадаємо, що якщо в деякій точці z_0 знаходиться точковий вихор, то поле швидкостей, яке він створює навколо себе, визначається формулою

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0}. \quad (20.14)$$

Нехай тепер, для простоти, задано деякий участок l осі абсцис, на якому вихори розподілені неперервно с погонною інтенсивністю $\gamma(x)$; останнє означає, що, якщо в околі точки x_0 взяти нескінченно малый участок вихорового шару Δx , то загальна інтенсивність вихорів на цьому частку (суммарна їх циркуляція) буде дорівнювати $\Delta\Gamma = \gamma(x_0)\Delta x$. Тепер разіб'ємо весь вихоровий шар довжиною l на сукупність нескінченно малих ділянок довжиною Δx и в кожній із цих малих ділянок (наприклад, посередині) виберемо точку з координатою x_j . Загальна циркуляція всіх вихорів на кожній такій ділянці (з точністю до величин другого порядку малості порівняно з Δx) буде дорівнювати $\Delta\Gamma_j = \gamma(x_j)\Delta x$. Кожна така ділянка створює в околі себе поле швидкостей, спряжена швидкість якого (з точністю до величин другого порядку малості порівняно з Δx) дорівнює:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_j = \frac{\Delta\Gamma_j}{2\pi i} \frac{1}{z-x_j} = \frac{\gamma(x_j)\Delta x}{2\pi i} \frac{1}{z-x_j}.$$

Результуюча швидкість від цієї системи вихоревих ділянок буде дорівнювати

$$\frac{dw}{dz} = \sum \frac{\gamma(x_j)\Delta x}{2\pi i} \frac{1}{z-x_j},$$

де підсумовування відбувається по всіх j , тобто по всіх ділянках нашого розбиття. В граничному переході, коли кількість ділянок прямує до нескінченності, остання інтегральна сума перетворюється в інтеграл по всій довжині вихорового шару l , скажімо, от $x=-a$ до $x=a$, $l=2a$.

Отже, вихоровий шар, розташований на ділянці осі ОХ з погонною інтенсивністю, заданою функцією $\gamma(x)$, створює навколо себе гідродинамічне поле швидкостей, що виражається інтегралом

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi)d\xi}{z-\xi}, \quad (20.15)$$

де змінна інтегрування позначена літерою ξ , а координата точки, в якій обчислюється спряжена швидкість (так званна точка спостереження) позначена літерою z .

Застосуємо останню формулу до розв'язку задачі про обтікання тонкого профілю. Будемо шукати поле збурення при обтіканні тонкого профілю $y=F(x)$ у вигляді (20.15), де підінтегральна функція $\gamma(x)$ підлягає визначенню із граничної умови, якою виступає вираз (19.8):

$$v_y(x, 0) = |v_\infty|(F'(x) - \alpha). \quad (-a < x < a). \quad (20.16)$$

Тепер, здавалось би, положим в рівнянні (20.15) $z=x$, де $-a < x < a$, виділимо із нього уявну частину (це якраз і буде компонента $-v_y$), прирівняємо її до заданого значення $v_y(x, 0)$ по формулі (19.39) и отримаємо деяке рівняння для визначення невідомої функції $\gamma(x)$. Але тут на нас очікують дві особливості, а саме: а) якщо подставити в підінтегральний вираз формули (20.15) $z=x$, но інтеграл виявиться сингулярним і ми знаємо, що компоненти швидкості v_x^\pm повинні відрізнитись знаками, а після підстановки в інтеграл (20.15) замість z величини x , не видно, звідки могла б з'явитися різниця в компонентах швидкості на верхній та на нижній сторонах тонкого профілю.

А справа тут в тому, що інтеграл виду

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}, \quad (20.17)$$

(тобто, інтеграл типа Коші), як функція z , не є неперервним при пересіканні ділянки осі ox , на якій задана функція $\varphi(x)$: у нього є границя при $z \rightarrow x + i0$ (тобто при прагненні до осі абсцис зверху) і є границя при $z \rightarrow x - i0$ (тобто при прагненні до осі абсцис знизу) і є власне значення, яке визначається формулою якщо покласти у виразі (20.17) $z=x$. Граничні значення функції $\Phi(z)$ при підході до осі абсцис зверху обозначимо через $\Phi^+(x)$, знизу – через $\Phi^-(x)$, а власне значення цієї функції при $z=x$ позначимо звичайно $\Phi(x)$. Із ТФКЗ відомі так звані формули Сохоцького:

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \Phi(x), \quad \Phi^-(x) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + \Phi(x),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - x},$$

є особливим сингулярним інтегралом, що обчислюється за спеціальною процедурою, яка і називається «інтегралом в смислі Коші».

Застосувавши тепер формули Сохоцького до інтеграла (20.17), будемо мати:

$$v_x^+ - i v_y^+ = -\frac{1}{2} \gamma(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad v_x^- - i v_y^- = \frac{1}{2} \gamma(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi}.$$

Якщо скласти ці рівняння, то враховуючи, що

$$v_x^+ + v_x^- = 0, \quad \text{а} \quad v_y^+ + v_y^- = 2v_y(x, 0),$$

де v_y визначається за формулою (20.16), отримаємо наступне інтегральне рівняння для визначення функції $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi} = |v_\infty| (F'(x) - \alpha). \quad (20.18)$$

Ще раз підкреслимо, що це рівняння особливе – це так зване сингулярне інтегральне рівняння, оскільки присутній тут інтеграл у звичайному смислі (смыслі Рімана) не існує.

○○○

ДЛ-№21.

Просторова задача про безвихоровий рух тіла в ідеальній рідині

Безвихорова просторова течія рідини. Перейдемо до розгляду деяких просторових течій рідини. Як ми вже говорили, якщо течія рідини безвихорова, то для такої течії можна ввести потенціал

швидкості, тобто таку скалярну функцію $\varphi(x, y, z, t)$, що проєкціями швидкості будуть похідні

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (21.1)$$

Тепер рівняння нерозривності нестисливої рідини

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

буде означати, що функція $\varphi(x, y, z, t)$ має задовольняти рівнянню Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (21.2)$$

Тиск у рідині буде визначатись інтегралом Коші-Лагранжа (у випадку, якщо течія рідини нестационарна)

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2} - \Pi + F(t), \quad (21.3)$$

де Π – потенціал масових сил, а $F(t)$ – довільна функція часу, або інтегралом Бернуллі

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Pi = \text{Const}, \quad (21.4)$$

якщо течія рідини у вибраній системі стаціонарна.

Розв'язок задачі про рух кулі в ідеальній рідині. Серед аналітичних розв'язків задач про рух просторового тіла в ідеальній нестисливій рідині найбільш простою є задача про рух кулі, що зв'язано з наявністю у такій задачі симетрії. Нехай куля радіуса a рухається поступально зі сталою швидкістю U в одному і тому ж напрямку, вздовж якого ми направимо вісь OZ (рис.3.18).

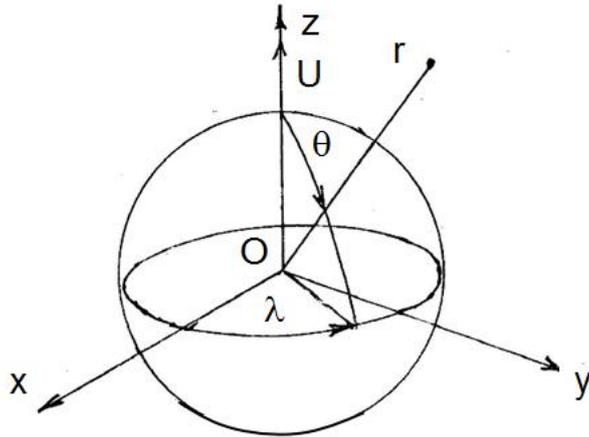


Рис. 3.18. До задачі руху кулі в нестисливій рідині

Введемо сферичну систему координат (r, θ, λ) з початком в центрі кулі, зв'язану з декартовими координатами за допомогою співвідношень

$$x=r \sin \theta \cos \lambda, \quad y=r \sin \theta \sin \lambda, \quad z=r \cos \theta .$$

Полярну ось OZ , як уже сказано, направляємо вздовж вектора швидкості. Запишемо рівняння Лапласа для потенціалу у сферичній системі координат

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (21.5)$$

Гранична умова непроникання на поверхні кулі S має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n,$$

де u_n – проекція на напрямок нормалі швидкості розглядуваної точки поверхні кулі, причому напрямок нормалі до поверхні кулі співпадає з напрямком радіуса-вектора. Оскільки, за умовою, куля рухається в напрямку осі OZ зі швидкістю U , то

$$u_n = U \cos \theta,$$

тобто, гранична умова має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta \text{ при } r=a. \quad (21.6)$$

Отже, гідродинамічна задача про рух кулі (сфери) у нестисливій рідині полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок рівняння Лапласа (21.5), щоб він задовольняв граничній умові (21.6) на поверхні кулі (сфери) і, крім того, цей розв'язок має задовольняти умові затухання збурень на нескінченності.

Приступаємо до розв'язання задачі. Із міркувань симетрії заключаємо, що всі меридіани кулі мають бути рівноважними, тобто шукана функція φ не повинна залежати від змінної λ . Крім того, форма граничної умови підказує, що можна зробити спробу шукати розв'язок у вигляді

$$\varphi(r, \theta) = \Phi(r) \cos \theta, \quad (21.7)$$

де $\Phi(r)$ – така функція, що вираз (21.7) має задовольняти рівнянню Лапласа, тобто, як випливає із рівняння Лапласа (21.5), функція $\Phi(r)$ має задовольняти рівнянню:

$$r^2 \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + 2r \frac{d\Phi}{dr} - 2\Phi = 0. \quad (21.8)$$

Рівняння виду (21.8) належить до типу так званих рівнянь Ейлера і має розв'язки виду $\Phi = Ar^k$. Підставивши цю форму до рівняння (21.8), для визначення показника k отримаємо характеристичне рівняння

$$k(k+1) - 2 = 0,$$

звідки знайдемо два кореня $k_1 = 1$ і $k_2 = -2$. Звідси виходить, що загальним розв'язком рівняння (21.8) є функція

$$\Phi(r) = Ar + \frac{B}{r^2}. \quad (21.9)$$

Константу A треба прийняти рівною нулю, інакше на нескінченності не отримаємо нульової швидкості збурень. Остаточно, розв'язок задачі для кулі, тобто загальний розв'язок рівняння Лапласа для кулі повинен мати вигляд:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{B \cos \theta}{r^2}.$$

Константу B знаходимо із граничної умови (21.6); вона дорівнює

$$B = -\frac{Ua^3}{2}.$$

Отже, шукана течія рідини описується потенціалом

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} \quad (21.10)$$

Важливо зрозуміти, потенціал якого руху ми знайшли, тобто, яку швидкість ми знайдемо, коли обчислимо градієнт функції (21.10). Виявляється, що ми знайшли потенціал абсолютного руху рідини, розрахований в зв'язаній системі координат, що рухається разом зі сферою. Якщо ж ми захочемо знайти потенціал обтікання кулі потоком рідини з швидкістю U в напрямку від'ємної осі OZ (тобто в лабораторній системі координат), де φ дорівнює

$$\varphi = -Uz = -Urcos\theta, \quad (21.11)$$

то ми маємо накласти останню течію на попередню, внаслідок чого отримаємо результуючу течію з потенціалом

$$\varphi = -Urcos\theta - \frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} = -U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta. \quad (21.12)$$

Отримана течія – це усталене обтікання сфери в «лабораторній системі координат» (при обтеканні сфери в аеродинамічній трубі). Оскільки отримана течія є усталеною, то для визначення тиску в

такому потоці ми можемо використовувати інтеграл Бернуллі в формі:

$$\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}.$$

Якщо ми продиференціюємо потенціал (21.12), то ми знайдемо компоненти відносної швидкості, тобто компоненти швидкості обтекання кулі

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta,$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta.$$

$$v_{\lambda} = 0.$$

Зокрема, на поверхні кулі ($r = a$) маємо:

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = \frac{3}{2} U \sin \theta,$$

і із інтеграла Бернуллі для розподілу тиску по поверхні кулі отримуємо:

$$\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4}\right) U^2 \sin^2 \theta, \quad (21.13)$$

тобто

$$p = p_0 - \frac{9}{8} \rho U^2 \sin^2 \theta.$$

На поверхні кулі в околі екватора ($\theta = \frac{\pi}{2}$) швидкість рідини вздовж меридіана досягає максимального значення, у півтора раза більшого, ніж швидкість набіжного потоку (давайте згадаємо, що в аналогічній плоскій задачі при обтіканні циліндра максимальна швидкість в два рази більша, ніж в набіжному потоці!). На поверхні кулі є дві точки гальмування потоку, в яких модуль швидкості дорівнює нулю: «північний полюс» ($\theta = 0$) і «південний полюс» ($\theta = \pi$). Тиск в

точках гальмування потоку досягає максимального значення p_0 , рівного

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}. \quad (21.14)$$

Розподіл тиску вздовж меридіана слідує формулі

$$p = p_0 - \frac{9}{8}\rho U^2 \sin^2 \theta. \quad (21.15)$$

Із останньої формули видно, що розподіл тиску симетричний відносно екваторіальної площини. Звідси витікає, що тиск, прикладений до поверхні кулі, взаємно урівноважується. Таким чином, шар при рівномірному поступальному русі в рідині (ідеальній) не зазнає ніякого опору з боку рідини. Цей теоретичний результат (зв'язаний з припущенням про відсутність в'язкості в рідині) різко суперечить досвідним фактам і носить, як ми вже неодноразово говорили, назву парадоксу Ейлера-Даламбера. Він показує, що в дійсності безвідривне обтікання кулі не має місця: з поверхні кулі зриваються вихори, котрі видозмінюють як картину течії, так и расподіл тиску по поверхні кулі.

Якщо в формулу (21.15) внести вираз для p_0 із (21.14), то отримаємо такий взаємозв'язок між тиском на поверхні кулі і тиском в набіжному потоці

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{9}{8}\rho U^2 \sin^2 \theta,$$

або, згадавши про коефіцієнт надлишкового тиску \bar{p} , отримаємо:

$$\bar{p} = \frac{2(p-p_\infty)}{\rho U^2} = 1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta. \quad (21.16)$$

Із формули (21.16) зручно знайти місцеположення тих точок на рухомій, або на обтічній кулі, в яких місцевий тиск дорівнює тиску в набіжному потоці. Це ті точки, в яких $\bar{p} = 0$. Для цих точок маємо рівняння:

$$\sin^2 \theta = \frac{4}{9},$$

тобто

$$\sin \theta = \pm \frac{2}{3},$$

або $\theta_1 \cong \pm 42^\circ$, $\theta_2 \cong \pm 138^\circ$. Отже, на паралелі, що відстоїть від «північного полюса» на 42° (потік рідини набігає на умовний «північний» полюс) тиск виявляється рівним тиску в набіжному потоці. Це значить, що якщо невелику сферу видвинути на штанзі перед літальним апаратом, то, замірявши за допомогою манометра тиск на вказаній паралелі, ми тим самим визначимо тиск в набіжному потоці p_∞ , а замірявши тиск в лобовій точці (на «північному» полюсі) p_0 , ми тим самим із рівняння (21.14) знайдемо швидкість руху літального апарату:

$$U = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_\infty)}{\rho}}. \quad (21.17)$$

○○○

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ЗА РОЗДІЛОМ 3

1. Покажіть, що необхідною та достатньою умовою існування комплексного потенціалу $W(z)$ для двовимірного плоского нестискаемого потоку газу є $\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$; $\partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$.

2. Як змінюється швидкість і тиск у потоці від плоского точкового джерела якщо віддалятися від нього.

3. Нехай комплексний потенціал течії заданий $W(z) = 2 \exp(-i\frac{\pi}{4}z)$, запишіть вираз для функції току, знайдіть координатні швидкості і швидкість потоку у точці $x=1$, $y=1$.

4. За допомогою конформного відображення перевести коло $|z-a| < R$ на коло $|w| < 1$.

5. Знайдіть комплексний потенціал потоку рідини з напівплощини $y > 0$ в напівплощину $y < 0$ витратою Q крізь отвір у стінці $y = 0$ між точками $x = \pm 1$.

РОЗДІЛ 4. ВИХОРОВІ ТЕЧІЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

ДЛ–№22.

Вихорові течії ідеальної рідини.

В попередній лекції було розглянуто приклад безвихорової течії – обтікання сфери безвихоровим потоком рідини. Тоді ми цю задачу розв'язали за допомогою введення потенціалу швидкостей. Справа в тому, що якщо для векторного поля швидкостей $\vec{v}(x, y, z)$ виконується умова

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{v} \equiv 0,$$

то тоді існує така функція $\varphi(x, y, z, t)$, що

$$\vec{v}(x, y, z) = \text{grad} \varphi(x, y, z, t),$$

яка і являється потенціалом швидкостей течії рідини.

Тепер ми будемо розглядати такі течії ідеальної рідини, у яких вектор $\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{v}$ відрізняється від нуля хоча б в деякій частині розглядуваної рідини. Такі течії ми будемо називати вихоровими течіями рідини.

Вихорові течії рідини можуть бути виявлені при самому елементарному спостереженні. Таким є, наприклад, течія води в річці в тих місцях, де вона обтікає бики мосту: за останніми легко наблюдаються вихорові області, добре видимі з мосту. При русі в рідині будь-якого тіла, наприклад, корабля, за ним також наблюдаються вихорові зони. Ми перш за все звертаємо вашу увагу на те, що на утворення цих вихорів треба, очевидно, затратити деяку енергію, яка, витрачається за рахунок енергії рухомого тіла, яке, таким чином, повинно переборювати деякий опір рідини і виконувати при своєму русі роботу по переборюванню цих сил опору. Цей опір, визваний утворенням вихорів, називають вихоровим опором.

Далі, циклони і антициклони, котрі обумовлюють певним чином погоду тих місцевостей землі, над якими вони розвиваються, з точки зору гідродинаміки, представляють собою також вихорові утворення; ще більш різкою формою вихорових утворень в атмосфері являються

смерчі, природа яких до сих пір не отримала адекватної математичної моделі.

Якщо розглянути рух окремої частинки рідини, то, згідно з формулами Коші-Гельмгольца, цей рух можна розкласти на три види руху: поступальний рух, деформацію частинки і її обертальний рух. Вихор вектора швидкості якраз визначає кутову швидкість обертання частинки: вихор в два рази більший, ніж кутова швидкість обертання малої частинки. Таким чином, вихор швидкості характеризує обертальний рух окремих частинок, а не їх поступаний рух.

Можна представити собі і такий рух рідини, при якому кожна частинка буде рухатись тільки поступально, так що цей рух буде безвихорим, тоді як вся маса рідини, як ціле, буде рухатись по колу. Для цього заставимо прямокутну посудину з рідиною передвигатись паралельно самій собі, причому так, щоб її центр описував коло. Ми тоді отримаємо безвихоровий рух рідини, що знаходиться у посудині.

Протилежним прикладом є рух рідини шарами, що визначається формулами:

$$v_x = ay, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Тут кожний шар рідини, паралельний площині OXY , рухається паралельно осі OX , причому швидкість руху тим більша, чим далі розглядуваний шар відстоїть від площини OXZ . У цьому русі

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -a,$$

тобто, розглядувана рідина всюди завихорена, хоча вся маса у цілому здійснює поступальний рух. Отже, потрібно мати на увазі різницю між буденним поняттям про вихоровий рух, як про рух по колах і гідродинамічним поняттям про вихори як про наявність обертання кожної окремої частинки.

Тепер згадаємо деякі кінематичні поняття із теорії вихорових течій.

Вихорова лінія: *вихоровою лінією називається така лінія, в кожній точці якої вихор швидкості направлений по дотичній до цієї лінії.* Диференціальне рівняння вихорової лінії має вигляд

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

Якщо взяти замкнуту криву C і через кожну її точку провести вихорову лінію, то отримаємо деяку вихорову поверхню, створену із вихорових ліній (вихорових ниток); *сукупність цих вихорових ниток утворює вихорову трубку.*

Існує тісний зв'язок між поняттям вихора вектора і поняттям циркуляції вектора по замкнутому контуру. Нагадаємо поняття циркуляції вектора швидкості по замкнутому контуру L ; так називається інтеграл по замкнутому контуру

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Згідно з формулою Стокса, має місце наступна рівність:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (22.1)$$

де поверхневий інтеграл береться по поверхні Ξ , обмеженій контуром L ; \vec{n} – нормаль на поверхні Ξ , направлена таким чином, щоб з кінця вектора \vec{n} орієнтація обходу контуру здавалась би направленою проти ходу стрілки годинника.

Нами було показано, що завжди має місце рівність

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

За допомогою останньої рівності була доказана наступна теорема про сталість циркуляції вдовж вихорової трубки: *величини циркуляції по будь-якому замкнутому контуру, що охоплює дану вихорову трубку один раз, однакові між собою.* Це значення циркуляції було названо «інтенсивністю вихорової трубки». З другого боку, інтенсивність вихорової трубки дорівнює потоку вихора через довільний поперечний переріз вихорової трубки.

Теорема про сталість інтенсивності вихорової трубки вздовж її осі була відкрита Гельмгольцем, творцем теорії вихорів.

Теорема Томсона. В 1858 р. Гельмгольц у своєму знаменитому мемуарі установив диференціальні рівняння для вектора вихора $\vec{\Omega}$, із

Розділ 4. Вихорові течії ідеальної рідини

яких він сформулював фундаментальні теореми про збереження вихорових ліній та інтенсивностей вихорових трубок. Пізніше теореми Гельмгольца були іншим способом доведені В. Томсоном. Метод Томсона ґрунтується на застосуванні поняття циркуляції, яка тісно пов'язана з поняттям вихора.

Почнемо вивчення вихорових рухів з викладання методу Томсона. Розглянемо в момент часу t_0 яку-небудь лінію, проведену через частинки рідини. В подальшому будемо цю лінію розглядати як рідинну лінію, тобто, як створену із одних и тих же частинок. В будь-який інший момент часу t частинки, що утворювали лінію A_0B_0 , будуть утворювати деяку нову лінію AB .

Розглянемо тепер лінійний інтеграл від швидкості \vec{v} вздовж лінії AB , тобто вираз

$$J = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (22.2)$$

У випадку замкнутості лінії AB інтеграл J перетворюється в циркуляцію швидкості по замкнутому контуру AB .

У момент часу $t' = t + \Delta t$ рідинні частинки утворюють нову лінію $A'B'$, і лінійний інтеграл по $A'B'$ буде мати значення

$$J' = \int_{A'}^{B'} v'_x dx + v'_y dy + v'_z dz,$$

де \vec{v}' – вектор швидкості в момент часу t' .

Щоб охарактеризувати зміну J з плином часу, знайдемо похідну

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J' - J}{\Delta t}.$$

Обчислення похідної $\frac{dJ}{dt}$ за допомогою диференціювання виразу (22.2) виконати досить трудно, оскільки від часу залежать не тільки підінтегральні функції, а і положення в просторі граничних точок кривої A і B , котрі рухаються сумісно з рідиною.

Для того щоб здійснити таке диференціювання, треба перейти до завдання руху рідини в смислі Лагранжа. Не звертаючись до загальних формул задання руху по Лагранжу, розглянемо конкретний

Розділ 4. Вихорові течії ідеальної рідини

випадок задання по Лагранжу руху частинок, котрі в початковий момент часу заповнювали собою деяку лінію A_0B_0 . Положення кожної частинки на початковій кривій A_0B_0 можна визначити одним параметром, за який ми виберемо дугову координату (довжину дуги) σ від початкової точки кривої АВ, тобто від точки A_0 . Тоді декартові координати будь-якої частинки рідинної кривої, що в початковий момент часу t_0 знаходилась на кривій A_0B_0 , будуть функціями від σ і t :

$$x = x(\sigma, t), \quad y = y(\sigma, t), \quad z = z(\sigma, t). \quad (22.3)$$

Змінна σ і є лагранжевою координатою частинки, що первоначально находилась на дузі A_0B_0 в точці з координатою σ .

Іншими словами, радіус-вектор будь-якої точки (рідинної частинки) взятої рідинної лінії відносно початку координат буде функцією від σ і від t :

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma, t). \quad (22.4)$$

Відзначимо, що якщо в початковий момент часу довжина кривої A_0B_0 дорівнювала L , то і в будь-який інший момент часу змінна σ буде змінюватись від $\sigma = 0$ (початок кривої А) до $\sigma = L$ (кінець кривої В).

Якщо у виразі (22.2) перейти від інтегрування по змінних x, y, z до змінної інтегрування σ , використовуючи співвідношення (22.3), то для інтеграла J отримаємо вираз:

$$J = \int_0^L (v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma}) d\sigma = \int_0^L (\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma}) d\sigma. \quad (22.5)$$

Подкреслимо ще раз: при переході до змінної Лагранжа границі інтегрування у виразі для J виявляються фіксованими, незалежними від часу, так що тепер можна визначати похідну $\frac{dJ}{dt}$ шляхом диференціювання виразу (22.5) під знаком інтегралу. При цьому, оскільки змінні Лагранжа σ і t являються незалежними змінними, то при диференціюванні виразу (22.5) під знаком інтегралу величину

$d\sigma$ належить розглядати як сталу величину (незалежну від часу). Далі, за визначенням швидкості маємо

$$\frac{\partial \vec{r}(\sigma, t)}{\partial t} = \vec{v}(\sigma, t)$$

і отже

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(\sigma, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{v}(\sigma, t)}{\partial t} = \vec{w}(\sigma, t),$$

де $\vec{w}(\sigma, t)$ – прискорення частинок. Точно так же

$$\frac{\partial^2 \vec{r}(\sigma, t)}{\partial t \partial \sigma} = \frac{\partial \vec{v}(\sigma, t)}{\partial \sigma},$$

тому

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^L \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^L \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \sigma} d\sigma = \int_0^L \left(\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^L \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (22.6)$$

Перший член останньої формули справа побудовано аналогічно виразу (22.5) і є лінійним інтегралом від прискорення:

$$\int_0^L \left(\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_0^L \left(w_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + w_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + w_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_A^B \left(\vec{w} \cdot d\vec{r} \right), \quad (22.7)$$

тут останній інтеграл ми записали в смислі Ейлера. Другий доданок у виразі (22.6) справа перетворимо, виходячи із наступного співвідношення:

$$d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2(\vec{v} \cdot d\vec{v}),$$

але диференціал швидкості при переміщенні вздовж лінії L (в лагранжевому представленні) дорівнює

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} d\sigma,$$

звідки

$$2(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = 2\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} d\sigma\right) = 2\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma}\right) d\sigma = \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{v})}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{\partial v^2}{\partial \sigma} d\sigma,$$

(зверніть увагу на те, що скалярний добуток $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2$). В результаті маємо

$$\int_0^L \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial v^2}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2),$$

де значення модулів швидкості на кінцях кривої AB ми позначили індексами A і B .

Вернувшись остаточно до змінних Ейлера, у виразі (22.7) прискорення \vec{w} позначимо, як звичайно по Ейлеру, через $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; в результаті отримаємо

$$\frac{dJ}{dt} = \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2). \quad (22.8)$$

Це і є шукане нами відношення. Але найбільш цікавий результат ми отримаємо, коли застосуємо цю формулу до замкнутого контуру; тоді неінтегральні члени зникнуть, і ми отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}. \quad (22.9)$$

Таким чином, ми отримали так звану попередню (кінематичну) теорему Томсона: «*Похідна за часом від циркуляції швидкості по замкнутому контуру дорівнює циркуляції від прискорення по тому ж контуру*».

Тепер візьмемо рівняння руху ідеальної рідини у формі Ейлера:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (22.10)$$

Зробимо два додаткових припущення:

1). Сила \vec{F} має потенціал, тобто існує така функція Π , що сила

$$\vec{F} = -grad\Pi, \quad (22.11)$$

(така сила називається потенціальною).

2). Рідина вважається баротропною, тобто густина рідини являється функцією тільки від тиску $\rho = \Phi(p)$ (тривіальним випадком баротропної рідини є днорідна нестислива рідина, у якої густина – фізична константа). Для баротропної рідини можна ввести функцію $P(p)$, яка являється невизначеним інтегралом (первісною функцією) від функції $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\Phi(p)}$, тобто

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (22.12)$$

Тоді

$$grad P(p) = \frac{1}{\rho} grad p.$$

При виконанні цих двох вказаних умов рівняння Ейлера запишеться у вигляді

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p = -grad(\Pi + P). \quad (22.13)$$

Підставимо тепер цей вираз для прискорення у формулу (22.8) для $\frac{dJ}{dt}$. Будемо мати

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_A^B grad(\Pi + P) \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2).$$

Але по самому означенню $grad\varphi$ маємо

$$grad\varphi \cdot d\vec{r} = d\varphi$$

і, значить

$$\int_A^B grad\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi_B - \varphi_A.$$

Таким чином

$$\frac{dJ}{dt} = -(\Pi + P)_B + (\Pi + P)_A + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2),$$

тобто

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} = -(\Pi + P - \frac{1}{2}v^2)_B + (\Pi + P - \frac{1}{2}v^2)_A. \quad (22.14)$$

У випадку, коли контур замкнутий, точки А і В співпадають і рівняння (22.14) набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0,$$

звідки після інтегрування отримуємо

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = const.$$

В цій рівності і полягає основна теорема Томсона: якщо масові сили мають потенціал і ідеальна рідина баротропна, то циркуляція швидкості по будь-якому замкнутому контуру весь час руху рідини залишається незмінною.

○○○

ДЛ-№23.

Теорема Лагранжа і теорема Гельмгольца про вихори

Безпосереднім наслідком основної теореми Томсона являється **теорема Лагранжа**, котра формулюється наступним чином: *Нехай: 1) рідина ідеальна; 2) масова сила \vec{F} , прикладена до рідини, має потенціал Π ; і 3) густина рідини являється функцією одного тиску $\rho = \Phi(p)$; тоді, якщо в початковий момент часу в деякій частині рідини немає вихорів, то їх не було раніше і не буде пізніше в цій частині рідини.*

Підкреслимо, що тут мова йде про певну масу рідини, а не про певний об'єм простору. Для доведення теореми Лагранжа зауважимо,

що, за умовою, в початковий момент часу в розглядуваній частині рідини $\vec{\Omega} = 0$; тому, в силу теореми Стокса (формула (22.1) із попередньої лекції) циркуляція швидкості по довільному замкнутому контуру, що лежить в розглядуваній частині рідини, дорівнює нулю

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0.$$

По теоремі Томсона циркуляція швидкості по рідинному контуру L буде дорівнювати нулю і в будь-який час руху. Але тоді із тієї ж формули Стокса витікає, що для будь-якої поверхні, що повністю лежить в розглядуваній частині рідини, виконується умова

$$\iint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Але це може бути тільки у тому випадку, якщо в будь-якій точці розглядуваної частини рідини і для будь-якого напрямку \vec{n} виявиться, що $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = 0$; іншими словами, в будь-якій точці розглядуваної частини рідини і в будь-який момент часу має бути $\vec{\Omega} = 0$, що і доводить теорему Лагранжа.

Оскільки відсутність вихору рівнозначна існуванню потенціалу швидкості, то теорему Лагранжа можна висказати і в дещо іншій формі: *Якщо в початковий момент часу рух рідини мав потенціал швидкості, то при виконанні умов теореми Лагранжа, то цей рух буде мати потенціал і в майбутньому, а такожі мав потенціал і в минулому.*

Тепер доведемо дві основні теореми Гельмгольца про збереження вихорових ліній і інтенсивностей вихорових трубок.

Теорема Гельмгольца про збереження вихорових ліній. *Якщо зробити ті ж припущення, що і в теоремі Лагранжа, то ті частинки рідини, що утворювали в деякий момент часу вихорову лінію, і в будь-який інший момент часу утворюють вихорову лінію.*

Перш за все ми розглянемо вихорову поверхню и доведемо, що частинки рідини, що утворювали в деякий момент часу вихорову поверхню, будуть весь час руху утворювать вихорову поверхню. Нагадаємо, що таке вихорова поверхня. Це така поверхня, в кожній точці якої вихор швидкості $\vec{\Omega}$ дотикається до цієї поверхні. Таку

поверхню можна отримати, вибираючи довільну лінію (природно, не вихореву) і проводячи через кожну її точку вихорову лінію, як деяку криволінійну нитку. Сукупність цих вихорових ниток і утворює вихорову поверхню.

Отже, нехай ϵ вихорева поверхня S . Візьмемо на цій поверхні нескінченно малий контур L . По формулі Стокса

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (23.1)$$

Циркуляція швидкості по цьому контуру дорівнює нулю, оскільки в будь-якій точці поверхні S скалярний добуток $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = 0$ (бо вектор $\vec{\Omega}$ лежить в дотичній площині до S). В наступний момент часу t' рідинний контур L займе положення L' , причому, L' буде лежати на поверхні S' , утвореній тими ж частинками, котрі раніше утворювали поверхню S . По теоремі Томсона циркуляція швидкості по контуру L' в момент часу t' буде такою ж, як і циркуляція швидкості по контуру L в момент часу t , тобто дорівнюватиме нулю:

$$\oint \vec{v}' \cdot d\vec{r} = 0,$$

де інтеграл обчислюється по контуру L' . Але тоді із формули Стокса слідує, що

$$\iint \vec{\Omega}' \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

де інтеграл обчислюється по куску поверхні S' , охопленій контуром L' , причому, контур L' можна взяти як завгодно малим і де завгодно на поверхні S' ; але тоді обов'язково в кожній точці поверхні S' має бути

$$\vec{\Omega}' \cdot \vec{n} = 0,$$

що і значить, що поверхня S' є вихорова.

Отже, перша частина теореми доведена: вихорова поверхня зберігається: вона весь час складається із одних і тих же рідинних частинок. Виберемо тепер в момент часу t вихорову лінію l і через неї

проведем дві вихорові поверхні S і Σ , що перетинаються по цій лінії. В будь-який інший момент часу частинки, що склали поверхні S і Σ , будуть утворювати відповідно поверхні S' і Σ' , причому частинки, що утворювали лінію перетину l поверхонь S і Σ , утворюють лінію перетину l' поверхонь S' і Σ' . В кожній точці кривої l' вихор швидкості $\vec{\Omega}'$ має лежати в дотичній площині як до поверхні S' , так і до поверхні Σ' , тобто вектор $\vec{\Omega}'$ має бути направлений вздовж перетину цих дотичних площин, а цей перетин представляє собою якраз дотичну до лінії l' . Отже, лінія l' виявилась вихоровою лінією, і теорема доведена.

Подведемо підсумок: в розглядуваному випадку кожна вихорова лінія зберігає свою індивідуальність у тому смислі, що кожна вихорова лінія переміщується в просторі разом з тими частинками рідини, котрі її утворювали. Цю властивість і називають властивістю збереження вихорових ліній.

Наслідок. При вказаних умовах (припущеннях) будь-яка вихорова трубка під час руху буде залишатись вихоровою трубкою, оскільки вона обмежена вихоровими лініями, котрі залишаються весь час вихоровими. Точніше кажучи, цей висновок треба розуміти таким чином, що ті частинки рідини, що утворюють в деякий момент часу вихорову трубку, в будь-який наступний (чи минулий момент також будуть утворювати (чи утворювали) вихорову трубку.

Теорема про збереження інтенсивності вихорових трубок.

Якщо зробити ті ж самі припущення, що і в теоремі Лагранжа, то інтенсивність будь-якої вихорової трубки в будь-який час залишається однаковою, тобто являється сталою.

Дійсно, інтенсивність вихорової трубки в момент часу t визначається циркуляцією швидкості по контуру, охоплюючому один раз розглядувану вихорову трубку.

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Але тоді розглядувана теорема є безпосереднім наслідком теореми Томсона, так як, згідно з цією теоремою, циркуляція по рідинному контуру з плином часу не змінюється.

Диференціальне рівняння Фрідмана і Гельмгольца. Візьмемо диференціальне рівняння Ейлера, записане в формі Громеки-Ламба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (23.2)$$

Із цього векторного рівняння можна вивести інше рівняння, що визначає еволюцію вихорів з плином часу. Це і буде рівняння Фрідмана. Для цього застосуємо операцію rot до обох частин рівняння Ейлера (23.2). Як звичайно, позначимо

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\Omega}.$$

Далі

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \text{rot} \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t},$$

і, так як $\text{rot} \text{grad} \varphi = 0$, то отримуємо

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) = \text{rot} \vec{F} - \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right). \quad (23.3)$$

Застосуємо тепер відомі формули векторного аналізу. Перша формула:

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + \text{grad} \varphi \times \vec{a},$$

завдяки чому отримуємо

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = \frac{1}{\rho} \text{rot} \text{grad} p + \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \text{grad} p = -\frac{1}{\rho^2} (\text{grad} \rho \times \text{grad} p).$$

Друга формула:

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a}.$$

Враховуючи ще, що

$$\text{div} \vec{\Omega} = \text{div} \text{rot} \vec{v} = 0,$$

отримаємо:

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \text{div} \vec{v}.$$

Тепер рівняння (23.3) приймає наступний вигляд

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \text{div} \vec{v} = \text{rot} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} (\text{grad} \rho \times \text{grad} \rho).$$

Якщо скористатися визначенням повної похідної, то будемо мати

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

і тоді отримуємо остаточний вигляд шуканого рівняння

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \text{div} \vec{v} = \text{rot} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} (\text{grad} \rho \times \text{grad} \rho). \quad (23.4)$$

Це і є відоме рівняння, отримане О. Фрідманом. Розглянемо деякі окремі випадки рівняння Фрідмана:

- 1) нехай сила \vec{F} має потенціал, тобто $\vec{F} = -\text{grad} \Pi$, тоді

$$\text{rot} \vec{F} = 0.$$

- 2) і нехай густина $\rho = \Phi(p)$ (баротропність!); у цьому випадку

$$\text{grad} \rho = \Phi'(p) \text{grad} p,$$

так що вектори $\text{grad} \rho$ и $\text{grad} p$ коллінеарні, і отже

$$\text{grad} \rho \times \text{grad} p = 0.$$

В силу зроблених припущень рівняння (23.4) значно спрощується і приймає вигляд

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \operatorname{div}\vec{v} = 0. \quad (23.5)$$

Це останнє рівняння ми будемо називати рівнянням Гельмгольца. Зокрема, якщо рідина нестислива, то $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, і ми отримуємо найбільш просте рівняння

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} = 0, \quad (23.6)$$

котре вперше було знайдено Гельмгольцем і на основі якого Гельмгольц отримав всі свої знамениті теореми про вихори.

Підведемо остаточні підсумки сказаному. При виконанні умов теореми Лагранжа векторні вихорові лінії і інтенсивності вихорових трубок володіють властивістю збереженості; іншими словами: як вихорові лінії, так і інтенсивності вихорових трубок зберігаються. Зокрема, при відсутності вихорів в початковий момент часу, їх не буде і в довільний наступний момент. Тому рух, бувший безвихоровим в деякий момент часу, завжди залишиться безвихоровим, рух же, вихоровий в деякий момент часу, назавжди залишиться вихоровим. Таким чином, ми отримали різке розмежування всіх рухів рідини на два класи: безвихореві рухи, або рухи з потенціалом швидкості, і вихорові рухи, котрі взаємно один в інший не переходять.

Якщо ж зроблені в теоремах Гельмгольца припущення не виконуються, то теореми Гельмгольца перестають мати місце і появляється можливість виникнення, або руйнування вихорів. Отже, вихори можуть виникати і зникати (руйнуватись) під дією трьох головних причин: 1) якщо масові сили, що діють у рідині, не мають потенціалу; 2) якщо густина рідини не являється функцією одного тільки тиску, а залежить і від інших факторів (наприклад, температури); і нарешті, 3) коли рідина не ідеальна, як ми припускали до сих пір, а в'язка.

Питання про вплив в'язкості на вихоровий рух рідини ми розглянемо пізніше, при розгляді математичної моделі в'язкої рідини. Два ж інших фактори, що впливають на виникнення і руйнування вихорів, присутні в рівнянні Фрідмана (23.4); це члени в правій частині цього рівняння:

$$\text{rot}\vec{F} + \frac{1}{\rho^2} (\text{grad}\rho \times \text{grad}\rho).$$

Ці члени якраз і дають кількісне вираження впливу на виникнення чи зникнення вихорів за рахунок непотенціальності зовнішнього масового поля (член $\text{rot}\vec{F}$) і небаротропності течії (член $\frac{1}{\rho^2} (\text{grad}\rho \times \text{grad}\rho)$).

Вплив небаротропності атмосфери на виникнення вихорів в атмосфері ми розглянемо в наступній лекції.

○○○

ДЛ-№24.

Утворення вихорів за рахунок небаротропності. Теорема В. Б'єркнеса.

Далі ми розглянемо такий випадок, коли в рідині не виконується баротропність, тобто, коли не виконується співвідношення $\rho = \Phi(p)$, тобто, коли густина рідини не визначається лише тиском, але залежить ще і від інших факторів (наприклад, температури, вологості повітря, солоності води (для морської, чи океанічної води)). У цьому випадку рівняння руху рідини Ейлера можна записати в вигляді

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\Pi - \frac{1}{\rho} \text{grad}\rho. \quad (24.1)$$

Тепер із першого рівняння Томсона для циркуляції рідини по довільному замкненому контуру L будемо мати

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = - \oint \text{grad}\Pi \cdot d\vec{r} - \oint \frac{1}{\rho} (\text{grad}\rho \cdot d\vec{r}).$$

При цьому:

$$\text{grad}\Pi \cdot d\vec{r} = d\Pi ; \oint d\Pi = 0; \text{grad}\rho \cdot d\vec{r} = d\rho,$$

так що отримуємо

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \frac{1}{\rho} dp. \quad (24.2)$$

Це рівняння, що визначає зміну циркуляції по рідинному контуру було встановлено В. Б'єркнесом. Для остаточного формулювання теореми Б'єркнеса необхідно більш детально обчислити праву частину рівняння (24.2). В подальшому замість густини рідини нам буде більш зручно використовувати обернену величину – питомий об'єм, котрий будемо позначати як

$$\omega = \frac{1}{\rho},$$

так що формула (24.2) отримує вигляд

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \omega dp. \quad (24.3)$$

Далі введемо поняття ізобаричних поверхонь, як таких поверхонь, на яких тиск однаковий (тривіальний випадок, коли тиск однаковий у всьому об'ємі, розглядати не будемо; у цьому випадку $dp = 0$ і інтеграл у правій частині (24.2) тотожно дорівнює нулю). Крім того, розглянемо ще поверхні, на котрих ω приймає одне і те ж значення, тобто поверхні однакової густини (однакового питомого об'єму; такі поверхні називаються ізостеричними)

Якби було $\rho = \Phi(p)$, то на ізобаричних поверхнях густина мала б одне і те ж саме значення, тобто ізобаричні і ізостеричні поверхні співпадали б між собою. В розглядуваному нами випадку ці поверхні не співпадають, а пересікаються. Якщо ми проведемо ряд ізобаричних поверхонь, що відповідають ряду значень p , котрі, скажімо, відрізняються одна від одної на умовну одиницю (скажімо, на один Паскаль) і точно так же побудуємо ізостеричні поверхні, що відповідають ряду значень ω , що також на деяку умовну одиницю, відрізняються одна від одної, то в результаті весь простір газу чи рідини розіб'ється на ряд трубок, кожна з яких буде утворена двома послідовними ізобаричними поверхнями і двома послідовними ізостеричними поверхнями; такі трубки в метеорології називають одиничними ізобаро-ізостеричними трубками.

Тепер розглянемо криву (контур) L і підрахуємо, скільки ізобаро-ізостеричних трубок вона охоплює (По-іншому: знайдемо, скільки трубок пересікають область, охоплену контуром L . Але спочатку розрахуємо інтеграл $-\oint \omega dp$ по контуру l , що охоплює одну із таких трубок. Представимо собі поперечний переріз однієї трубки: це буде криволінійний чотирикутник, дві протилежні сторони котрого є ділянки ізобаричних поверхонь, а дві інші – ізостеричних поверхонь. Нарисуємо собі такий криволінійний чотирикутник. Хай нижня сторона цього чотирикутника AB належить ізобаричній поверхні з тиском $p = p_0$; на цій елементарній ділянці $dp = 0$. Нехай із точки B іде криволінійний відрізок BC (нарисуйте дещо покривлений відрізок BC , що йде від точки B вгору і вліво – все рівно як – вліво чи вправо); ця ділянка належить деякій ізостеричній поверхні, на якій хай $\omega = \omega_0$. Тепер із точки C проводимо криволінійний відрізок CD вліво від відрізка BC . Цей відрізок належить ізобаричній поверхні, на якій тиск дорівнює або $p_0 + 1$, або $p_0 - 1$. Хай, для визначеності, буде $p_0 + 1$. передвигаючись вздовж відрізка CD , ми будемо мати також $dp = 0$, і, нарешті, з'єднаємо точку D з точкою A деяким криволінійним відрізком, отримаємо криву DA , що належить ізостеричній поверхні зі значенням або $\omega = \omega_0 + 1$, або $\omega = \omega_0 - 1$; хай, наприклад, $\omega = \omega_0 + 1$.

Отже, ми отримали елементарний контур l ABCDA, що охоплює одну трубку. інтеграл $-\oint \omega dp$ будемо обчислювати по контуру ABCDA, роблячи обхід проти годинникової стрілки. Будем мати

$$-\oint \omega dp = -\int_A^B \omega dp - \int_B^C \omega dp - \int_C^D \omega dp - \int_D^A \omega dp . \quad (24.4)$$

але на ділянках AB і CD тиск сталий, тобто $dp = 0$, і інтеграли по цих ділянках випадають; на ділянках же BC і DA підінтегральна функція стала, а саме: на BC $\omega = \omega_0$, а на DA $\omega = \omega_0 + 1$, так що інтеграл $-\oint \omega dp$ буде дорівнювати:

$$-\oint \omega dp = -\int_{p_0}^{p_0+1} \omega_0 dp - \int_{p_0+1}^{p_0} (\omega_0 + 1) dp,$$

або

$$-\oint \omega dp = -\omega_0 \int_{p_0}^{p_0+1} dp - (\omega_0 + 1) \int_{p_0+1}^{p_0} dp.$$

Обчисливши тут інтеграл, остаточно отримаємо, що у розглянутому випадку

$$-\oint \omega dp = 1.$$

Якби ми обчислювали інтеграл за годинниковою стрілкою, то цей інтеграл дорівнював би (-1) . Точно так же цей інтеграл може виявитись рівним $+1$, чи (-1) , в залежності від того, чи буде на ділянці CD тиск дорівнювати $p_0 \pm 1$ а на ділянці DA величина ω дорівнюватиме $\omega_0 \pm 1$. Всі ці випадки підлягають такому правилу: на поверхні $p = p_0$ будемо вектор $grad p$ (він іде в сторону зростання тиску), а на поверхні $\omega = \omega_0$ будемо вектор $grad \omega$ (він направлений в сторону зростання ω (в сторону зменшення густини)). Розглянемо самий короткий поворот від вектора $grad p$ до вектора $grad \omega$; якщо обхід контуру співпадає з поворотом від $grad p$ до $grad \omega$, то інтеграл

$$-\oint \omega dp = 1,$$

а якщо обхід, направлено проти короткого повороту від $grad p$ до $grad \omega$, то, то цей інтеграл дорівнюватиме (-1) . Будем тепер ті трубки, для яких вказаний інтеграл дорівнює $(+1)$, називати додатними, а ті трубки, для котрих він дорівнює (-1) , – від’ємними. Якщо контур охоплює N^+ додатних трубок (або N^- від’ємних трубок), то розповсюджений на такий контур інтеграл, буде дорівнювати відповідно або N^+ (або N^-). – Доведіть це!

Неважко зрозуміти, що якщо контур L охоплює ряд додатних і одночасно ряд від’ємних трубок, то будемо мати

$$-\oint \omega dp = N^+ - N^-. \quad (24.5)$$

Повертаючись до формули (24.3), можемо отриманий результат записати у вигляді

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N^+ - N^-, \quad (24.6)$$

і теорема Бьєркнеса может бути сформульована наступним чином: *Похідна за часом від циркуляції вектора швидкості по будь-якому рідинному контуру L дорівнює різниці числа додатніх і від'ємних одиничних ізобаро-ізостеричних трубок, що пронизують контур L .*

При цьому припускається, що рідина ідеальна і що масові сили, що діють на частинки рідини, мають потенціал.

Отже, пересічення ізобаричних та ізостеричних поверхонь є причиною виникнення вихорів. Якщо рідина в початковий момент часу знаходилась в стані спокою, але ізобаричні і ізостеричні поверхні пересікаються, то згідно з формулою (24.6) по контурах почнуть виникати циркуляції і, значить усередині області почнуть з'являтися вихори, так як за по формулою Стокса

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (24.7)$$

де поверхневий інтеграл береться по будь-якій поверхні, що опирається на розглядуваний контур.

Приклади виникнення вихоревих структур за рахунок небаротропності. Вкажемо декілька прикладів виникнення вихорів за рахунок небаротропності в атмосфері Землі і в водному середовищі. Як перший приклад розглянемо масу повітряної атмосфери Землі, не враховуючи в першому наближенні наявності в ній водяної пари. Тиск, абсолютна температура і густина (питомий об'єм) для сухого повітря зв'язані між собою рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$p\omega = RT, \quad (24.8)$$

где R – газова стала повітря. Таким чином, при однаковому тискові питомий об'єм пропорціональний температурі (закон Гей-Люссака). Внаслідок більшого нагрівання від Сонця тропічні країни тепліші від полярних; температура повітря в нижніх шарах атмосфери тропічних країн значно вища, ніж температура повітря полярних країн. А що стосується до тиску, то тиск змінюється менше при переході від полярних країн до тропічних. Тому за формулою (24.8) ми можемо заключити, що питомий об'єм повітря в тропічних країнах більше питомого об'єма полярних країн. С другого боку, повітря тим більше

разріджене, чим на більшій висоті воно знаходиться, так що питомий об'єм зростає з висотою. Із сказаного ясно, що ізостеричні поверхні повинні підніматись від екватора до полюса, так як один и той же питомий об'єм повітря зустрічається над полюсом на більшій висоті, ніж на екваторі. Ізобаричні ж поверхні ми маємо вважати локально горизонтальними, тобто в мегамасштабі сферичними, якщо їх розглядати в масштабах всієї Землі. Отримуємо пересічення ізобаричних і ізостеричних ліній, внаслідок чого відбувається утворення вихорів. Очевидно, що вектор $grad p$ направлений практично вертикально вниз, а $grad \omega$ направлений вверх, але від вертикалі має нахил до екватора. Короткий поворот від вектора $grad p$ до вектора $grad \omega$ якраз и показує, в яку сторону буде виникати циркуляція. В данному випадку повітря буде текти понизу атмосфери від північних широт до південних, на екваторі повітря, нагріваючись, піднімається вверх и повернувшись до екваторіальних широт до північного полюса, де, охолоджуючись, спускається до поверхні Землі і т.д. Це – сама глобальна циркуляція повітря в атмосфері Землі. В північній півкулі ця течія називається пасати, а в південній півкулі – антипасати. Отже, в пасатах та антипасатах в нижніх частинах атмосфери повітря тече від полюсів до екватора вздовж меридіанів, на екваторі воно піднімається вверх і повернувшись до полюсів. В нижніх шарах атмосфери швидкість в пасатах не сильно виражена, особливо на суші, де руху повітря заважають гори, ліси, будівельні конструкції міст, сіл, і інші перешкоди. В океані ця швидкість виражена більш сильно, над океаном переважаючим вітром являється північний вітер (Nord), котрий так і дув би собі в основному вздовж меридіану, не будь сил Кориоліса, завдяки яким із-за обертання Землі, пасатний вітер отримує східну складову, так що, у північній півкулі над поверхнею океану в основному дує північно-східний вітер, або, як говорять моряки и пірати – nord-ost (в південній півкулі, природно, вітер внизу має напрямок sud-west). В верхніх шарах атмосфери, де течії повітря ніщо не перешкоджає, швидкість потоку повітря в пасатах чи антипасатах може досягати значних величин.

Мусони, бризи і циклони. Мусони – це такі течії повітря, котрі виникають за рахунок нерівномірного нагрівання материка и океану зимою і влітку. Існує ще менш масштабне явище, котре приводить до

виникнення течії (і вихорів) – брізи, що виникають за рахунок нерівномірного нагрівання суші і води вдень і ночі. Аналогічно відбувається виникнення течії повітряних мас при виникненні циклонів або антициклонів. Розглянемо більш детально формування циклона. Це явище починається внаслідок місцевого прогрівання деякої центральної території порівняно з периферією. Отже, нарисуємо собі систему декартових координат: ось ox – горизонтально, по рівню землі, ось OY – вертикально вгору. Вважаємо, що деяка ділянка землі (ділянка навколо осі OY), що прилягає до початку координат, прогрілась силу різних причин, тоді, як периферія цієї ділянки залишилась порівняно холодною. Тоді, як і в задачі про пассати, заключаємо, що ізобаричні поверхні в основному будуть близькими до горизонтальних поверхонь, тоді як ізостеричні поверхні в нагрітих місцях ідуть низько, а в холодних місцях піднімаються вгору. В плоскому перетині на малюнку ізостеричні лінії будуть подібні до парабол, котрі мають свою найнижчу точку на осі oy , а її гілки підіймаються вгору і в сторону охолодженої периферії. Таким чином, ми отримуємо в наявності пересічення ізобаричних і ізостеричних поверхонь і утворення вказаних трубок, що і призводить до виникнення циркуляційної течії. Напрямок виникнення циркуляції визначається вказаним поворотом від вектора $grad p$ до вектора $grad \omega$. В результаті приходимо до такого висновку: тепле повітря із нагрітої центральної частини піднімається вгору і поверху розтікається на периферію, де, поступово охолоджуючись, починає опускатися до поверхні землі і далі вздовж поверхні землі холодне повітря рухається до центральної нагрітої частини області. Принципіально все відбувається так же, як і в пасатах, але тільки в значно менших масштабах.

Антициклон – це аналогічна картина, але тільки у випадку, коли центральна частина деякої території охолоджується нижче, ніж периферія.

Звернемось ще до одного випадку, до випадку виникнення морських течій із-за небаротропності. Роль нерівномірного нагрівання тут відіграє нерівномірна солоність морської води. Больш солоні вода при однаковому тиску і температурі виявляється і більш густою. Тому, якщо ми маємо масу води різної солоності, наприклад, убувающої в сторону додатної осі ox , то ізостеричні поверхні будуть

нахилені до горизонту, причому $\text{grad } \omega$ буде мати складову в сторону убутання солоності, у даному випадку, в сторону додатньої осі; ізобаричні ж поверхні можемо вважати приблизно горизонтальними і, отже, $\text{grad } p$ направленим вертикально зверху вниз. Напрямок коротшого повороту від $\text{grad } p$ до $\text{grad } \omega$ тоді нам показує, що має відбутись дві течії: одна течія понизу більш солоної води і течія поверху в протилежному напрямку менш солоної води.

Прикладом таких течій служать: течія із Середземного моря в Чорне і навпаки: оскільки концентрація солі в воді Середземного моря дуже велика порівняно з Чорним морем, то, згідно з вище сказаним, солоні і важка вода Середземного моря має текти по дну із Егейського моря через Дарданелли і Босфор в Чорне море, тоді як менш солоні і легка вода Чорного моря повинна поверху тікти із Чорного моря в Босфор і далі. Ці течії мають місце в дійсності. Аналогічна картина має місце і в Гібралтарі: більш солоні вода Середземного моря тече по дну в Атлантичний океан, а менш солоні вода із Атлантичного океану переноситься поверхневою течією в Середземне море.

ooo

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гідрогазодинаміка. Курс лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 142 Енергетичне машинобудування, 143 Атомна енергетика, 144 Теплоенергетика, / В.М. Турик; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 8,37 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 145 с
2. Давидсон. В.Є. Вступ до гідроаеродинаміки: Підручник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 2016.
3. Інтегральний курс механіки рідини й газу : навчальний посібник / І. О. Ковальов, О. В. Ратушний, Е. В. Колісниченко. – Суми: Сумський державний університет, 2023. – 399 с
4. Кочин Н.Е., Кибель І.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1,2. – М., 1963.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов [Текст] //ЛГ Лойцянский,—М.: Наука. – 1987.
6. Повх І.Л. Техническая гидромеханика. — Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с
7. Elger, D. F., LeBret, B. A., Crowe, C. T., & Roberson, J. A. (2020). Engineering fluid mechanics. John Wiley & Sons.
8. Schetz, Joseph A., and Allen E. Fuhs, eds. Fundamentals of fluid mechanics. John Wiley & Sons, 1999.
9. Shlichting H. Boundary layer theory, 268 //McGraw-Hill, New York. – 1979.