

**С.І. Рябцев, О. І. Кушнерьов, В.Ф. Башев**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
З КУРСУ «ФІЗИКА»:  
Механіка, молекулярна фізика**

**Дніпро  
2025**

**Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара**

**С.І. Рябцев, О. І. Кушнерьов, В.Ф. Башев**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
З КУРСУ «ФІЗИКА»:  
Механіка, молекулярна фізика**

**Дніпро  
2025**

УДК 531(075.8)  
Р98

*Ухвалено на Вченій Раді ДНУ  
Рекомендовано до друку  
вченою радою факультету фізики, електроніки та комп'ютерних систем  
10.12.2024 р., протокол 68*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Е. П. Штапенко  
д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Д. Волнянський

Р98 Рябцев С.І. Навчальний посібник з курсу «Фізика»: механіка, молекулярна фізика/ С.І. Рябцев О. І. Кушнерьов, В.Ф. Башев. Дніпро: ДНУ, 2025 — 186 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з дисципліни «Фізика» (розділи «Механіка», «Молекулярна фізика»), перелік питань, засвоєння яких підлягає обов'язковому контролю. Також наведено опис основних лабораторних робіт. Описано методи досліджень, будову та принцип дії приладів, подано інструкції щодо порядку виконання експериментальних задач з основних розділів дисципліни. Для декількох лабораторних робіт дано рекомендації з виконання їх комп'ютерних аналогів. Наведено питання для самостійного опрацювання, список літератури.

Для студентів природничих факультетів ДНУ.

Навчальне видання

Сергій Іванович Рябцев  
Олександр Ігорович Кушнерьов  
Валерій Федорович Башев

**Навчальний посібник  
з курсу «Фізика»: Механіка, молекулярна фізика**

Редактор  
Техредактор  
Коректор

---

Підписано до друку 11.02.2025. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 11,5. Тираж 20 пр.

---

РВВ ДНУ, просп. Науки, 72, м. Дніпро, 49046.  
ПП «Ліра ЛТД», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107.  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
серія ДК №6042 від 26.02.2018р.

© Рябцев С.І., Кушнерьов О.І., Башев В.Ф. 2025

## **Передмова**

Даний посібник укладено відповідно до навчальної програми дисципліни «Фізика». Посібник охоплює розділи «Механіка» та «Молекулярна фізика» і включає в себе теоретичні відомості із загального курсу механіки, молекулярної фізики, перелік питань для контролю знань та опис експериментальних задач – лабораторних робіт, запропонованих у фізичному практикумі ДНУ і перевірених практично у ході студентських занять протягом багатьох років.

Кожну експериментальну задачу з основ механіки, молекулярної фізики студент розв'язує індивідуально, паралельно зі слуханням курсу лекцій і роботою на семінарах. Опис кожної задачі містить стисле пояснення суті досліджуваного явища, детальний виклад експериментального методу, покладеного в основу вивчення даного явища, відомості щодо апаратури, якою необхідно скористатися під час виконання роботи. Крім того, в описі висвітлено способи спостереження та вимірювання, наведено правила обробки результатів експериментів. Подекуди було доцільно об'єднати теорію близьких за задумом задач в один загальний розділ.

Видання призначено для студентів фізичних і природничих спеціальностей ДНУ, що вивчають механіку як за розширеною, так і за звичайною програмою.

## **ЧАСТИНА I. МЕХАНІКА**

### **1 Фізичні величини та їх вимірювання. Кінематика**

#### **1.1 Теоретичні відомості**

##### **1.1.1 Опис руху матеріальної точки**

Механіка вивчає найпростішу форму руху матерії – механічний рух, тобто зміну взаємних розміщень тіл або їх частин. Зазвичай під механікою, яку тепер називають класичною, розуміють учення про рухи макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла. Механіка включає в себе два основні розділи: кінематика і динаміка. У кінематиці вивчають переміщення тіл залежно від часу з огляду на їх масу і сили, що на них діють. У динаміці вивчають рухи тіл під дією прикладених до них сил; до цього ж розділу належить статика – учення про умови рівноваги тіл.

Завдання механіки полягає у вивченні різних рухів і встановленні їх законів. Закони дають можливість передбачати потрібні рухи й конструювати робочі механізми та машини. Для вивчення законів руху, звичайно, потрібно враховувати маси тіл, зв'язки між ними та зовнішні дієві сили. Ці питання, як уже було зазначено, вирішують у динаміці. Для опису руху у кінематиці користуються аналітичним і графічним методами, абстрагуючись від тіла до матеріальної точки або системи матеріальних точок. Під матеріальною точкою розуміють реальний об'єкт нескінченно малих розмірів, що має масу.

Усі тіла в природі перебувають у русі. Щоб описати рух будь-якого тіла, треба вказати на інше тіло або групу тіл, умовно нерухомих, відносно яких роз-

глядатимуть рух даного тіла. Тобто, щоб описати рух матеріальної точки, слід обрати певне тіло відліку. Залежно від тіла відліку рух одного й того самого тіла матиме різний вигляд (наприклад, автобус і поверхня Землі). Отже, будь-який рух тіла має відносний характер, відносним є також стан його спокою.

З обраним тілом відліку зазвичай пов'язують певну систему координат, здебільшого прямокутну, через яку можна визначити просторове положення рухомої точки в будь-який момент часу. Тіло відліку, пов'язану з ним систему координат і сукупність синхронізованих годинників у різних точках простору загалом називають системою відліку.

Рух матеріальної точки можна визначити, якщо в системі відліку знайти координати точки як функції від часу:  $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ ;  $z = f_3(t)$ .

Лінію, яку матеріальна точка описує в просторі, називають траєкторією руху. Форма траєкторії руху точки значною мірою залежить від системи відліку (наприклад, рух планет відносно Сонця та Землі еліпсами або петлеподібними траєкторіями). Сумарну довжину елементів траєкторії, пройдену точкою за заданий проміжок часу, називають шляхом. Отже, шлях є функція від часу  $S = f(t)$ , що монотонно зростає.

Таким є координатний спосіб опису руху тіла. За векторного способу розташування точки в просторі визначають за радіус-вектором  $\vec{r}$ , пов'язаним із системою відліку (далі позначатимемо як  $r$ ).

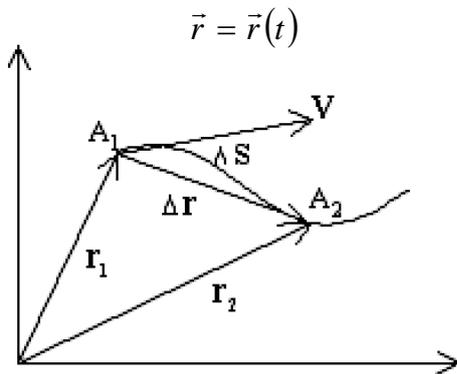


Рис. 1.1. Схема векторного опису руху тіла

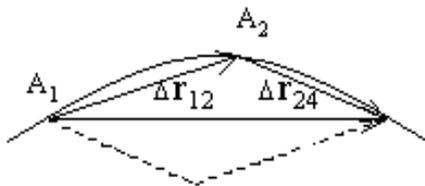


Рис. 1.2. Схема додавання векторів

Рух точки за час  $\Delta t$  визначають за вектором переміщення  $\Delta r$ , який чисельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове та кінцеве положення точки через час  $\Delta t$ . Стрілка показує напрямок руху (рис. 1.1). У разі кількох послідовних переміщень точки сумарний вектор переміщення знаходять за правилом паралелограма. Величини, задані числовим значенням і напрямком та додані за правилом паралелограма (рис. 1.2), називають векторними (наприклад, переміщення, сила, швидкість, прискорення). Величину, для задання якої досить тільки числового значення, називають скалярною (наприклад, час, маса, шлях).

Вектор позначають буквами зі стрілкою над ними або жирним шрифтом. Числове значення вектора називають його модулем, записуючи буквами без стрілок і жирності або з двома вертикальними рисками з обох боків:  $|\mathbf{r}| = r$ .

Основними кінематичними величинами, що характеризують рух матеріальної точки у просторі, є швидкість і прискорення.

Швидкість – це характеристика руху тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії. Швидкість визначимо за межею відношення вектора переміщення тіла  $\vec{r}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$  за умови, якщо останній прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \text{або похідна} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

Це миттєва швидкість. Вектор швидкості виразимо у проекціях на координатній осі:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}. \quad (1.2)$$

Модуль вектора знайдемо за виразом

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.3)$$

Водночас на практиці для опису рухів часто достатньо визначити середню швидкість  $\vec{V}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  або модуль середньої швидкості  $|\vec{V}_c| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|$ , а також середню «скалярну швидкість»:

$$V_c = \frac{S}{t}. \quad (1.4)$$

Ця формула становить характеристику руху транспортних засобів. Одиницею швидкості в СІ є 1 м/с.

Зазначимо, що існує принципова відмінність у значеннях середньої та середньої векторної швидкості в рухах тіл складними траєкторіями.

У змінному русі швидкість може змінюватися і за величиною, і за напрямком. Повну зміну швидкості за час  $\Delta t$  знаходять за векторною різницею  $\vec{V} - \vec{V}' = \Delta \vec{V}$ .

Для оцінки зміни швидкості в часі введемо фізичну величину, названу прискоренням. Прискорення в певний момент часу визначимо за межею відношення вектора зміни швидкості  $\Delta \vec{V}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$ , тобто

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.5)$$

Прискорення – це вектор, який за напрямком збігається з вектором  $\Delta \vec{V}$  за умови  $\Delta t \rightarrow 0$ . У разі рівномірно прискореного руху ( $a = \text{const}$ ), що відбувається в напрямі осі ОХ,  $dV_x = a dt$ , інтегруванням знайдемо:

$$V_x = at + c_1, \quad (1.6)$$

$$x = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad (1.7)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування. Визначимо їх із початкових умов за  $t=0$ ,  $c_1=V_0$ ,  $c_2=x_0$ .

Користуючись цим рівнянням, самостійно проаналізуйте рух тіла, кинутого вгору (вниз) та під кутом до горизонту.

### 1.1.2 Швидкість і прискорення у разі криволінійного руху

Розглянемо специфіку криволінійного руху, за якого швидкість змінюється за напрямком, а в загальному вигляді – й за величиною.

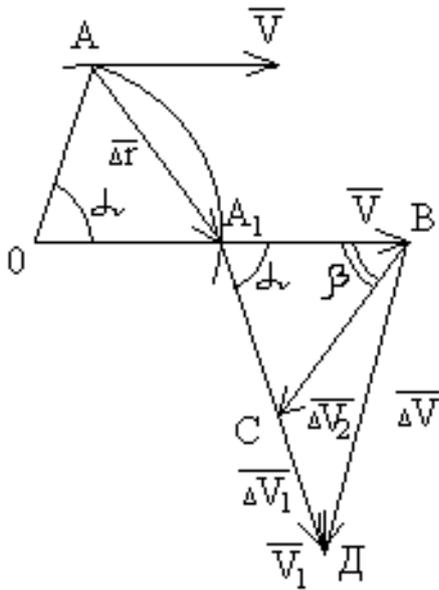


Рис. 1.3. Криволінійний рух

Нехай тіло, що рухається криволінійно, у точці А має швидкість  $V$ , а через час  $\Delta t$  у сусідній точці  $A_1$  швидкість становитиме  $V_1$  (рис. 1.3). Тоді прискорення руху в точці  $A_1$  визначимо за формулою

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Тут  $\Delta V$  виражає зміну швидкості за модулем і напрямком.

Розкладемо  $\Delta V$  на дві складові:  $\Delta V_1$ , що визначає зміну швидкості за модулем за час  $\Delta t$ , і  $\Delta V_2$ , що визначає зміну швидкості за напрямком за той самий час. Щоб знайти  $\Delta V_1$ , достатньо знайти різницю відрізків  $A_1D - A_1B = A_1D - A_1C = CD$ . Щоб знайти  $\Delta V_2$ , достатньо отримати точки В, С і визначити напрям вектора за умови, що  $\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$  (рис. 1.3).

Отже, повне прискорення виразимо як суму двох складових:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_1 + \Delta \vec{V}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Перша складова прискорення  $\vec{a}_1 = \frac{\Delta \vec{V}_1}{\Delta t}$  визначає зміну швидкості за мо-

дулем, її називають тангенціальним прискоренням. Воно спрямоване за дотичною до траєкторії руху в напрямку швидкості або навпаки – залежно від того, збільшується чи зменшується величина швидкості.

Друга складова прискорення  $\vec{a}_2 = \frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t}$  визначає зміну швидкості за напрямком. Її називають нормальним, або доцентровим, прискоренням, спрямованим перпендикулярно до вектора швидкості. Справді, за  $\Delta t \rightarrow 0$  кут  $\Delta \alpha \rightarrow 0$ , тому кут  $\beta \rightarrow \pi/2$ , тобто  $\Delta V_2 \perp V$ .

Щоб обчислити модуль нормального прискорення, знайдемо  $\Delta V_2$ . Скористаємося рівністю відношень відповідних сторін подібних трикутників  $OAA_1$  і  $A_1BC$ , а саме  $\frac{\Delta V_2}{V} = \frac{\Delta r}{R}$ , або

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{V}{R} = \frac{V^2}{R}. \quad (1.9)$$

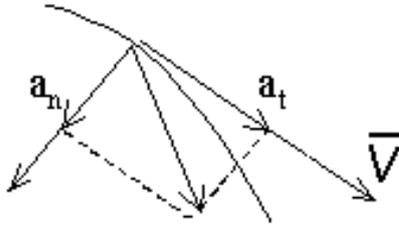


Рис. 1.4. Схема прискорення за криволінійного руху

Знаючи тангенціальне і нормальне прискорення, знайдемо модуль і напрямок певного прискорення руху в даній точці траєкторії (рис. 1.4), удавшись до рівнянь

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t}.$$

Якщо  $a_t = \text{const}$ , то це рівнозмінний рух,

$a_t = 0, a_n \neq 0$  – рівномірний криволінійний рух;

$a_t = 0, a_n = \text{const}$  – рівномірний рух колом.

### 1.1.3 Кінематика обертального руху

Поширеним різновидом криволінійного руху є рух колом. Звичайно, тут швидкість весь час змінює свій напрямок ( $a_n \neq 0$ ) і може змінюватись також за модулем. Якщо обертається кілька тісно пов'язаних точок, то вони мають різні лінійні швидкості, але всі точки за проміжок часу  $\Delta t$  зміщуються на той самий кут  $\Delta \phi$ . Тому загалом їх рух визначають за вектором кутового зміщення  $\Delta \phi$  (аналогічним  $\Delta r$ ). Однак, на відміну від  $\Delta r, V, a$  й інших полярних векторів, напрямки яких очевидні, напрям вектора кутового зміщення визначають як у аксіального. Тобто вектор кутового зміщення є відрізок, довжина якого в певному масштабі чисельно дорівнює величині кута повороту, спрямованого за віссю обертання в бік, визначений за правилом правого гвинта. Тобто напрям вектора має збігатися з поступальним рухом гвинта, якщо його повертати в напрямку обертання тіла. Кутові зміщення додають за правилом паралелограма лише у разі елементарних кутових зміщень.

Основними кінематичними величинами, що характеризують обертальний рух, є кутова швидкість і кутове прискорення. Кутову швидкість у певний момент часу визначають межею відношення  $\Delta \phi$  (вектора зміщення) до відповідного проміжку часу  $\Delta t$ :

$$\vec{\omega} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta \phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (1.10)$$

Кутова швидкість – це вектор, спрямований за віссю обертання за правилом правого гвинта. Поряд із кількісною характеристикою обертання вона показує і його напрям у кожний момент часу. За одиницю кутової швидкості візьмемо рад/с. Виразимо кутову швидкість через лінійну. Для цього у формулу ку-

тової швидкості підставимо рівняння  $\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{r}$ , яке випливає із означення кута в системі СІ, тобто

$$\vec{\omega} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta S}}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r} = \frac{V}{r}. \quad (1.11)$$

Цей вираз показує залежність тільки між модулями векторів  $\omega$ ,  $V$  і  $r$  для заданої точки. А співвідношення цих векторів виражають векторним добутком  $\vec{V} = [\vec{\omega} \vec{r}]$ . Нагадаємо, що векторний добуток – це вектор, модуль якого дорівнює  $\omega r \sin\alpha$  (де  $\alpha$  – кут між векторами  $\omega$  і  $r$ ), спрямований перпендикулярно до  $\omega$  і  $r$  у бік поступального переміщення гвинта, коли його головка робить найкоротший поворот від  $\omega$  до  $r$ . Якщо під час обертального руху кутова швидкість змінюється, то цю зміну оцінюють за кутовим прискоренням  $\vec{\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\text{або}) = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\varphi}$ , тобто похідною по часу.

Кутове прискорення – це вектор, що збігається з напрямком кутової швидкості у прискорених рухах, або спрямований проти неї в уповільнених.

Кутове прискорення пов'язане з тангенціальним прискоренням точки

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega \cdot r)}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\beta. \quad (1.12)$$

Якщо  $\beta=0$ , то це рівномірний обертальний рух,  $\beta=\text{const}$  – рівнозмінний обертальний рух, для якого  $d\omega = \beta dt$ . Звідси через інтегрування знаходимо  $\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$ ;  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta \cdot t^2}{2}$ .

### 1.1.4 Вимірювання фізичних величин

Сукупність закономірних змін, які з часом відбуваються з певними тілами, називають фізичним процесом. Ці зміни визначають кількісно через вимірювання різних фізичних величин, таких як довжина, час, швидкість, напруження, маса і т. ін. Фізичні величини характеризують основні властивості тіл або розглядуваних процесів. Зміни фізичних величин завжди визначають кількісно, вдаючись до порівняння даної величини з певною заздалегідь обраною однорідною величиною, прийнятою за одиницю вимірювань. Отже, для вимірювання будь-якої фізичної властивості необхідно обрати одиницю вимірювань даної властивості, тобто фізичну властивість, якій можна приписати число 1. Тоді цей процес зводиться до порівняння вимірюваних властивостей із властивістю, прийнятою за одиничну. У фізиці існує багато різних фізичних величин, виражених тільки у власних одиницях вимірювань. Однак працювати з такою кількістю одиниць незручно. А оскільки різні фізичні величини не є незалежні і між ними існують різноманітні зв'язки, то кількість одиниць можна значно зменшити. Використовуючи різні зв'язки, одні фізичні величини можна виразити через інші. У результаті залишиться незначна кількість фізичних величин, через одиниці яких можна виразити інші. Усі ці

величини називають основними, а всю сукупність одиниць фізичних величин – системою одиниць. Кожну фізичну величину визначають на основі закономірностей, отриманих дослідним шляхом. Для кожної фізичної величини можна обрати власну одиницю, незалежно від інших величин. Утім у фізиці довільно встановлюють одиниці вимірювань лише для деяких величин (основних). Тоді одиниці всіх інших величин можна виразити через них. При цьому основні одиниці будуть простими, а всі інші – складними.

Загалом відсутні певні критерії для вибору основних одиниць та їх кількості. Однак у результаті практичного застосування найдоцільнішою виявилась міжнародна система одиниць – СІ. Основними одиницями в цій системі є: 1 метр (довжина), 1 секунда (час), 1 кілограм (маса), 1 ампер (сила струму), 1 кельвін (температура), 1 кандела (сила світла).

### 1.1.5 Елементи теорії похибок

У природничих науках вимірюванню величин приділяють велику увагу. Правильно здійснені вимірювання не тільки сприяють глибшому осмисленню функціональних залежностей між явищами, але і дозволяють оцінити межі їх застосування в конкретних умовах.

Процедура вимірювання полягає в порівнянні вимірюваної величини з іншою однорідною величиною, взятою за одиницю міри. Відповідно до цього визначення основне рівняння вимірювань можна записати у вигляді

$$A = m \cdot B,$$

де  $A$  – вимірювана величина;

$B$  – одиниця міри;

$m$  – число, що показує, у скільки разів вимірювана величина більша за одиницю міри.

У процесі вимірювання внаслідок недосконалості вимірювальних приладів і наших органів чуття неминуче з'являються похибки. Слід пам'ятати, що жодне вимірювання не можна виконати абсолютно точно. Вірогідність цього твердження впливає хоча б уже з того факту, що вимірювальні прилади теж виготовляють з відносною точністю. До речі, під точністю приладу розуміють ціну найменшої поділки вимірювальної шкали, від якої можна зробити відлік.

Усі можливі похибки за характером походження поділяють на три типи.

1. Грубі похибки спричинені недостатньою уважністю експериментатора. Для їх усунення слід акуратно і старанно виконувати роботу та записувати результати.

2. Систематичні похибки у разі повторного вимірювання зберігають власні величину і знак. Наприклад, у вимірювальному приладі зміщений нуль чи на результат вимірювання впливає вологість повітря або сила Архімеда тощо. У цьому разі до результату можна внести відповідну поправку. Систематичну похибку, обумовлену неточністю вимірювального приладу, можна зменшити, використавши більш точний прилад. Найдієвіший спосіб виявлення систематичних похибок – це порівняння результатів вимірювання однієї і тієї самої величини, отриманих принципово різними методами.

3. Випадкові похибки через випадкові причини в ході повторних вимірювань не зберігають ні величини, ні знака. Наприклад, у разі зважування на чашкових терезах джерелами похибок можуть бути коливання повітря, що неоднаково діє на чашки терезів, порошина, що раптом осіла на одній із чашок, нагрівання однієї половини терезів від наближення руки людини і безліч інших причин, які практично неможливо врахувати. Можна вжити заходів до зменшення випадкових похибок, але усунути їх повністю неможливо.

### 1.1.6 Обробка результатів вимірювань

Випадкові похибки мають місце у межах статистичних закономірностей, їх описують за теорією ймовірності: якщо під час певного вимірювання отримали результат, більший за істинний, то настільки ж імовірно з подальших вимірювань отримати менше значення. У цьому разі очевидно, що за великої кількості вимірювань однаково ймовірно отримати як завищене, так і занижене значення вимірюваної величини. Тому середнє арифметичне значення  $\bar{x}$  ряду вимірювань наближене до істинного значення вимірюваної величини більше, ніж кожен окремих вимір  $x$ . Отже, за найімовірніше значення вимірюваної величини  $x$  беремо значення

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

де  $n$  – кількість вимірювань;  $x_i$  – результати окремих вимірювань величини  $x$ .

Різниця  $\bar{x} - x_i = \Delta x_i$  називають абсолютними похибками окремих вимірювань.

Середнє арифметичне, знайдене з результатів визначення абсолютних похибок окремих вимірювань, називають середньою абсолютною похибкою результатів вимірювань  $\Delta \bar{x}$ :

$$\Delta \bar{x} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}{n}.$$

Істинне значення вимірюваної величини тепер запишемо так:

$$x_{icm} = \bar{x} \pm \Delta \bar{x}.$$

Цей запис визначає інтервали, у межах яких перебуває вимірювана величина. Більш безпосереднє уявлення про точність методу вимірювання в даних умовах отримують, увівши відносну похибку  $\varepsilon$ , яку зазвичай виражають у відсотках:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}.$$

Оцінка точності вимірювання за середньою арифметичною похибкою неповна, оскільки не вказано ймовірність того, що істинне значення шуканої величини перебуває саме в цьому інтервалі. Тому на практиці оцінку похибки

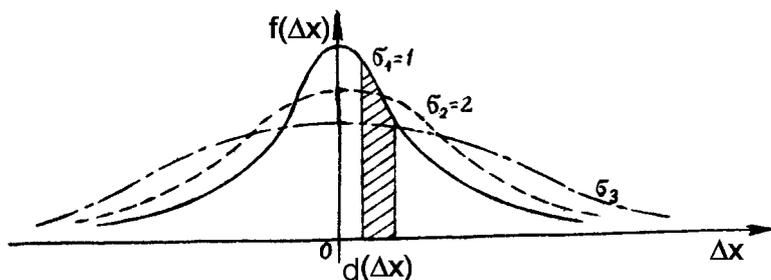
здійснюють здебільшого із застосуванням середньої квадратичної похибки. При цьому виходять із певних припущень.

1. Похибки вимірювань набувають безперервного ряду значень.
2. У разі великої кількості спостережень похибки однакової величини, але різного знака трапляються однаково часто.
3. Великі похибки трапляються рідше, ніж малі.

Німецький учений К. Гаус отримав нормальний закон розподілу випадкових похибок:

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma \cdot 2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}\right),$$

де  $f(\Delta x)$  – функція розподілу випадкових похибок;  $\sigma$  – середня квадратична стандартна похибка;  $\sigma^2$  – дисперсія вимірювань. Величина дисперсії вимірювань слугує основним параметром, що визначає вид кривої розподілу випадкових похибок. На рисунку зображено графік функції  $f(\Delta x)$  для трьох значень  $\sigma$  ( $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ ). Як бачимо, у разі підвищення точності вимірювань максимум кривої стає вищим, а крива розподілу – вужчою.



**Рис.1.5. Криві розподілу випадкових похибок за різних значень  $\sigma$**

Добуток  $f(\Delta x)d(\Delta x) = d\alpha$  визначає ймовірність того, що під час вимірювання похибка перебуватиме в інтервалі  $d(\Delta x)$ . Цей показник називають довірчою ймовірністю, або коефіцієнтом надійності, а інтервал  $d(\Delta x)$  – довірчим інтервалом. Чисельно довірна ймовірність  $\alpha$  дорівнює площі заштрихованої фігури.

Зрозуміло, що  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)d(\Delta x) = 1$ , тобто ймовірність того, що похибка має

тиме довільне значення, дорівнює одиниці. Це ймовірність достовірної події. Очевидно, що чим більшої надійності ми вимагаємо, тим більший довірчий інтервал, і навпаки – чим більший довірчий інтервал ми задаємо, тим імовірніше, що результати вимірювань не вийдуть за його межі.

Середню квадратичну похибку визначають або безпосередньо з кривих Гауса, або за формулою

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_x, \quad \text{де } S_x = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n-1}}.$$

Знаючи  $\sigma$ , можна обчислити величину довірчої ймовірності для заданого довірчого інтервалу від  $\bar{x} - \Delta x$  до  $\bar{x} + \Delta x$  і навпаки. Для цього користуються спеціальними таблицями, у яких наведено обчислені значення для ряду довірчих імовірностей.

Зазвичай на практиці важливо знати довірчий інтервал не для окремого вимірювання, а для середнього арифметичного значення вимірюваної величини. Для цього застосовують так звану середню квадратичну похибку середнього арифметичного:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\bar{x}}, \quad \text{де } S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

Визначення довірчого інтервалу за допомогою розподілу Гауса має істотний недолік: необхідно знати  $\sigma$  або  $\sigma_{\bar{x}}$ , що потребуватиме великої кількості вимірювань. Зазвичай достатньо визначити тільки величину  $S_x$  чи  $S_{\bar{x}}$ , що відповідає тому чи іншому випадку, але завжди порівняно невеликій кількості вимірювань. Дуже часто саме  $S_x$  чи  $S_{\bar{x}}$  називають середньою квадратичною похибкою окремого або середнього арифметичного значення вимірювань.

У разі скінченної кількості вимірювань застосовують методику, розроблену англійським ученим У. Гассетом, більше відомим під псевдонімом Стьюдент, зокрема інтервал випадкової похибки для середнього арифметичного визначають за формулою

$$\Delta x_{\text{вип}} = t_{\alpha, n} \cdot S_{\bar{x}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}},$$

де  $t_{\alpha, n}$  – коефіцієнт Стьюдента.

Коефіцієнт Стьюдента обчислюють за законами теорії ймовірності для різних значень  $\alpha$  і  $n$ , зазвичай він уміщений у таблиці. Якщо в інструкції відсутні відповідні рекомендації, то для довірчої ймовірності слід брати значення, що дорівнює 0,95.

Розрізняють два види вимірювань – прямі й непрямі. Результат прямих вимірювань безпосередньо репрезентує шукану величину. Наприклад, вимір довжини за допомогою лінійки, мікрометра, штангенциркуля, вимір часу за допомогою годинника, секундоміра тощо. У ході непрямих вимірювань шукану величину визначають за результатами прямих вимірювань інших величин, пов'язаних із шуканою величиною певною функціональною залежністю. Наприклад, густина речовини  $\rho = m / V$ . Тут  $m$  і  $V$  визначатимемо через прямі вимірювання, а  $\rho$  – через непрямі.

## 1.1.7 Порядок обробки результатів вимірювань

### Прямі вимірювання

1. Зробити кілька вимірювань  $x_i$  і записати результати кожного з них у таблицю.

2. Визначити середнє арифметичне значення результатів вимірювань за

формулою  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ .

3. Обчислити абсолютні похибки окремих вимірювань  $\Delta x_i$  і їх квадрати  $(\Delta x_i)^2$ .

4. Обчислити середньоквадратичну похибку середнього арифметичного за формулою  $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}$ .

5. За рекомендацією викладача задати довірчу ймовірність  $\alpha$ .

6. За значеннями  $\alpha$  і  $n$  знайти коефіцієнт Стюдента  $t_{\alpha,n}$  у таблиці.

7. Обчислити величину випадкової похибки за формулою

$$\Delta x_{\text{вип}} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\bar{x}} = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

8. Визначити систематичну похибку вимірювань  $\Delta x_{\text{сист}}$ , яка дорівнює половині точності вимірювального приладу.

9. Визначити повну похибку вимірювань за формулою  $\Delta x_{\text{повн}} = \sqrt{\Delta x_{\text{сист}}^2 + \Delta x_{\text{вип}}^2}$ .

10. Обчислити відносну похибку вимірювань за формулою

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_{\text{повн}}}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

11. Записати кінцевий результат у вигляді  $x_{\text{іст}} = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{повн}}$ .

n	$x_i$	$\bar{x}$	$\Delta x_i$	$\Delta x_i^2$	$S_{\bar{x}}$	$\alpha$	$t_{\alpha,n}$	$\Delta x_{\text{вип}}$	$\Delta x_{\text{сист}}$	$\Delta x_{\text{повн}}$	$x_{\text{іст}}$	$\varepsilon$

### Непрямі вимірювання

#### І спосіб

Зазвичай необхідно визначити шукану величину  $y$  за результатами вимірювання інших величин, пов'язаних з нею певною функціональною залежністю, тобто виконати для неї непрямі вимірювання. Тож шукану величину  $y$  визначаємо за результатами прямого вимірювання кількох величин, тобто вона є функція кількох змінних:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_j),$$

де  $\bar{x}_j$  – середні значення величин, визначуваних прямим способом.

Із теорії випливає формула для визначення абсолютної похибки функції  $f$ :

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j\right)^2}.$$

Відносну похибку величини, вимірюваної непрямим способом, визначимо за формулою

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j\right)^2},$$

де  $\frac{\partial \ln f}{\partial x_j}$  – частинні похідні від натурального логарифма функції  $f$  за від-

повідним аргументом, а  $(\Delta x_j)$  – повні похибки прямого вимірювання величин  $x_i$ .

Розглянемо приклади розрахунку відносної похибки величини, вимірюваної непрямим способом.

**Приклад.** Визначення прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.

Прискорення вільного падіння розрахуємо, визначивши період коливань математичного маятника  $T$  за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння, а  $l$  – довжина нитки маятника.

Із цієї формули для  $g$  отримаємо:  $g = 4\pi^2 l / T^2$ . Довжину нитки маятника і період його коливань визначимо на основі прямих вимірювань із похибками  $\Delta l$  і  $\Delta T$ . Обчислимо відносну похибку визначення величини прискорення вільного падіння, вимірюваного непрямим способом.

Для цього знайдемо натуральний логарифм  $\ln g$ :

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - 2 \ln T.$$

Потім визначимо похідні за  $l$  і  $T$ :

$$\frac{\partial \ln g}{\partial l} = \frac{1}{l}; \quad \frac{\partial \ln g}{\partial T} = -\frac{2}{T}.$$

Підставимо знайдені вирази в розрахункову формулу й отримаємо рівняння

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{1}{l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{2}{T} \cdot \Delta T\right)^2}.$$

Якщо  $l$  і  $T$  визначено з довірчою ймовірністю  $\alpha$ , то, підставивши ці значення в попередню формулу, остаточно визначимо довірчий інтервал похибки вимірювання. Під  $\Delta l$  і  $\Delta T$  у формулі розуміємо повні похибки вимірювання.

$$\Delta l_{\text{вун}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta l_i)^2}{n(n-1)}}; \Delta T_{\text{вун}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}.$$

Остаточний результат:  $g_{icm} = \bar{g} \pm \Delta g$ .

Отже для обчислення довірчого інтервалу в разі непрямого вимірювання функції  $f$  слід за результатами вимірювання величин  $x_i$  визначити повні похибки  $\Delta x_{j\text{повн}}$  і занести результати в таблицю. Відтак розрахувати середнє значення функції  $\bar{f}$  і відносну похибку її визначення  $\varepsilon$ . Записати в таблицю істинне значення величини  $f_{icm}$ , яке дорівнює  $f_{icm} = \bar{f} \pm \Delta f$ .

n	$x_i$	$\bar{x}_i$	$\Delta x_i$	$\Delta x_i^2$	$S_{\bar{x}_j}$	$\alpha$	$t_{\alpha, n}$	$\Delta x_{j\text{повн}}$	$\bar{f}$	$\Delta f$	$f_{icm}$	$\varepsilon$

### II спосіб

Існує ще один спосіб обчислення довірчого інтервалу в разі непрямого вимірювання функції  $f(\bar{x}_j)$ . Кожен аргумент  $x_i$  необхідно виміряти  $n$  раз і отримати значення  $x_{ij}$ . Потім  $n$  раз обчислити функції  $f_i$ . Далі довірчий інтервал визначити за схемою, наведеною для обробки результатів прямих вимірювань, тобто обчислити  $\Delta f_i$ ,  $\Delta f_i^2$  і т.д. (таблиця). Результати розрахунків занести до таблиці. Цей спосіб не враховує систематичну помилку.

n	$x_{ij}$	$f_i$	$\bar{f}$	$\Delta f_i$	$\Delta f_i^2$	$S_{\bar{f}}$	$\alpha$	$t_{\alpha, n}$	$\Delta f_{\text{вун}}$	$\Delta f_{\text{повн}}$	$f_{icm}$	$\varepsilon$

Обидва способи обчислення похибок дають майже тотожні результати, якщо похибки вимірювання малі порівняно з вимірюваною величиною. Тому, обираючи спосіб оцінки похибок, слід керуватися практичною зручністю.

### Правила округлення наближених чисел і арифметичних дій над ними

У процесі обробки результатів експериментальних вимірювань, отриманих у ході виконання лабораторних робіт, необхідно дотримуватися правил округлення наближених чисел і дій над ними.

1. У ході округлення числа останню із залишених цифр збільшуємо на одиницю, якщо скорочувана цифра більша чи дорівнює 5, і залишаємо незмінною, якщо скорочувана цифра менша 5. Наприклад, число 0,4254 під час округлення до третього десяткового знака запишемо як 0,425, а до другого знака – 0,43.

2. Написання числа з нулями (наприклад, 3 000) означає, що під час вимірювань урахували не тільки сотні, десятки, а й одиниці. Якщо враховувати тільки тисячі, то число запишемо у вигляді  $3 \cdot 10^3$ . Число 3,40 означає, що під час вимірів урахували і соті частки, а в числі 3,2 – тільки десяті, тобто тут точність у 10 разів менша.

3. У ході додавання й віднімання наближених чисел необхідно спочатку округлити їх до однакового порядку точності. Наприклад, якщо додаємо числа 2,31, 4,765 і 6,0 то складати маємо округлені числа 2,3, 4,8 і 6,0.

4. Добуток або частка під час множення або ділення двох наближених величин повинні мати стільки ж цифр, скільки їх містить число з найменшою кількістю значущих цифр. Наприклад:  $37 \cdot 1,72 = 64$  (а не 63,64);  $454,1 : 75,01 = 6,1$  (а не 6,05).

Значущими цифрами числа називають усі його цифри, починаючи з першої зліва, відмінної від нуля, крім нулів, що стоять наприкінці числа на місці відкинутих під час округлення цифр.

Наприклад, у числі 1,7 дві значущі цифри, а в числі 0,0408 – три.

5. У проміжних результатах усіх арифметичних дій слід брати на одну цифру більше, ніж рекомендовано у правилах 3 і 4. Наприклад:  $327 \cdot 23 \cdot 11 = (752 \cdot 10) \cdot 11 = 83 \cdot 10^3$ . Залишати на одну цифру більше, ніж це вимагає правило 4, радимо і тоді, коли перша значуща цифра остаточного добутку або частки дорівнює 1, 2, 3 або 4.

6. У разі піднесення наближених чисел у квадрат і куб або добуванні коренів і логарифмуванні шукане число повинне мати стільки значущих цифр, скільки їх містить основа або підкореневе число. Наприклад:  $2,3^2 = 5,4$  (а не 5,39);  $0,8^3 = 0,5$  (а не 0,512);  $2,37^{1/2} = 1,54$  (а не 1,539).

Наголосимо, що під час виконання лабораторних робіт точність результату визначають точністю вимірювальних приладів, старанністю проведення вимірювань. Її не можна підвищити штучним набиранням знаків у ході арифметичних дій. Крім того, необхідно пам'ятати, що похибка результату властива не обчисленням, а вимірам. Тому вимірювання слід виконувати ретельно й акуратно.

### 1.1.8 Вимірювання геометричних розмірів

Ноніус – прилад, використовуваний для точного (до часток міліметра) визначення довжин прямолінійних відрізків (лінійний ноніус) або довжин колових дуг, за якими вимірюють кути, що спираються на них (коловий ноніус). Лінійний ноніус є додаток звичайного масштабу. Він являє собою невелику лінійку, яка рухається вздовж основного масштабу. На лінійку нанесено невеличку шкалу, що містить  $m$  поділок. Сумарна довжина всіх поділок дорівнює довжині  $(m-1)$  найменших поділок основного масштабу (рис. 1.6).

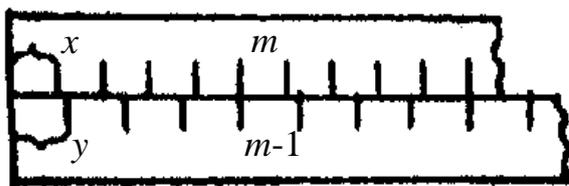


Рис. 1.6. Ноніус

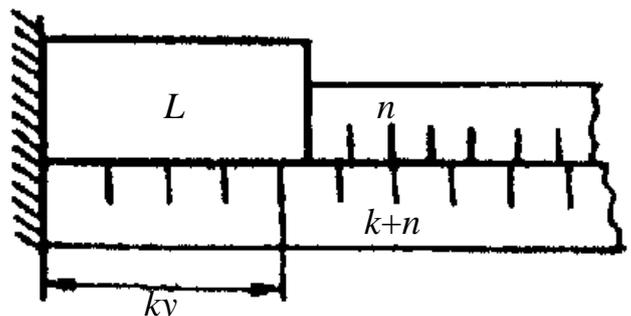


Рис. 1.7. Вимірювання довжини

### відрізка за допомогою ноніуса

Якщо відстань між сусідніми штрихами ноніуса –  $x$ , а між сусідніми штрихами масштабу –  $y$ , то отримуємо  $mx = (m-1)y$ , звідси

$$x = y - \frac{y}{m} \quad .$$

(1.13)

Різницю в довжині поділок шкали та ноніуса називають точністю ноніуса:

$$\alpha = y - x = \frac{y}{m} \quad .$$

(1.14)

У штангенциркулях, використовуваних на практиці, довжина  $m$  поділок ноніуса часто дорівнює довжині  $(2m-1)$  поділок основного масштабу.

Тоді  $mx = (2m-1)y$ , звідси  $x = 2y - \frac{y}{m}$ .

Точність такого ноніуса визначимо за формулою

$$\alpha = 2y - x = \frac{y}{m} \quad .$$

(1.15)

Розглянемо процес вимірювання за допомогою ноніуса. Нехай  $L$  – відрізок, довжину якого необхідно виміряти (рис.1.2). Сумістимо з його початком нульову поділку основного масштабу. Кінцева точка відрізка  $L$  розташована між  $k$  та  $(k+1)$  поділками масштабу. Тоді

$$L = ky + \Delta L \quad ,$$

(1.16)

де  $\Delta L$  – невідома частка поділки масштабу.

Тепер прикладемо ноніус до кінцевої точки відрізка у такий спосіб, щоб його нуль збігався з кінцевою точкою цього відрізка. Оскільки поділки ноніуса не дорівнюють поділкам масштабу, то визначимо таку поділку як  $n$  ноніуса, яка буде найближчою до відповідної  $(k+n)$ -ї поділки масштабу. Якщо поділки збіглися точно, то

$$\Delta L + nx = ny \quad ,$$

(1.17)

звідси

$$\Delta L = ny - nx = n(y - x) = \frac{y}{m}n = n\alpha \quad .$$

(1.18)

Тож  $L = ky + n\alpha$  або відповідно до (1.14)

$$L = ky + n\frac{y}{m} \quad .$$

(1.19)

Отже, довжина відрізка, вимірюваного за допомогою ноніуса, дорівнює кількості цілих поділок масштабу плюс добуток точності ноніуса та номера поділки ноніуса, що збігається з певною поділкою масштабу. Похибка, яка може виникнути за такого відліку, буде зумовлена неточним суміщенням  $n$ -ї поділки ноніуса та  $(k+n)$ -ї поділки масштабу, а її величина не буде перевищувати  $\alpha/2$ , оскільки у разі більшого відхилення цих поділок одна з сусідніх (справа або зліва) мала б відхилення менше ніж  $\alpha/2$ , і відлік необхідно було б здійснити за нею. Тож похибка ноніуса дорівнює половині точності.

## 1.2 Перелік контрольних питань

1. Способи опису руху. Кількісні визначення результату руху.
2. Швидкість і прискорення матеріальної точки у разі координатного, «природного» способів опису руху й опису за допомогою радіуса-вектора.
3. Рух твердого тіла. Поступальний рух твердого тіла. Швидкість і прискорення точок твердого тіла у разі поступального руху.
4. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Вектори кутового переміщення, кутової швидкості та кутового прискорення. Закон руху.
5. Швидкість і прискорення матеріальних точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
6. Плоский рух твердого тіла. Швидкість і прискорення точок твердого тіла у разі плоского руху. Миттєва вісь обертання.
7. Складний рух твердого тіла. Додавання обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються.

## 1.3. Лабораторні роботи

### 1.3.1 Лабораторна робота 1. Визначення геометричних розмірів твердих тіл. Ноніус

Штангенциркуль (рис. 1.8) використовують для вимірювання довжин, зовнішніх і внутрішніх діаметрів трубок та глибин отворів. Він включає в себе розділений на міліметри масштаб (М), уздовж якого пересувається ніжка (В) з

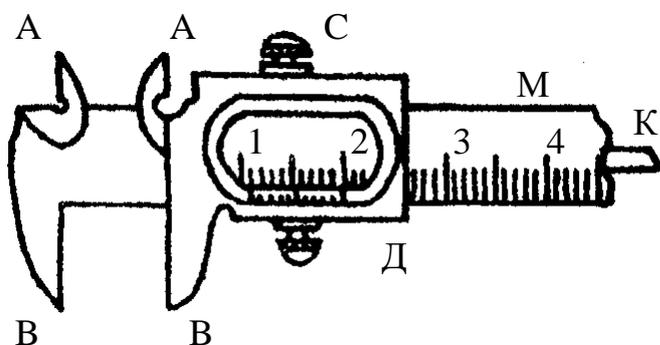


Рис. 1.8. Зовнішній вигляд штангенциркуля

рамкою (Д), затиснута гвинтом (С) і хвостом (К). В обоймі рамки навпроти поділок масштабу зроблено виріз із ноніусом. Зробивши достатній розхил штангенциркуля, поміщаємо тіло, розміри якого необхідно виміряти, у затискачі. Для цього ніжку штангенциркуля (В) підводимо так, щоб тіло було трохи затиснуте, та здійснюємо відлік. У ході вимірювання

внутрішнього діаметра трубки вводимо частини АА ніжок штангенциркуля у трубку та розсуваємо їх настільки, щоб вони торкалися внутрішніх стінок. Для обчислення глибин отворів слугує хвіст (К), який вводять у вимірюваний отвір.

Мікрометр (рис. 1.9) має вигляд лещат, у яких вимірюваний об'єкт затискають гвинтом. Ціна поділки основної шкали мікрометра В дорівнює 0,5 мм. При цьому половинні поділки, щоб не перевантажувати шкалу, розташовані під прямою лінією основної шкали. Крок мікрометричного гвинта в таких мікрометрах дорівнює 0,5 мм, а шкала барабана А містить 50 поділок із ціною 0,01 мм. Предмет, розміри якого необхідно виміряти, розміщуємо між гвинтом і протилежним йому упором. Обертанням барабана А підводимо торець гвинта до площини предмета. Остаточне натискання гвинтом на предмет слід здійснювати лише рукояткою С, фіксованою зі слабким тріском.

Під час відліку на мікрометрі до кількості поділок основної шкали В, взятої з точністю 0,5 мм, додаємо кількість сотих часток міліметра, визначених за шкалою барабана А навпроти горизонтальної лінії. Тричі вимірявши розміри тіла на різних ділянках, визначимо їх середні значення й об'єм тіла.

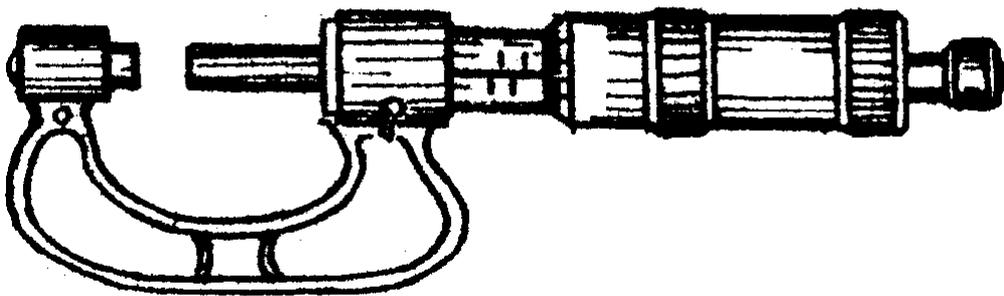


Рис. 1.9. Зовнішній вигляд мікрометра

### Порядок виконання експерименту

1. Користуючись штангенциркулем, виміряти геометричні розміри тіла 3 – 5 разів на різних ділянках і визначити їх середні й істинні значення, відтак обчислити об'єм тіла.
2. Повторити вимірювальну процедуру, скориставшись замість штангенциркуля мікрометром. Порівняти отримані значення.

## 2 Динаміка. Закони збереження

### 2.1 Теоретичні відомості

#### 2.1.1 Перший закон Ньютона. Принцип відносності Галілея

Динаміка – розділ фізики, що вивчає рухи тіл під дією прикладених до них сил. Сила – це величина, яка є міра у взаємодії тіл. Видатний італійський

учений Галілео Галілей ще у XVII ст. довів, що будь-якому тілу властиво зберігати рух, точніше його швидкість, і лише дія сили становить причину зміни руху. Властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називають інертністю, а саме явище збереження швидкості руху або стану спокою – інерцією. Узагальнюючи досягнення тогочасної науки, видатний англійський учений Ісаак Ньютон у 1687 р. сформулював основні закони динаміки, визначивши властивість інертності тіл як перший закон механіки.

Будь-яке тіло продовжує перебувати у своєму стані або стані прямолінійного й рівномірного руху, доки прикладені сили не зумовляють зміни цього стану. Оскільки опис руху тіла залежить від вибору системи відліку, то перший закон механіки має місце в системах, які переміщуються рівномірно і прямолінійно відносно нерухомої гіпотетичної системи. Такі системи називають інерціальними, тому має місце уточнене формулювання першого закону: існують системи, у яких тіло перебуватиме у стані спокою або в прямолінійному і рівномірному русі за умови компенсації дії на нього всіх інших тіл.

Якщо необхідно розглянути рух точки відносно системи відліку  $S'$ , яка рухається прямолінійно й рівномірно зі швидкістю  $V$  щодо вибраної інерціальної системи  $S$ , то координати точки  $M$  у системах  $S'$  та  $S$  будуть пов'язані перетворенням Галілея  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \cdot t$ , де  $\vec{r}$  і  $\vec{r}'$  – радіуси-вектори точки  $M$  у системах відліку  $S'$  та  $S$ . При цьому маємо на увазі, що хід часу однаковий в обох системах, тобто постулюємо абсолютність часу:  $t' = t$ . У спеціальній теорії відносності ці співвідношення не виконуються, тому що система  $S'$  рухається відносно  $S$  зі швидкістю, яка прямує до швидкості світла  $C$ . Тоді вдаються до перетворень Лоренца (або релятивістських перетворень). У разі нерелятивістського перетворення (перетворення Галілея) закон додавання швидкості має вигляд  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ , якщо взяти похідні за часом від кожної точки, де  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  і  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'$  – швидкості точки в системах  $S'$  і  $S$ ;  $V$  – постійна швидкість руху системи  $S'$  відносно  $S$ .

### 2.1.2 Другий і третій закони механіки. Закон збереження імпульсу

Спочатку з'ясуємо, що являє собою маса, як фізичне поняття. Первісно масу ототожнювали із вагою, навіть Г. Галілей припускався такої помилки. Лише коли Ж. Ріше у XVII ст. встановив, що вага тіла змінюється залежно від географічної широти, виникла потреба уточнити поняття про масу і вагу. Тому І. Ньютон провів серію дослідів і дійшов висновку, що відношення сили тяжіння тіла до прискорення його вільного падіння в пустоті є стала величина, що не залежить від положення тіла на земній поверхні. Услід за Ньютоном цю сталу величину назвали гравітаційною масою тіла. Першим законом механіки, як уже було зазначено, встановлено загальну властивість тіл – інертність. На дослідях було доведено, що відношення будь-якої сили до прискорення, якого вона надає певному тілу, є стала величина, що не залежить від походження сили. За

Л. Ейлером під цією сталою і незмінною величиною стали розуміти масу тіла, як міру інертності речовини, тобто інертну масу.

Пізніше численні досліди І. Ньютона і Л. Етвеша довели, що для будь-яких двох тіл відношення мас тяжіння дорівнює відношенню їх інертних мас. У класичній фізиці пропорційність гравітаційної маси й інертної вважали випадковою. Лише в теорії відносності було з'ясовано зв'язок між інертною і гравітаційною масою, саме тому у фізиці не розрізняють їх числових значень..

Отже, під поняттям маси тіла розуміють сталу величину, що не залежить від походження сил і дорівнює відношенню величини сили до прискорення, яке надає сила даному тілу.

З першого закону механіки відомо, що сила зумовлює зміну руху тіла, його прискорення. Другий закон І. Ньютона якраз стверджує: тіло, на яке діють сили, рухається з прискоренням, величину і напрям якого визначають відношенням рівнодійної всіх сил до маси тіла у вигляді рівняння  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ .

Другий закон Ньютона здебільшого записують у вигляді

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (2.1)$$

або

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}, \quad (2.2)$$

$$d(m\vec{V}) = \vec{F} \cdot dt, \quad (2.3)$$

де  $\vec{F}$  – вислідна зовнішня сила;  $m\vec{V} = \vec{p}$  – імпульс тіла (або кількість руху тіла), або  $d\vec{p} = \vec{F} \times dt$ , звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від величини прикладної сили, а й від часу її дії. Добуток сили на час її дії називають імпульсом сили. Вирази (2.1)–(2.3) становлять рівняння матеріальної точки.

За третім законом механіки зовнішня дія на тіло, що зумовлює зміну його руху, має характер взаємодії. Третій закон І. Ньютона стверджує: у будь-якої дії завжди існує рівна протидія, інакше кажучи, сили дії двох матеріальних точок одна на одну однакові за величиною і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$

Результати дії сили в різних практичних прикладах легше пояснити, якщо розрізняти за І. Ньютоном статичні та динамічні вияви сил.

Результатами статичного вияву сили є тиск на тіла, які перешкоджають руху, і їх деформація. Статичне вимірювання сили здійснюють важільними або пружинними терезами. Зрозуміло, що сила, яка виявляється статично, завжди викликає рівну їй за величиною і протилежну за напрямком реакцію опори – силу пружної деформації.

Результатом динамічного вияву сили є прискорення – тангенціальне або нормальне. У таких випадках силу визначають за другим законом Ньютона  $F = ma$ , зокрема за формулою доцентрової сили  $F = \frac{mV^2}{r}$ .

Закон збереження імпульсу є один із найважливіших законів природи. Його зміст розкрив І.Ньютон: якщо дві матеріальні точки масами  $m_1$  і  $m_2$  починають взаємодіяти, то сумарна кількість руху точок і після взаємодії однакова.

Дійсно, зміну кількості руху кожної точки визначають за другим законом механіки

$$m_1 \cdot V_1^| - m_1 \cdot V_1 = m_1 (\Delta V_1) = F_1 \Delta t \quad (2.5)$$

і

$$m_2 \cdot V_2^| - m_2 \cdot V_2 = F_2 \Delta t, \quad (2.6)$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – маси точок;  $V_1^|$  і  $V_1$  – швидкості першої точки до і після взаємодії;  $\Delta t$  – час взаємодії. Однак за третім законом механіки  $F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t$ , тому  $m_1 \cdot V_1^| - m_1 \cdot V_1 = -(m_2 \cdot V_2^| - m_2 \cdot V_2)$ , звідки  $m_1 \cdot V_1^| + m_2 \cdot V_2^| = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$  або  $\sum_i m_i \cdot \vec{V}_i = const$ .

Це і є математичний вираз закону збереження імпульсу: за будь-яких взаємодій точок ізольованої системи векторна сума їх імпульсів залишатиметься сталою.

### 2.1.3 Рух тіл зі змінною масою. Рівняння Мещерського

Класичним прикладом руху тіла змінної маси вважається рух важкого ланцюга, який падає вниз з горизонтальної підстановки так, що весь час усе нові його ланки падають. Знайдемо основне рівняння динаміки поступального руху тіла змінної маси.

Із другого закону Ньютона усяка зміна імпульсу системи є результатом дії зовнішньої сили. Запишемо це у вигляді рівняння

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt. \quad (2.7)$$

Розглянемо рух ракети, коли вона достатньо мала і маса її змінюється неперервно, без стрибків: коли вихід продуктів згоряння не змінює центра маси ракети. Інакше кажучи, під ракетою уявлятимемо матеріальну точку змінної маси. Нехай у момент часу  $t$  маса ракети була  $m$ , а її швидкість відносно нерухомої системи координат  $\vec{V}$ . Нехай за час  $\Delta t$  з ракети вилітають продукти згоряння масою  $dm$  зі швидкістю  $\vec{W}$ . У результаті за час  $dt$  маса ракети буде  $(m - dm)$ , а швидкість  $(\vec{V} + d\vec{V})$ . Тоді із другого закону механіки

$$(m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + dm \cdot \vec{W} - m\vec{V} = \vec{F} dt, \quad (2.8)$$

де перші два доданки – це імпульс ракети та газів у момент часу  $(t + dt)$ , а третій доданок – це імпульс ракети в момент часу  $t$ .

Якщо перетворити (2.8) і знехтувати членом другого порядку  $dm \times dV$ , то матимемо

$$m d\vec{V} + (\vec{W} - \vec{V}) dm = \vec{F} dt, \quad (2.9)$$

або, якщо поділити на  $dt$ , то

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + (\vec{W} - \vec{V}) \frac{dm}{dt}. \quad (2.10)$$

бо  $\frac{d\vec{V}}{dt} < 0$

Якщо  $\vec{W} - \vec{V} = \vec{U}$  – швидкість вилітання газів відносно ракети, то

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{U} \frac{dm}{dt}. \quad (2.11)$$

Це рівняння називають рівнянням Мещерського, де  $\vec{F}$  – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на ракету (сила тяжіння й опору середовища), а другий доданок виражає реактивну силу, що діє на ракету з боку газів, що вилітають.

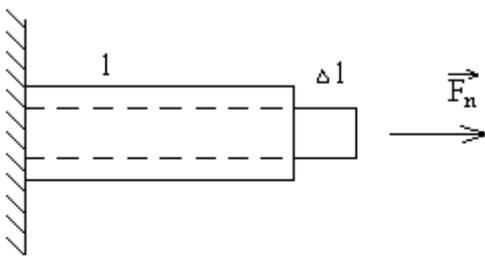
Легко побачити, що при  $dm/dt = 0$  рівняння (2.11) переходить у вираз другого закону Ньютона для випадку сталої маси.

### 2.1.4 Сили пружних деформацій

У механічних явищах домінуючими є сили пружних деформацій, сили тертя, гравітаційні сили. Два перші види сил мають електромагнітну природу. Розглянемо сили пружних деформацій. Різновиди деформацій залежать від характеру зовнішньої дії. Найзагальнішими з них є деформації *розтягу*, *стиску*, *зсуву*, *кручення*.

### 2.1.5 Деформація розтягу

Якщо один кінець довгого стержня закріпити, а до другого прикласти розтягуючу силу  $F_n$ , то стержень видовжиться на  $\Delta l$  (рис. 2.1). Пружні властивості



реальних тіл залежно від їхньої деформації зручно вивчати за так званою діаграмою деформування. Основні інтервали діаграми розтягнення стержня зображені на рис.2.2: ОА – область пружних деформацій, тобто таких, які повністю зникають після припинення дії зовнішньої сили; АВ – зона залишкових деформацій; ВС – область текучості перед руйнуванням тіла.

**Рис. 2.1.** Деформація стержня

У процесі здійснення пружної деформації виникають внутрішні сили, що намагаються надати тілу попередніх розмірів і форми. Їх називають повертаючими, або пружними силами. За законом Гука  $F = -kX$ , де  $F$  – пружна сила;  $X$  – величина пружної деформації;  $k$  – коефіцієнт жорсткості тіла. Знак “–” показує, що сила напрямлена в бік зменшення деформації. Особливості механіки деформацій полягають у внутрішній кристалічній будові твердих тіл, в існуванні між атомами решітки одночасно сил притягання, відштовхування, залежно від відстані  $r$  між атомами (рис. 2.3). При  $r < r_0$  показано круте зростання сил відштов-

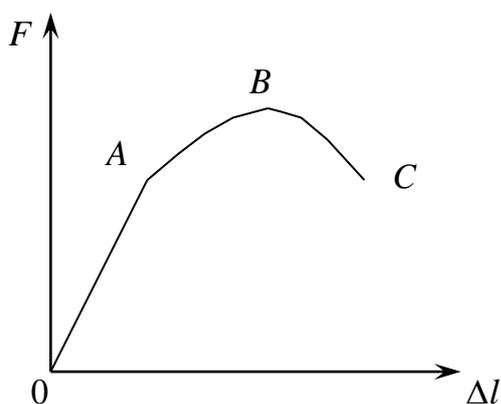


Рис. 2.2. Діаграма розтягнення стержня

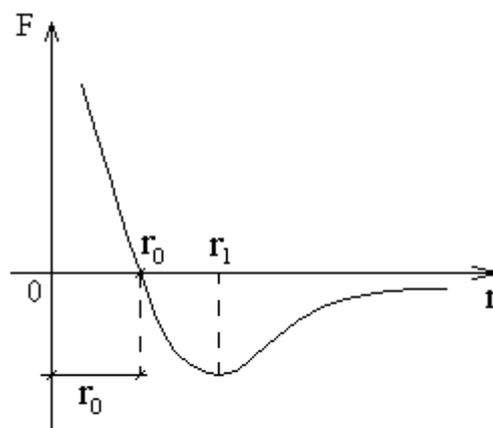


Рис. 2.3. Залежність сили міжатомної взаємодії від відстані

хування, при  $r = r_0$  - стан рівноваги, при збільшенні відстані ( $r > r_0$ ) зростають сили притягання. Самостійно проаналізуйте поведінку сил притягання при  $r_1 < r < r_0$ ;  $r > r_1$ .

Якщо ввести поняття *відносного видовження*  $\Delta l / l = \varepsilon$  і *механічної напруги*  $\sigma_n = \frac{F_n}{S}$ , де  $S$  – площа поперечного перерізу, то можна закон Гука записати в іншому вигляді

$$\sigma_n = E \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \varepsilon, \quad (2.12)$$

де  $E$  – модуль Юнга, що залежить від речовини і його фізичного стану.

Якщо  $\frac{\Delta l}{l} = 1$ , то  $\sigma_n = E$ . Величина  $\alpha = \frac{1}{E}$  називається коефіцієнтом пружності в деформації розтягу.

### 2.1.6 Деформація стиску

У вигляді односторонньої деформації стиску закон Гука має вигляд

$$\sigma_n = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Delta d}{d}, \quad (2.13)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт одностороннього стиску,  $\frac{\Delta d}{d}$  – відносне потовщення стержня.

Деформація стиску та розтягу супроводжується зміною поперечних розмірів стержня, їх характеризують коефіцієнтом Пуасона у вигляді

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.14)$$

### 2.1.7 Деформація зсуву

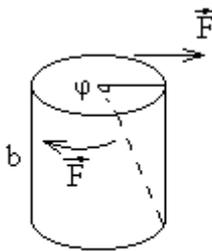
Деформація зсуву полягає в зміщенні поперечних шарів тіла один відносно іншого. Це можна спостерігати на бруску, якщо його нижню основу закріпити, а до верхньої прикласти тангенціальну силу  $F_1$ . Тоді закон Гука має вигляд

$$\sigma_\tau = G \cdot \psi, \quad (2.15)$$

де  $G$  - модуль зсуву (він залежить від матеріалу);  $\psi = \frac{b \cdot b_1}{d}$  - відносний зсув,  $\sigma_\tau$  тангенціальна механічна напруга.

### 2.1.8 Деформація кручення

Якщо циліндричний стержень з одного кінця закріпити, а до іншого його кінця прикласти момент сил  $M$ , то стержень зазнає деформацію кручення (рис. 2.4). Кут закручення  $\phi$  визначає абсолютне кручення,  $\phi/b$  – відносне кручення. Закон Гука для цього випадку має вигляд



$$M = D \frac{\phi}{b}, \quad (2.16)$$

Рис. 2.4 Деформація кручення

де  $D$  – модуль кручення, який залежить від матеріалу зразка, радіуса  $R$  і довжини зразка  $b$ .

### 2.1.9 Механічні властивості твердих тіл

Механічні властивості твердих тіл характеризують їх здатність конкретним чином реагувати на зовнішній механічний вплив (деформацію), тобто змінювати форму або об'єм під дією зовнішніх сил. До механічних властивостей відносять міцність, пластичність, пружність, твердість та ін.

За ступенем викривлення вихідної форми тіла під дією зовнішніх сил деформацію поділяють на три типи (рис. 2.5).

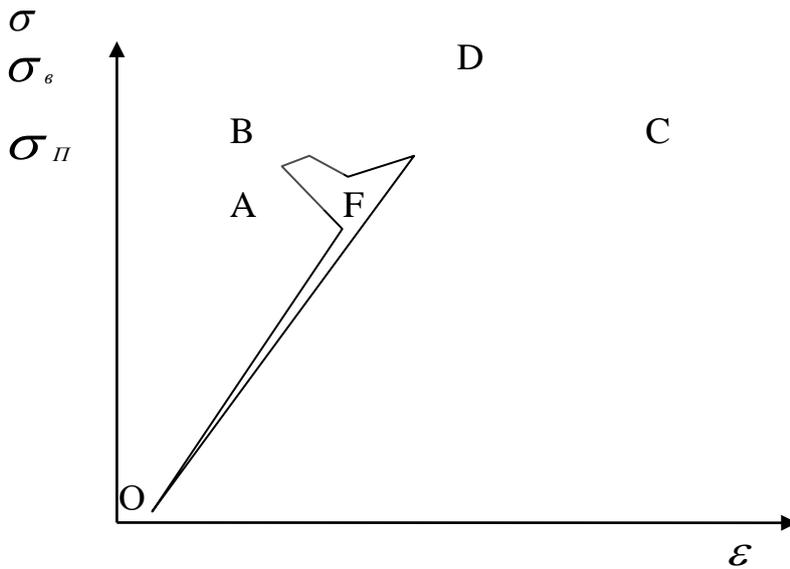


Рис. 2.5. Діаграма розтягнення

1. Пружна деформація, коли після припинення дії зовнішніх сил відновлюються попередні об'єм і форма тіла.

2. Непружна, або пластична, деформація, коли після припинення дії зовнішніх сил зміни об'єму або форми тіла стають незворотними.

3. Руйнування.

Залежно від характеру дії зовнішньої сили на тіло розрізняють деформацію розтягнення, стиснення, кручення, згинання, зсуву. Усі ці види деформації здебільшого

можна звести до деформації розтягнення-стиснення, деформації зсуву, всебічного стиснення.

Дію зовнішньої сили на тіло характеризує значення сили  $f$  (або величина  $\sigma = \partial f / \partial S$ ), яку називають механічним напруженням. Якщо  $\partial f \perp \partial S$ , то напруження вважають нормальними, а якщо  $\partial f \parallel \partial S$  – дотичними. Так, за деформації розтягнення напруження загалом нормальне, а за зсуву – дотичне. Реакцію тіла на дію сили характеризують:

а) за абсолютною деформацією  $\Delta l$  – абсолютною зміною лінійних розмірів у напрямку дії сили (або  $\Delta V$  – абсолютною зміною об'єму тіла в разі всебічного стиснення або розтягнення);

б) відносною деформацією  $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – відносна зміна лінійних розмірів;  $l_0$  – початкові розміри тіла;  $\Delta V/V = \chi$ , де  $\chi$  – відносна зміна об'єму;

в) коефіцієнтом Пуассона  $\mu = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$ , де  $\varepsilon_{\perp}$  – відносна деформація тіла в напрямку, перпендикулярному до лінії дії сили;  $\varepsilon_{\parallel}$  – відносна деформація тіла в напрямку, паралельному до лінії дії сили. Графічно процес деформації можна зобразити у вигляді діаграми розтягнення  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , яку отримують експериментально (рис. 2.5). На цій діаграмі можна виділити: 1) область пружної деформації – OA; межу пропорційності –  $\sigma_{II}$ ; 2) область пластичної деформації – BF;

3) точку D з максимальними напруженнями; межу міцності –  $\sigma_B$ ; 4) точку C, у якій відбувається руйнування тіла.

Залежно від вигляду кривої  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  матеріали поділяють на крихкі та пластичні. Для крихких тіл  $\sigma_B < \sigma_{II}$ .

Аналітично найлегше описати область OA пружної деформації, для якої правдивий закон Гука  $f = -kx$ , де коефіцієнт жорсткості  $k$  залежить від властиво-

стей матеріалу та його геометричних розмірів. Для виключення цієї залежності закон записують у вигляді  $\sigma = \beta \varepsilon$ , де  $\beta$  – модуль пружності. Оскільки за пружної деформації в кожен момент часу зовнішнє зусилля врівноважує внутрішній опір тіла, то  $\sigma$  є характеристика внутрішніх сил опору.

Закон Гука правдивий для усіх видів деформації у разі малих відхилень атомів від положення рівноваги. Однак неможливо описати всі види деформації одним коефіцієнтом, наприклад модулем пружності. Для кожного основного виду деформації необхідно ввести свій коефіцієнт пропорційності.

Для деформації одноосьового розтягнення-стиснення характерний модуль пружності або модуль Юнга  $E$ :  $\sigma = E\varepsilon$ .

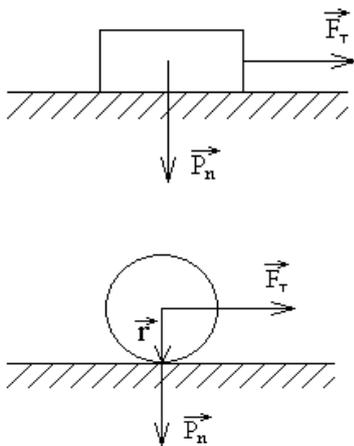
Деформації чистого зсуву притаманний модуль зсуву  $G$ :  $\sigma_\tau = G \cdot \varphi$ , де  $\sigma_\tau$  – дотичне напруження, а  $\varphi$  – кут зсуву.

Деформації всебічного гідростатичного стиснення властивий модуль всебічного стиснення  $k$ :  $P = k\chi$ , де  $P$  – тиск. Оскільки коефіцієнти пропорційності мають єдину фізичну природу, то вони взаємопов'язані:

$$E = 2G(1 + \mu), \quad E = 3k(1 - 2\mu).$$

### 2.1.10 Сили тертя

Виникають у процесі руху одних тіл обоа їх частин по поверхні інших. Ці сили напрямлені тангенціально і можуть виступати як в ролі гальмівних так і в ролі рушійних сил. Приклад: рух колесного транспорту.



Розрізняють *зовнішнє* (або *сухе*) *тертя* і *внутрішнє тертя*. Зовнішнє тертя, яке виникає між взаємонерухомими тілами називається *тертям спокою*. Умовою руху є  $F > F_0$ , де  $F$  – зовнішня сила;  $F_0$  – максимальне значення сили тертя спокою. Зовнішнє тертя, що виникає між рухомими тілами, називається *кінематичним*. У випадках руху тіл розрізняють *тертя ковзання* і *тертя кочення* (рис. 2.6).

У першому наближенні вважають, що ці сили тертя прямо пропорційні силі нормального тиску  $P_n$  на тертьовій поверхні і не залежить від швидкості руху тіл. Тому *сили* виражають так:  $F_T = f^i P_n$  - це за-

**Рис. 2.6.** Тертя ковзання та кочення

*тертя ковзання* кон Амонтон-Кулона, де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання. Це безрозмірна величина, що залежить від роду тіл і стану поверхні.

*Силу тертя кочення* виражають у вигляді:  $F_T = k \cdot \frac{P_n}{r}$  - це закон Кулона, де  $r$  – радіус тіла кочення;  $k$  – коефіцієнт тертя кочення, що має розмірність довжини і залежить від роду тіл.

Дослідження також показують залежність сили сухого тертя від швидкості руху. При малих швидкостях вона майже непомітна, із збільшенням швидкості в деякому інтервалі сила тертя зменшується, а потім зростає. Зменшення

жорсткості поверхонь з метою послаблення сил тертя показало, що при дуже гладких поверхнях тіл сили тертя ковзання не зменшуються, а зростають, тому що проявляється атомно-молекулярні сили зчеплення.

Сили сухого тертя виникають між поверхнями твердих тіл, які контактують між собою. Тертя – це складний комплекс механічних, електромагнітних і хімічних явищ, але кількісно визначити їх у в механізмі тертя на сьогодні можливість відсутня. На силу тертя  $F_{тер}$  впливає склад пар матеріалів, що взаємодіють, чистота обробки поверхонь, наявність мастил, питомий тиск між поверхнями і відносна швидкість переміщення тертьових тіл. Окрім цих суттєвих чинників, на  $F_{тер}$  можуть впливати й малопомітні фактори – наявність або відсутність окисної плівки, вологість, температура тощо. Тому силу тертя визначають приблизно, застосовуючи закон Кулона: сила тертя ковзання пропорційна нормальній силі, що діє між тілами, залежить від виду тертьових поверхонь (матеріалу, обробки і мастила) і не залежить від питомого тиску і відносних швидкостей переміщення тіл:

$$F_{тер} = \mu \cdot N = mg \cdot \sin \alpha . \quad (2.17)$$

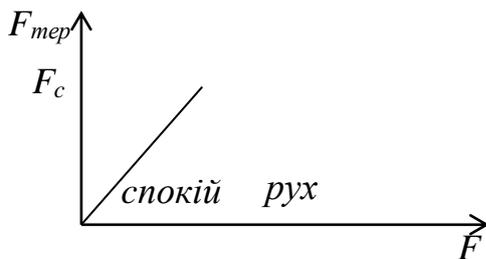


Рис. 2.7. Залежність сили тертя від величини дієвої сили

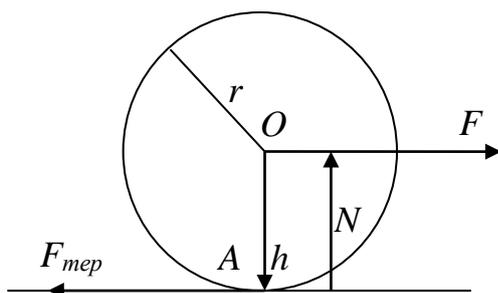
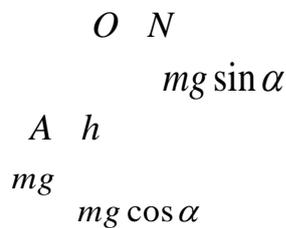
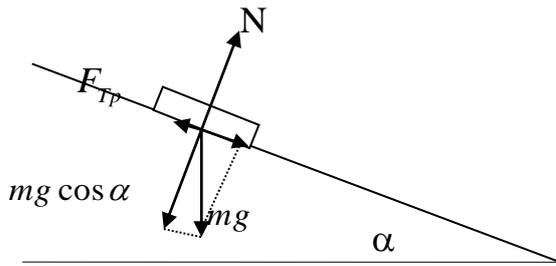


Рис. 2.8. Визначення коефіцієнта тертя кочення

Залежність  $F_{тер}$  від дієвої сили  $F$  визначають графічно (рис. 2.7). Найбільшою силою тертя  $F_{тер}$  є сила тертя спокою  $F_c$ . За сили, діючій на тіло, меншій за силу тертя спокою  $F < F_c$ , сила тертя дорівнює дієвій силі  $F_{тер} = F$ . За сили, більшій за силу тертя спокою  $F > F_c$ , тіло рухається і  $F_{тер} = \mu N \leq F_c$ .

Якщо на вісь циліндра масою  $m$  і радіусом  $r$ , що лежить на горизонтальній площині (рис.2.8), подіяти горизонтальною силою  $F$ , то в точці дотику циліндра і площини  $A$  виникне сила тертя  $F_{тер}$ , що перешкоджатиме коченню циліндра площиною. Якщо величина  $F$  достатньо мала, то циліндр зберігатиме стан спокою. У цьому разі  $F$  і  $F_{тер}$  рівні за модулем, але протилежні за напрямком і складають пару сил  $(F, F_{тер})$ . Утім пару сил  $(F, F_{тер})$  можна

врівноважити тільки другою парою сил, що протидіє коченню циліндра площиною. До неї належить сила тяжіння  $P = mg$  і сила нормальної реакції опори  $N$ , які мають плече  $h$ . Отже, ми бачимо, що за дії горизонтальної сили  $F$  лінія дії нормальної реакції  $N$  не збігається з вертикаллю  $AO$ , якою спрямована сила тяжіння  $P$ . Це зумовлено тим, що циліндр і площина за рахунок їх деформації фактично контактують не за лінією, а за малою площиною з точкою  $A$  (рис.



**Рис. 2.9.** Визначення коефіцієнта тертя кочення за допомогою похилої площини

2.8). У разі дії горизонтальної сили  $F$  дія на одну половину площини відносно лінії, на якій лежить точка А, зростає, а на іншу зменшується. У результаті нормальна реакція опори переміщується відносно вертикалі на відстань  $h$ , утворюючи пару сил  $(P, N)$ . Пара сил  $(P, N)$  протидіє коченню циліндра площиною. Вона має момент тертя кочення  $M_k = hN$  відносно точки А. У разі збільшення сили  $F$  циліндр перебуватиме у стані спокою, поки  $M_k$  не досягне граничного значення  $M_{k \max} = \mu_k N$ , де  $\mu_k$  – коефіцієнт тертя кочення. Оскільки  $M_k \leq M_{k \max}$ , то  $h \leq \mu_k$ . Отже, коефіцієнт тертя кочення  $\mu_k$  визначаємо максимальним зміщенням лінії дії нормальної реакції опори  $N$  відносно вертикалі АО, яку іноді називають «плечем» сили тертя кочення циліндра.

Коефіцієнти тертя спокою  $\mu_c$ , ковзання  $\mu$  і кочення  $\mu_k$  можна визначити, скориставшись похилою площиною (рис. 2.8 – 2.9). Силу тертя, що діє на тіло масою  $m$ , яке перебуває в стані спокою з боку похилої площини, врівноважуватиме складова сили ваги  $mg \sin \alpha = F_{\text{тер}}$ , що діє вздовж похилої площини (рис. 2.9). Водночас згідно з (2.17)  $F_{\text{тер}} = \mu \cdot N = \mu_c mg \cos \alpha$ . Отже,  $\mu_c mg \cos \alpha = mg \sin \alpha \rightarrow \mu_c = \tan \alpha$  (2.18)

Якщо кут  $\alpha$  збільшити, то тіло з масою  $m$  рухатиметься. За такої умови

$$mg \sin \alpha \geq \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu \leq \tan \alpha .$$

Якщо виконати її, то за  $\alpha = \text{const}$  прискорення руху тіла залежатиме тільки від коефіцієнта тертя тіла до площини. Згідно з другим законом Ньютона  $ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$ ,

$$\text{де } a = \frac{2S}{t^2} .$$

$$\text{Отже, } \frac{2S}{t^2} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \Rightarrow \mu = \tan \alpha - \frac{2S}{gt^2 \cos \alpha} . \quad (2.19)$$

У рівнянні (2.19) якість поверхні, якою рухається тіло, умовно постійна. Насправді це не так, тому в дослідях ми отримуємо деяку середню величину  $\mu$ , яка є достатньо постійна.

Під час кочення циліндра похилою площиною (рис. 2.10) обертальний момент сили циліндра, що рухає його, дорівнює

$$M_{\text{оберт}} = M - M_k,$$

де  $M = rmg \sin \alpha$ ;  $M_k = \mu_k mg \cos \alpha$ .

Згідно з основним законом обертового руху  $M_{\text{оберт}} = I_A \varepsilon$ .

Отже,

$$I_A \varepsilon = rmg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha, \quad (2.20)$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення  $\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2S}{rt^2}$ ;  $S$  – шлях, який проходить вісь циліндра за час  $t$ ;  $r$  – радіус циліндра;  $\mu_k$  – коефіцієнт тертя кочення.

Згідно з теоремою Штейнера момент інерції відносно точки А (рис. 2.10) циліндра визначаємо так:

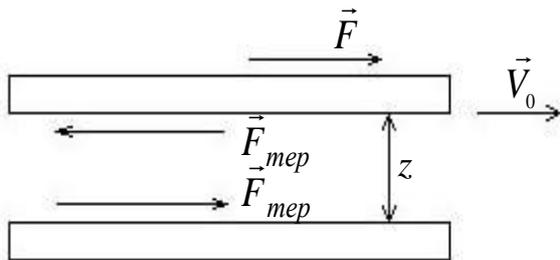
$$I_A = I_0 + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2.$$

Підставивши значення  $\varepsilon$  і  $I_A$  в (2.10), отримаємо вираз

$$\frac{3}{2}mr^2 \frac{2S}{rt^2} = rmg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha \Rightarrow \mu_k = rtg \alpha - \frac{3Sr}{gt^2 \cos \alpha}. \quad (2.21)$$

### 2.1.11 Сили опору. В'язкість

Властивість рідини (газу) ускладнювати переміщення її шарів один відно-



**Рис. 2.11. Визначення коефіцієнта в'язкості речовини за методом Ньютона**

сно іншого називають в'язкістю. Якщо у рідину помістити дві паралельні пластинки і прикласти до верхньої постійну силу  $F$ , то вона рухатиметься з постійною швидкістю  $V_0$ . Оскільки пластинка не набуває прискорення, то дію сили  $F$  урівноважує інша сила, рівна за величиною та протилежною за напрямком. Її називають силою внутрішнього тертя, або в'язкістю  $F_{\text{тер}}$  (рис. 2.11). Такі сили діють між будь-якими шарами рідини або газу, якщо вони рухаються один відносно іншого.

При цьому з боку більш швидкого шару на повільніший діє прискорювальна сила, а з боку повільного на швидкий – сповільнювальна. Як довів І. Ньютон, ця сила пропорційна градієнту швидкості  $dV/dz$  та площі контакту суміжних шарів  $S$ .

$$F = \eta S \frac{dV}{dz}, \quad (2.22)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя або в'язкість рідини (газу).

В'язкість рідин зумовлена рухливістю окремих молекул або атомів, на відміну від газів, для яких внутрішнє тертя є результат перенесення імпульсу хаотичним рухом молекул. Чим вища температура, тим менша в'язкість рідини, що цілком природно, оскільки при цьому полегшується взаємне переміщення молекул. Для різних рідин коефіцієнт в'язкості з підвищенням температури змінюється по-різному. Для малов'язких рідин його зменшення невагоме, а для більш в'язких – досить значне. Наприклад, у разі зміни температури на величину  $\Delta t = 10^\circ \text{C}$  (від  $20$  до  $30^\circ \text{C}$ ) коефіцієнт в'язкості води зменшиться на  $20\%$ , а гліцерину – у  $2,4$  рази. Для опису температурної залежності коефіцієнта  $\eta$  рідин часто застосовують формулу Френкеля:

$$\eta = A \exp\left(\frac{\Delta W}{kT}\right), \quad (2.23)$$

де  $A$  – сталий коефіцієнт;  $\Delta W$  – енергія активації (енергія, потрібна для подолання міжмолекулярних зв'язків).

### 2.1.12 Закони Кеплера. Закон всесвітнього тяжіння.

Ми розглянули сили пружних деформацій і сили тертя. Тепер розглянемо сили тяжіння або гравітаційні сили. Вчення про сили тяжіння формувалося у тісному зв'язку з пізнанням будови навколишнього світу сонячної системи, з революційної боротьби з геоцентричним вченням Птолемея (2ст. До н.е.) таких як Коперник; Галілей; Тіхо Браге (1546-1601). Коперник у 1543р опублікував свій твір “Про обертання небесних тіл”. У ньому розвивалося вчення про Сонячну систему, однак Коперник помилково вважав, що планети обертаються навколо Сонця по колових орбітах. У 1609р Галілей побудував телескоп і це прискорило вивчення законів руху планет сонячної системи. Точні спостереження за рухом планет, які провів Тіхо Браге дозволили Іоганну Копернику (1571-1630) встановити основні закони планет. Вони формулюються так:

Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце; Радіус – вектор планети за однакові проміжки часу описує однакові площі; Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби

великих півосей їх елементарних орбіт:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ .

Закон Кеплера відображають основні питання кінематики Сонячної системи. Природу сил, що зумовлюють відомі рухи планет, з'ясовує закон всесвітнього тяжіння. Його встановив Ньютон, проаналізувавши закон Кеплера.

Припустивши, що планети рухаються по колових орбітах, то на планети повинні діяти доцентрові сили. Для будь-яких двох планет можна записати так:

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}, \quad (2.24)$$

$$F_2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}. \quad (2.25)$$

Якщо в відношення цих сил підставимо замість квадратів періодів пропорційні їм за третім законом Кеплера куби півосей:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$  то дістанемо

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1}{T_1^2} \cdot \frac{T_2^2}{m_2 r_2} = \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{m_2} \quad (2.26)$$

З цього відношення можна записати загальний вираз доцентрової сили, з якою Сонце діє на планету:  $F_{12} = k \frac{m}{r^2}$  де  $k$  – це стала, що не залежить від маси планети. За третім законом механіки планета з такою самою з величиною силою повинна діяти на Сонце. Якщо два матеріальних тіла (Сонце-планета) взаємодіють, то природа діючої і протидіючої сили очевидно, та сама. Отже вираз сили дії планети на Сонце буде аналогічний:  $F_{12} = k' \frac{M}{r^2}$  де  $M$  – маса Сонця;  $k'$  – це стала, що не залежить від маси Сонця. З цих рівнянь видно, що сила взаємодії між планетою: Сонцем зобов'язана бути пропорційною масі одного й іншого тіла. Ньютон встановив, що сила взаємодії має такий вигляд:

$$F_{12} = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \quad (2.27)$$

де  $\gamma$  – стала, яка не залежить від маси взаємодіючих тіл, яку називають гравітаційною сталою:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ . Це було встановлено із дослідів.

### 2.1.13 Неінерціальні системи відліку і сили інерції. Коріолісова сила.

Як ми вже говорили закони механіки Ньютона справджуються тільки в інерціальних системах. В неінерціальних системах спостерігаються відхилення від законів Ньютона. Тому були введені сили інерції, щоб ліквідувати ці відхилення.

Сили інерції не можна ставити в один ряд із силами тяжіння, пружності, тертя, які є результатом взаємодії двох тіл. Сили інерції – це не результат дії іншого тіла, це є властивість систем відліку. Для  $F_{in}$  не існує протидіючої сили, тому їх інші називають фіктивними.

Так 2 закон механіки в неінерціальній системі відліку має вигляд:  

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{in}$$

Де  $a$  – прискорення тіла в неінерціальній системі;  $F$  – рівнодіюча зовнішніх сил;  $F_{in}$  – сила інерції. Наприклад: на візку, що перебуває в прискореному русі, кругле коліно весь час скочується в бік, протилежний руху візка. З точки зору людини, що сидить на візку коліно рухається з прискоренням без дії зовнішньої сили.

1. Розглянемо випадок, коли система перебуває в поступальному русі з прискоренням  $a_o$  відносно інерціальної системи відліку. Тоді -  $a_o$  буде прискоренням тіла в неінерціальній системі відліку. Отже сила інерції матиме такий вигляд:

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_o \quad (2.28)$$

2. Коли система перебуває в обертальному русі, то різні точки неінерціальної системи матимуть різне прискорення і сила інерції буде залежати від положення тіла в обертальній системі руху. Розглянемо два приклади:

а) нехай на диску, що обертається з кутовою швидкістю одночасно обертається надіта на спицю і прикріплена до осі пружиною кулька (рис.2.12а).

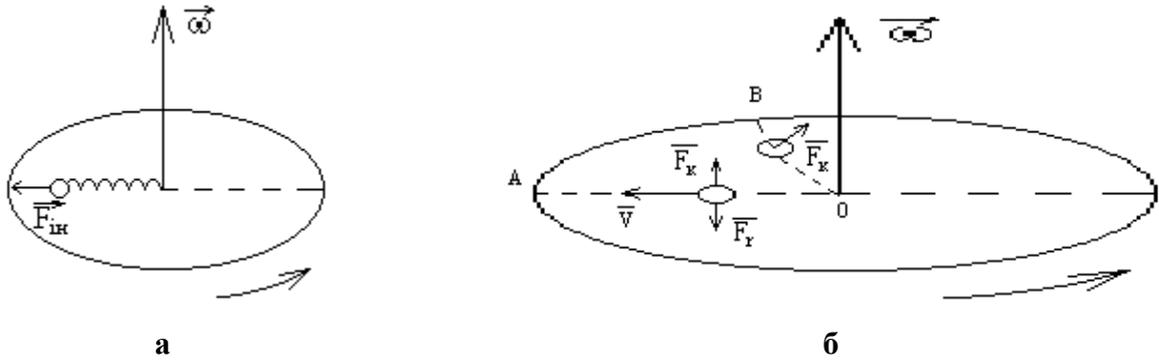


Рис. 2.12. Неінерціальні системи відліку, що обертаються

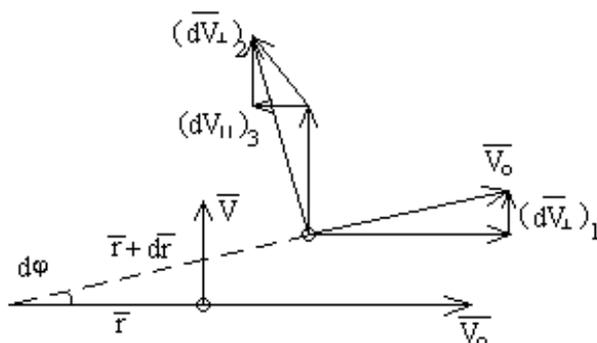
Тоді в інерціальній системі кулька перебуває в обертальному русі під дією доцентрової сили  $F = m\omega^2 r$ , якою є сила пружності розтягнутої пружини. Отже з точки зору спостерігача в неінерціальній системі кулька перебуває в стані спокою. Однак на кульку діє сила пружності розтягнутої пружини. Тому щоб виконувався 1 закон Ньютона необхідно ввести інерціальну силу, яка зрівноважить силу пружності. Тут сила інерції напрямлена по радіусу від центра і її називають відцентровою силою інерції, тобто

$$F_{in} = m\omega^2 r. \quad (2.29)$$

Відцентрова сила інерції в неінерціальній системі діє на тіло незалежно, чи тіло перебуває в стані, чи в стані відносного руху.

б) припустимо, що кульці, яка знаходиться на диску надали швидкість  $V$ , в радіальному напрямі ОА (рис.2.12б). Доки диск залишатиметься в стані спокою, кулька рухатиметься прямолінійно по АО. Якщо ж диск привести в обертання, то кулька рухатиметься криволінійно по АВ. Тобто спостерігач в обертальній системі констатуватиме, що на кульку діє сила, перпендикулярна до осі швидкості  $F_k$ , де  $F_k$  – це сила інерції. Щоб утримати кульку на обертальному диску в русі по радіальній прямій АО, треба б було поставити вдовж радіуса напрямну стінку. Тоді сила  $F_k$ , її ще називають силою Коріоліса буде створювати на цю стінку тиск і зрівноважитиметься реакцією стінки  $F_r$ . Визначимо спочатку прискорення, яке було створено  $F_k$ .

Нехай тіло з швидкістю  $V_o$  переміщується вздовж радіуса на диску жор-



тко з ним пов'язане; диск рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Нехай у момент часу  $t$  тіло знаходиться на відстані  $r$  від осі обертання (рис.2.13).

Рис. 2.13. Переміщення у неінерціальній системі відліку, що обертається

Його швидкість відносно нерухомої системи відліку має дві складові – радіальну  $V_o$  і тангенціальну  $V = \omega r$ . За час  $dt$  диск повернеться на кут  $d\phi = \omega dt$ , а тіло в радіальному напрямі  $dr = V_o dt$ .

При цьому обидві складові швидкості зазнають змін: радіальна  $V_o$  – за напрямом; тангенціальна – за напрямом і за величиною. У загальній зміні швидкості тіла за час  $dt$  можна виділити три прирости:

- 1) приріст, зумовлений поворотом  $V_o$ :  $(dV_{\perp})_1 = V_o \cdot d\phi = V_o \omega \cdot dt$ ;
- 2) приріст тангенціальної складової швидкості, зумовлений переходом тіла на відстань  $(r+dr)$ :  $(dV_{\perp})_2 = \omega \cdot (r + dr) - \omega r = \omega dr = \omega V_o dt$ ;
- 3) приріст тангенціальної складової зумовлений, поворотом вектору  $V$ :  $(dV_{\parallel})_3 = V \cdot d\phi = \omega \cdot r \cdot \omega \cdot dt = \omega^2 r dt$ .

Знаючи прирости складових швидкості тіла за час  $dt$ , можна знайти відповідні компоненти прискорення. Тангенціальна складова дорівнює

$$a_{\perp} = \frac{(dV_{\perp})_1 + (dV_{\perp})_2}{dt} = \frac{2\omega \cdot V_o dt}{dt} = 2\omega \cdot V_o. \quad (2.30)$$

Це прискорення перпендикулярно до швидкості тіла на диску  $V_o$ , і його можна записати у вигляді векторного добутку

$$\vec{a}_{\perp} = 2 \left[ \vec{\omega} \cdot \vec{V}_o \right]. \quad (2.31)$$

Такий напрям має тангенціальна складова з погляду спостерігача в інерціальній системі. У неінерціальній системі відліку ця складова прискорення тіла буде  $\vec{a}_k = -2 \left[ \vec{\omega} \cdot \vec{V}_o \right]$  або, за правилом векторного добутку,  $\vec{a}_k = 2 \left[ \vec{\omega} \cdot \vec{V}_o \right]$ ,  $a_k$  називають коріолісовим прискоренням і це прискорення завжди перпендикулярно до будь-якої швидкості тіла в системі, яка обертається.

Радіальна складова прискорення дорівнює  $a_{\parallel} = \frac{(dV_{\parallel})_3}{dt} = \omega^2 r$ . Ця складова не залежить від швидкості на диску. Добуток її на  $m$  дає вже відому нам відцентрову силу інерції, а добуток  $a_k$  на  $m$  – силу Коріоліса. Унаслідок дії коріолісової сили, зумовленої добовим обертанням Землі в ріках, що течуть у північній півкулі Землі, більше підмивається правий берег. Цю закономірність вперше підмітив петербурзький академік Карл Бер.

### 2.1.14 Робота, потужність, енергія. Закон збереження енергії

Енергія – це міра руху в явищах перетворення однієї форми руху в іншу. Відповідно до різних форм руху розрізняють механіку, внутрішню й електричну енергію. Робота як фізична величина визначає кількість перетвореної енергії

з одного виду в інший:  $A = -\Delta E$ . Роботою сили  $\vec{F}$ , яка діє на матеріальну точку, називають фізичну величину, що дорівнює скалярному добутку вектора дієвої сили на вектор переміщення, тобто  $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r})$ . Робота – це скалярна величина, і залежно від кута між напрямками дієвої сили і переміщення вона може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю. Вимірюють роботу в 1Дж = 1Н·1м = 1кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Роботу сил тяжіння визначають за рівнянням  $\Delta A = mg \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha = mg \Delta h$  (перехід від  $dr$  до  $\Delta S$  зумовлений тим, що  $\int_{r_2}^{r_1} dr = S$ ).

Потужність чисельно дорівнює роботі, яку машина може виконати за одиницю часу, тобто  $N = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{V}) = F \cdot V \cdot \cos(\vec{F} \wedge \vec{V})$ . Вимірюють потужність у 1Вт = 1Дж/с.

У механіці розрізняють два види енергії: кінетичну, що залежить від швидкості тіла, і потенціальну, що залежить від взаємного положення тіл. Кінетичну енергію визначають за формулою  $T = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ .

Потенціальна енергія залежить від виду діючих сил, тому її визначають за різними формулами. Так, потенціальна енергія сил тяжіння дорівнює  $\Pi = -\gamma \frac{mM}{r}$ , де  $m, M$  – маси тіла і Землі;  $r$  – відстань тіла від центра Землі. Розглянемо доведення цього твердження:

$$dA = \gamma \frac{mM}{r^2} dr \rightarrow A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r} dr = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = \Pi_2 - \Pi_1 \quad (\text{бо } A = \Delta E),$$

$$\text{тобто } \Pi = -\gamma \frac{mM}{r} = -\gamma \frac{mM}{r+h} = -\frac{\frac{1}{R} \cdot \gamma \cdot mM}{1 + \frac{h}{R}} = -\frac{1}{R} \gamma \cdot mM \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2\right]},$$

де  $R$  – радіус Землі;  $h$  – висота підйому над поверхнею Землі ( $h \ll R$ ). Отже

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R} + \gamma \frac{mM}{R^2} \cdot h = \left(\text{бо } \gamma \frac{M}{r} = g\right) = -\gamma \frac{mM}{r} + mgh.$$

Для сил деформації  $\vec{F}_A = -k\vec{x} \rightarrow dA = F_A \cdot dx$ , якщо перейти до модуля  $F = kx \cdot dx$ .  $A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$ , тому  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$ , оскільки  $A = \Pi_2 - \Pi_1$ .

Закон збереження енергії стверджує, що за будь-яких змін ізольованої системи її повна енергія залишається сталою:  $\frac{mV_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{mV_2^2}{2} + \Pi_2$ .

### 2.1.15 Рух системи матеріальних точок. Закон руху центра мас

Розглянемо абсолютне тверде тіло, тобто таке, яке під дією прикладених сил зовсім не деформується. Тверде тіло розглянемо як систему матеріальних точок. Поступовий рух такого тіла можна звести до так званого *центра маси* або центра інерції. *Центром маси (ЦМ) системи матеріальних точок називають таку точку, у якій зібралось б уся маса системи, якби всі точки взаємодіяли з нескінченно зростаючими силами притягання.* У прямокутній системі координат ЦМ розраховують за формулами

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (2.32)$$

Розглянемо систему матеріальних точок, на які зовнішні сили не діють. Закон збереження імпульсу для такої системи має вигляд  $m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n = M \vec{V}$  (із визначення ЦМ), де  $M$  – маси всієї системи,  $V$  – швидкість руху її ЦМ. Якщо тіло абсолютно тверде, то швидкість руху ЦМ дозволяє оцінити імпульс системи при поступальному й обертальному русі. Якщо на систему матеріальних точок *діють зовнішні сили*, то застосуємо до

кожної точки другий закон механіки, отримаємо рівняння  $\frac{d(m_1 \vec{V}_1)}{dt} = \vec{f}_1 + \vec{F}_1$ ,

$\frac{d(m_2 \vec{V}_2)}{dt} = \vec{f}_2 + \vec{F}_2$  ....  $\frac{d(m_n \vec{V}_n)}{dt} = \vec{f}_n + \vec{F}_n$ , де  $f$  – внутрішня сила взаємодії,  $F_i$  –

зовнішня сила, прикладена до матеріальної точки. Узявши суму лівих і правих частин і врахувавши, що сума внутрішніх сил взаємодій дорівнює нулю, знай-

демо  $\frac{d}{dt}(\sum m_i \vec{V}_i) = \sum \vec{F}_i$ , але для системи точок  $\sum m_i \vec{V}_i = M \vec{V}$ , тобто

$$\frac{d}{dt}(M \vec{V}) = \sum \vec{F}_i. \quad (2.33)$$

Це рівняння є виду другого закону механіки для системи матеріальних точок і *називається законом руху центра мас.*

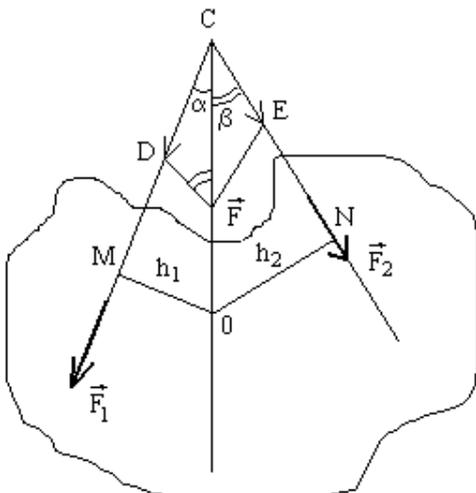


Рис. 2.14. Умова рівноваги тіла з нерухомою віссю обертання

### 2.1.16 Поступальний і обертальний рух твердого тіла. Момент сили

Поступальним рухом твердого тіла називають такий рух, коли пряма, зв'язана з будь-якими двома точками тіла переміщується паралельно собі (наприклад, рух навколо стола з паралельно простягнутими в сторони руками), тобто усі частинки рухаються паралельно руху ЦМ. Будь-який складний рух тіла можна розкласти на поступальний рух разом з центром маси і на оберта-

льний рух навколо ЦМ. В обертальному русі всі частинки перемішуються по колах, центри яких лежать на нерухомій прямій, що називається віссю.

З'ясуємо умови рівноваги твердого тіла, що має нерухому вісь обертання. Якщо на тіло діють дві сили  $F_1$  і  $F_2$  у площині рисунка, а вісь обертання перпендикулярна площині рисунка у точці  $O$ , то очевидно, що тіло буде в рівновазі, коли результуюча цих сил  $F$  проходить через вісь обертання. У такому разі вона створюватиме лише боковий тиск на вісь (рис. 2.14). Із теореми синусів для трикутника DCF  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ ,  $\left( \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin D} = \frac{c}{\sin C} = 2l \right)$ .

З прямокутних трикутників CMO і CNO знаходимо  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{h_2}{h_1}$ , де  $h_1$  і  $h_2$  - відстані діючих сил від осі обертання. Тоді  $F_1 h_1 = F_2 h_2$ . Це умова рівноваги. Добуток  $Fh = M$  називають *моментом сили* (вимірюють у Н·м),  $h$  - плече сили.

Момент сили - це аксіальний вектор, який виражається векторним добутком  $\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$ , де  $\vec{r}$  - радіус-вектор точки прикладання сили відносно точки  $O$  - осі обертання. Якщо вважати додатними ті моменти сил, що діють за годинниковою стрілкою, а від'ємними ті, які діють проти годинникової стрілки, то тіло буде в рівновазі, коли алгебраїчна сума моментів сил відносно осі обертання дорівнюватиме нулю:  $\sum M_i = 0$ .

### 2.1.17 Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції

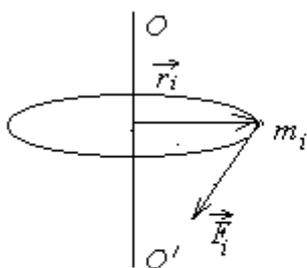


Рис. 2.15. Обертання матеріальної точки

Розглянемо тверде тіло з нерухомою віссю обертання, яке під дією результуючого моменту сил знаходиться в обертальному русі з певним кутовим прискоренням. Далі розглянемо матеріальну точку тіла з масою  $m_i$ , що лежить на відстані  $r_i$  від осі обертання і перебуває під дією тангенціальної сили  $F_i$ . Запишемо другий закон Ньютона для цієї точки:  $F_i = m_i a_i$ . Уведемо замість тангенціального прискорення кутове, яке однакове для всіх точок тіла. Тоді рівняння матиме вигляд  $F_i = m_i \beta r_i$  або  $F_i r_i = M_i = m_i r_i^2 \beta$ , де  $M_i$  - момент сили  $F_i$  відносно осі обертання  $OO'$  (рис.2.15). Записавши такі залежності для всіх матеріальних точок тіла і взявши їх суму дістанемо  $\sum m_i r_i^2 \beta = \sum M_i$  або  $M = \beta \cdot \sum m_i r_i^2$ . Цей вираз і є *основним рівнянням динаміки обертального руху* твердого тіла. Він аналогічний рівнянню динаміки поступального руху  $F = ma$ , тільки для обертального руху  $F$  замінюється *моментом сили*, *лінійне прискорення* - *кутовим*, а *маса* як міра інертності - *величиною*  $\sum m_i r_i^2$ . Останню величину називають *моментом інерції тіла* відносно осі обертання і позначають як  $I = \sum m_i r_i^2$ . Момент інерції

є мірою інертності тіла в обертальному русі. Це скалярна величина, і в системі СІ  $I$  виражають у  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ . Остаточні основні рівняння обертального руху записують у такому вигляді:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\beta}. \quad (2.34)$$

### 2.1.18 Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Запишемо  $\vec{M} = I\vec{\beta} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ . Оскільки для твердого тіла з нерухомою віссю обертання  $I$  є стала величина, то можна записати

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}. \quad (2.35)$$

Для довільної точки справедливо

$$I_i\omega = m_i r_i^2 \omega = m_i r_i v_i = m_i v_i r_i,$$

де  $m_i v_i$  — імпульс точки,  $r_i$  — відстань точки від осі обертання. Векторний добуток радіус-вектора на імпульс називають *моментом імпульсу точки*. Сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок тіла дорівнює моменту імпульсу всього тіла, тобто

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = I\vec{\omega}. \quad (2.36)$$

Момент імпульсу — це вектор однакового напрямку з вектором кутової швидкості. Із рівності (2.36) випливає, що *зміна  $L$  при обертанні пропорційна результуючому моменту діючих сил і відбувається в напрямі даного моменту*. Вираз (2.36) цілком аналогічний виразу другого закону механіки, тільки замість  $F$  фігурує  $M$ , а замість  $\Delta(mv)$  —  $\Delta L$ . Тому момент імпульсу є мірою обертального руху тіл в явищах передавання руху внаслідок взаємодії тіл.

При  $\vec{M} = 0$ ;  $\Delta(I\vec{\omega}) = 0$ , тобто  $I\vec{\omega} = \text{const}$ . Це означає, коли не діють зовнішні сили (або коли результуючий момент їх дорівнює нулю) момент імпульсу системи залишається незмінним як за *величиною*, так і за *напрямком*. Це і є *закон збереження моменту імпульсу*.

### 2.1.19 Кінетична енергія обертального руху тіла

Різні точки твердого тіла, що перебувають в обертальному русі, мають різну лінійну швидкість. Тому кінетичну енергію обертального руху тіла знаходитиме як  $\sum T_i$  матеріальних точок тіла:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (\omega \cdot r_i)^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} \rightarrow T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.37)$$

Вираз кінетичної енергії поступального руху аналогічний виразу для обертального руху, тільки замість  $m$  маємо  $I$ , а замість лінійної швидкості  $v$  маємо кутову швидкість  $\omega$ .

Якщо тіло перебуває одночасно в обертальному і прямолінійному русі, то

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.38)$$

Підсумовуючи закономірності розглянутих рухів, можна записати такі відповідності між величинами, що описують поступальний та обертальний рухи

лінійна швидкість $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	кутова швидкість $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
лінійне прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	кутове прискорення $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
маса $m$	момент інерції $I = \sum m_i r_i^2$
імпульс $m\vec{v}$	момент імпульсу $\vec{L} = I\vec{\omega}$
сила $\vec{F}$	момент сили $\vec{M}$
основне рівняння динаміки $\vec{F} = m\vec{a}$ або $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$	основне рівняння динаміки обертального руху $\vec{M} = I\vec{\beta}$ або $\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$
кінетична енергія поступального руху $T = \frac{mv^2}{2}$	кінетична енергія обертального руху $T = \frac{I\omega^2}{2}$
робота $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$	робота $dA = (\vec{M} \cdot d\vec{\phi})$
потужність $N = (\vec{F} \cdot \vec{v})$	потужність $N = (\vec{M} \cdot \vec{\omega})$ .

### 2.1.20 Теорема Штейнера. Вільні осі обертання

За теоремою Штейнера, знаючи момент інерції відносно осі, що проходить через центр його маси, можна знайти момент інерції тіла відносно всякої іншої осі, *паралельної першій*. За теоремою момент інерції відносно будь якої осі обертання дорівнює моменту інерції відносно паралельної їй осі, що проходить через центр маси, доданий до добутку маси тіла на квадрат відстані центра мас від осі обертання, тобто  $I = I_c + md^2$ .

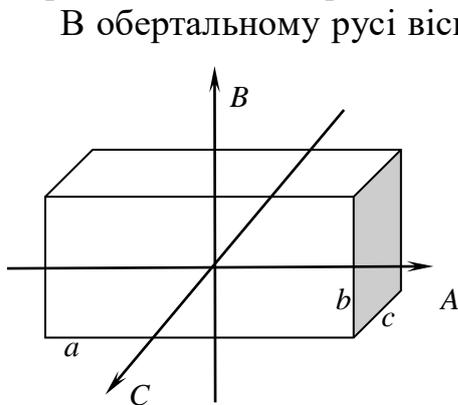


Рис. 2.16. Вільні осі обертання паралелепіпеда

В обертальному русі вісь, відносно якої всі доцентрові сили, що діють на окремі частини тіла взаємно зрівноважуються, називається *вільною віссю обертання*. Для прямокутного паралелепіпеда, який знаходиться в полі сил тяжіння, це будуть осі А, В, С (рис. 2.16), які проходять через центр мас паралельно сторонам (сторона  $a > b > c$ ). Момент інерції відносно осі С, яка паралельна стороні  $c$ , буде максимальним, відносно осі А – мінімальним. Теорія і досліди показують, що стійким буде обертання тіла лише навколо тих вільних осей, відносно яких момент інерції тіла найбільший або найменший.

### 2.1.21 Момент інерції твердого тіла. Маятники Максвелла й Обербека

Плоский рух твердого тіла – це рух, за якого всі точки твердого тіла переміщуються в паралельних площинах. Загалом плоский рух можна уявити як результат накладання обертального руху відносно будь-якої осі на поступальний рух тіла в напрямі, перпендикулярному до цієї осі обертання.

Рух твердого тіла опишемо рівняннями

$$m\vec{a}_C = \vec{F}, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_C = \vec{M}_C, \quad (2.40)$$

де  $m, \vec{a}_C, \vec{L}_C$  – маса, прискорення центра мас, момент імпульсу твердого тіла відповідно;  $\vec{F}$  – сума всіх сил, що діють на тіло;  $\vec{M}_C$  – сума моментів сил відносно центра мас.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої або головної осі інерції і момент сил  $\vec{M}_C$  має напрямок уздовж цієї осі, то рівняння (2.40) матиме вигляд

$$I\varepsilon_Z = M_Z, \quad (2.41)$$

де  $\varepsilon_Z, \vec{M}_Z$  – кутове прискорення тіла і сумарний момент сил відносно осі обертання  $Z$  відповідно;  $I$  – момент інерції тіла відносно осі обертання  $Z$ .

Кінетична енергія тіла за плоского руху поєднує в собі кінетичну енергію поступального руху зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас  $V_C$ , та кінетичну енергію обертання з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно осі обертання, яка проходить через центр мас тіла:

$$E_K = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \quad (2.42)$$

Маятник Максвелла являє собою диск, міцно закріплений на осі. Вісь двома нитками підвішено до верхнього кронштейна (біфілярний підвіс). Вісь і диск мають циліндричну форму. До приладу додано набір знімних кілець, які одягають на диск. Зовнішній і внутрішній діаметри кілець однакові, на відміну їх мас. Маятник обертають навколо осі симетрії, рівномірно намотуючи на його вісь нитки біфілярного підвісу. Під час звільнення маятника диск опускається до кінця і, продовжуючи обертатися за інерцією, накручує нитки підвісу на вісь і піднімається.

Рівняння (2.39) та (2.41), які описують плоский рух твердого тіла, для маятника Максвелла мають вигляд

$$\begin{aligned} ma_C &= mg - 2F_H, \\ I\varepsilon &= 2F_H R_0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

де  $m$  – сумарна маса осі, диска та знімного кільця;  $a_C$  – прискорення центра мас маятника;  $I$  – сумарний момент інерції диска та знімного кільця відносно осі симетрії маятника;  $F_H$  – сила натягу кожної нитки біфілярного підвісу;  $R_0$  – радіус осі маятника.

Рівняння (2.43) необхідно доповнити рівнянням, що пов'язує кутове прискорення  $\varepsilon$  маятника відносно осі симетрії з прискоренням центра мас:

$$a_C = \varepsilon \cdot R_0. \quad (2.44)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.43) та (2.44), знайдемо невідомі величини  $I, \varepsilon, F_H$  як функції прискорення  $a_C$ . Це прискорення можна визначити експериментально за допомогою приладу і записати як

$$a_C = \frac{2h}{t^2}, \quad (2.45)$$

де  $t$  – час опускання осі маятника;  $h$  – відстань, яку проходить маятник.

Вираз для експериментального визначення сумарного моменту інерції маятника матиме вигляд

$$I_l = mR_0^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (2.46)$$

де  $R_0$  – радіус осі маятника;  $m = m_0 + m_\delta + m_K$  – сумарна маса маятника, до якої входить маса його осі  $m_0$ , маса диска  $m_\delta$  та маса знімного кільця  $m_K$ .

Теоретичне значення моменту інерції маятника визначимо за формулою

$$I_T = I_0 + I_\delta + I_K, \quad (2.47)$$

$$\text{де } I_0 = \frac{m_0 R_0^2}{2}, \quad I_\delta = \frac{m_\delta (R_0^2 + R_\delta^2)}{2}, \quad I_K = \frac{m_K (R_\delta^2 + R_K^2)}{2} \text{ – моменти інерції осі, диска та знімного кільця відповідно; } R_0, R_\delta \text{ – радіуси осі та диска; } R_K$$

– зовнішній радіус знімного кільця.

Виражаючи швидкість центра мас маятника  $V_C$  та його кутову швидкість обертання  $\omega$  у кінці шляху  $h$ , пройденого за час  $t$ , через прискорення центра мас маятника ( $a_C$ ), вираз для кінетичної енергії плоского руху маятника (2.42) запишемо у вигляді

$$E_K = \frac{2h^2}{t^2} \left( m + \frac{I_l}{R_0^2} \right). \quad (2.48)$$

Потенціальна енергія маятника у крайньому верхньому положенні становитиме

$$E_n = mgh. \quad (2.49)$$

Потенціальна енергія маятника у крайньому нижньому положенні дорівнює нулю. Згідно із законом збереження повної механічної енергії має виконуватися рівність  $E_K = E_n$ .

Основний закон обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання визначають за рівнянням

$$M_z = I\varepsilon_z, \quad (2.50)$$

де  $M_z$  – сумарний момент всіх зовнішніх сил відносно осі обертання  $z$ .

$$M_z = \sum F_z r_z \quad [\text{Н}\cdot\text{м}], \quad (2.51)$$

де  $F_z$  – сила, яка діє в площині, перпендикулярній осі  $Z$ ;  $r_z$  – плече (мінімальна відстань між віссю  $Z$  і напрямком дії сили  $F_x$ ).

Момент інерції тіла  $I$  визначає ступінь інертності тіла за обертального руху й дорівнює

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad [\text{кг}\cdot\text{м}^2], \quad (2.52)$$

де  $m_i$  і  $r_i$  – маса та відстань від осі обертання  $Z$  точки твердого тіла за номером  $i$  відповідно. Для матеріальної точки  $I = mr^2$ .

Кутове прискорення тіла  $\varepsilon_z$  обчислюємо за формулою

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \quad [c^{-2}]. \quad (2.53)$$

Рівняння (2.53) описує динамічний закон обертального руху. У разі дії на тіло моменту сили  $M_z$  воно починає рухатися з кутовим прискоренням  $\varepsilon_z$ . Його величина залежить від інерційності тіла, яку за обертального руху визначають моментом інерції. Якщо  $M_z = 0$ , то  $\varepsilon_z = 0$ , отже,  $\omega = const$ . Тіло рухається з постійною швидкістю або перебуває у стані спокою. Отже, ми сформулювали перший закон І. Ньютона для обертального руху.

Перевірку основного закону обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання можна провести у такий спосіб. У разі фіксованого моменту інерції

$$M = const; I\varepsilon = const \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.54)$$

Збільшення моменту інерції приводить до пропорційного зменшення кутового прискорення тіла за незмінного моменту сили.

Якщо зафіксувати момент інерції, то

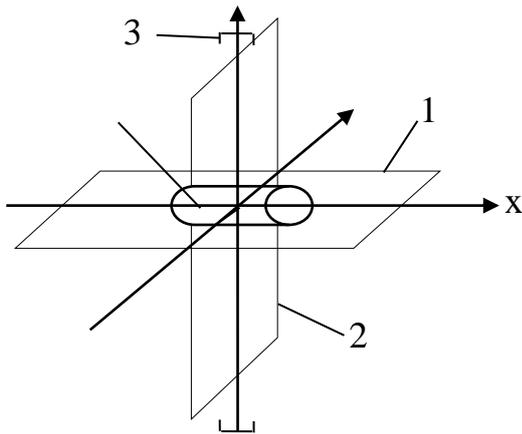
$$I = const; \frac{M}{\varepsilon} = const \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.55)$$

Збільшення моменту сили приводить до пропорційного збільшення кутового прискорення тіла за постійного моменту інерції. Усі зазначені залежності, а в остаточному підсумку і основний закон обертального руху, перевіряють за допомогою маятника Обербека.

### 2.1.22 Теорія гіроскопічних явищ. Гіроскопічний ефект і його застосування

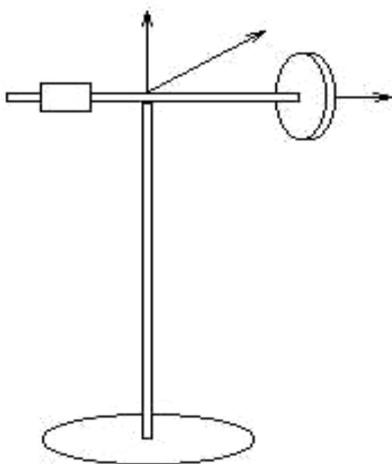
Гіроскоп являє собою масивне симетричне тверде тіло, яке швидко обертається навколо вільної осі симетрії. Кутова швидкість гіроскопа досягає 20000-30000 об/хв. Зазвичай гіроскоп підвішують так, щоб закріпити одну з точок його осі. Існують різні способи закріплення гіроскопа в одній точці. У вільноврівноваженому гіроскопі вісь обертання, яка проходить через нерухомо закріплений центр мас, може мати будь-який напрямок (рис. 2.17).

Одним із різновидів вільноврівноваженого гіроскопа є гіроскоп у кардановому підвісі (рис. 2.17). Кардановий підвіс має дві рамки: внутрішню (1) та зовнішню (2). Зовнішня рамка може обертатися відносно підставки 3 навколо осі  $Z$ . У внутрішній рамці монтується підшипники ротора (4), а вона сама може обертатися відносно зовнішньої рамки навколо осі  $Y$ . У такий спосіб забезпечено можливість повороту осі ротора  $X$  у будь-якому напрямку. При цьому всі три осі карданового підвісу перетинаються в одній точці  $C$ , нерухомому центрі мас. Отже, вісь ротора гіроскопа має три степені вільності й може здійснювати будь-які повороти навколо центра.



**Рис. 2.17.** Гіроскоп у кардановому підвісі

зивають вільним. Однією з характерних особливостей вільноврівноваженого гіроскопа є незмінність напрямку його осі обертання в просторі.



**Рис. 2.18.** Гіроскоп, ротор якого врівноважений противагами

В інших випадках вісь гіроскопа закріплюють в одній точці  $C$ , а його ротор врівноважують противагами (рис. 2.18). Вісь гіроскопа може повертатися в будь-якому напрямку, а центр мас усієї системи розташований у точці закріплення осі незалежно від її напрямку в просторі.

Якщо знехтувати тертям у підшипниках і тертям ротора об повітря, то момент прикладених до гіроскопа зовнішніх сил  $\vec{M}$  відносно точки  $C$  дорівнюватиме нулю, а момент імпульсу гіроскопа  $\vec{L}$  залишатиметься незмінним. Такий гіроскоп на-

Під дією добового обертання Землі гіроскоп гірокомпаса набуває додаткового обертання відносно осі Землі, тому його власна вісь обертання орієнтується в напрямі меридіана.

Усі явища, спостережувані під час руху гіроскопа із закріпленим центром мас під дією прикладених до нього зовнішніх сил, описують рівнянням моментів

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (2.56)$$

де  $\vec{M}$  – момент зовнішніх сил;  $\vec{L}$  – момент імпульсу гіроскопа. Величини  $\vec{M}$  і  $\vec{L}$  беруть відносно нерухомої точки опори гіроскопа. Якщо вектор моменту сил дорівнює нулю, то

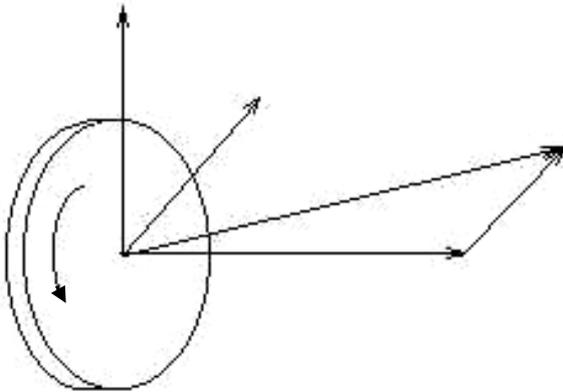
вектор моменту імпульсу системи буде постійним.

Гіроскоп має ще одну специфічну властивість. Якщо протягом певного часу момент зовнішньої сили відносно центра мас гіроскопа не дорівнює нулю, то його вісь повертається в напрямку, перпендикулярному до напрямку дії си-

ли. Обертання осі гіроскопа під дією моменту зовнішніх сил називають прецесією, а величину  $\Omega$  – кутовою швидкістю прецесії.

Слід зазначити, що у разі швидкого обертання рух гіроскопа визначають за напрямком моменту сил, а не просто за величиною сили. Обертання осі гіроскопа здійснюється не в напрямку дії сили  $\vec{F}$  (як за нерухомого гіроскопа), а в перпендикулярному напрямку – навколо осі, перпендикулярної як до  $\vec{M}$ , так і до  $\vec{L}$ .

Нехай  $\vec{M} = 0$  і гіроскоп обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  так, що  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ;  $d\vec{L} \parallel d\vec{\omega}$ ;  $\vec{\omega}$  – вектор, паралельний осі гіроскопа. Якщо до осі гіроскопа застосувати вертикальну зовнішню силу  $\vec{F}$ , то у горизонтальній площині виникне момент сил  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ .



**Рис. 2.19.** Визначення кутової швидкості прецесії гіроскопа

Згідно з рівнянням моментів (2.56) і рис. 2.19 вектор  $d\vec{L}$ , який визначає зміну моменту імпульсу гіроскопа за час  $dt$ , паралельний до вектора моменту сил, а вектори  $\vec{M}$  і  $\vec{L}$  ортогональні один до одного і лежать в одній площині. Тож через відрізок часу  $dt$  момент імпульсу гіроскопа дорівнюватиме  $\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}$ . Напрямок вектора  $\vec{L}_1$  збігається з новим напрямком осі обертання гіроскопа. Отже, ось гіроскопа повертається на кут  $\varphi$ . Водночас на такий самий кут повертається вектор  $\vec{M}$ , у результаті чого через час  $dt$  вектори  $\vec{M}$  і  $\vec{L}$  будуть розташовані так само, як і в початковий момент часу. За наступний момент часу  $dt$  вектор  $\vec{L}$  знову набуде приросту  $d\vec{L}$ , перпендикулярного до  $\vec{L}$ , і т.д. Тому вісь обертання гіроскопа описуватиме коло в горизонтальній площині.

Кутову швидкість прецесії визначають із співвідношення

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.57)$$

Однак із рис. 2.19 бачимо, що  $d\varphi = dL/L$ . Відповідно до рівняння моментів  $d\vec{L} = \vec{M}dt$ .

Отже, кутова швидкість прецесії дорівнює

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{L}}{Ldt} = \frac{\vec{M}dt}{Ldt} = \frac{\vec{M}}{L}, \quad (2.58)$$

тобто відношенню моменту сили до моменту імпульсу гіроскопа відносно його точки закріплення. У векторній формі співвідношення, яке пов'язує момент зовнішніх сил, момент імпульсу гіроскопа та кутову швидкість прецесії, має вигляд

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{L}]. \quad (2.59)$$

Із рівняння (2.59) випливає, що у разі припинення дії моменту сил ( $\vec{M} = 0$ ) миттєво припиняється і прецесійний рух ( $\Omega=0$ ). Звідси характерна ознака прецесії – відсутність «інерції».

Особливість розглядуваної моделі гіроскопа полягає в тому, що момент імпульсу  $\vec{L}$  гіроскопа, який обертається відносно точки С, можна з великим ступенем точності вважати таким, що дорівнює його власному моменту імпульсу:  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , де  $I$  – момент інерції гіроскопа відносно осі ротора. Це наближення має місце лише для гіроскопа за швидкого обертання, тобто за умови

$$\Omega \ll \omega. \quad (2.60)$$

Річ у тім, що за наявності прецесії вектор моменту імпульсу гіроскопа містить дві складові:  $I\vec{\omega}$  та  $I_1\vec{\Omega}$  ( $I_1$  – момент інерції гіроскопа відносно його діаметра), тож вектор повного моменту імпульсу  $\vec{L}$  за напрямком не збігається із вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}$  (з віссю гіроскопа). Таким незбігом можна знехтувати за  $I_1\vec{\Omega} \ll I\vec{\omega}$ . Моменти інерції  $I$  та  $I_1$  у цьому разі є величини одного порядку, і умовою застосування формули (2.59) буде нерівність (2.60), яка у звичайних гіроскопах добре виконується (величини  $\Omega$  і  $\omega$  відрізняються одна від одної принаймні на три порядки). Тоді

$$\Omega = \frac{M}{I\omega}. \quad (2.61)$$

### 2.1.23 Закон Паскаля. Сила Архімеда

Рідини і гази за своїми властивостями істотно відрізняються від твердих тіл. Якщо *тверде тіло* характеризується певним *об'ємом і формою*, то *рідина* визначається лише певним *об'ємом*, набираючи довільної форми посудини, а *гази* не мають *ні власного об'єму, ні форми*. Тверде тіло проявляє пружність у деформаціях всебічного стиску. Коефіцієнт стисливості рідин  $\beta_T$  за кількісних умов має значення  $10^{-9} - 10^{-10}$  Па, а для газів  $10^{-5}$  Па<sup>-1</sup>:

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T \quad (2.62)$$

Характерною ознакою рідин та газів є їх текучість, тобто практична відсутність пружності в деформаціях зсуву. Реальним рідинам і газам притаманні стисливість і внутрішнє тертя, однак в ідеальній моделі названими властивостями нехтують. *Завдяки легкорухливості частинок рідини (або газу) зовнішній тиск на них передається в усі боки рівномірно*. Це твердження називають законом Паскаля. Закон підтверджується на дослідах, узгоджується із законом збереження енергії і знайшов практичне застосування в роботі гідравлічних пресів, домкратів, гальмових систем. Закон Паскаля пояснює рис.2.20.

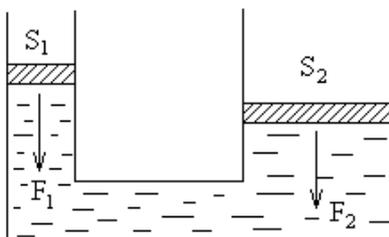


Рис. 2.20. Ілюстрація закону Паскаля

Якщо маємо два циліндри з рідиною, закритих поршнями відповідних перерізів  $S_1$  і  $S_2$ . На кожний поршень діє сила  $F_1$ , і створює на рідину тиск  $p = \frac{F_1}{S_1}$ . Цей тиск передається рідиною на пор-

шень  $S_2$  і обумовлює силу  $F_2 = p \cdot S_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2$  звідки  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$ . Ця система дає ви-  
граш у силі.

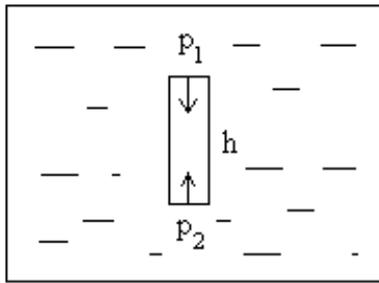


Рис. 2.21. Визначення тиску в рідині

Розглянемо вплив тяжіння на тиск у рідині і газах. Завдяки силам тяжіння нижчі шари рідини зазнають тиску верхніх шарів. Цей тиск рівномірно передається в усі боки. Виділимо в рідині елемент у вигляді вертикального прямого циліндра (рис.2.21). На його рівновагу впливають лише сили вертикального напрямку: вага стовпчика  $\rho gh \cdot S$  та сили тиску на основі  $p_1 S$  і  $p_2 S$ . Сили, які діють на бічну поверхню урівноважуються.

Тоді  $p_2 = p_1 + \frac{\rho gh \cdot S}{S}$ , тобто якщо на рідину (або газ)

зовні діє тиск  $p_0$ , то за законом Паскаля на глибині  $h$  тиск дорівнюватиме :  
 $p = p_0 + \rho gh$ .

На тіло занурене в рідину (або газ) діє виштовхувальна сила, яка за законом Архімеда дорівнює вазі витісненої рідини. Ця архімедова сила є результатом різниці тисків на нижню і верхню частину зануреного тіла.

### 2.1.24 Стаціонарний потік рідин і газів. Рівняння Бернуллі

Для опису руху рідин (або газів) використовують метод *Лагранжа*. При цьому рідину поділяють на окремі елементи і знаходять траєкторію кожного елемента. Існує також метод Ейлера. В цьому методі задають потік рідини полем векторів швидкості, тобто визначають швидкість у кожній точці потоку в різний час.

Потік, в якому поле швидкостей з часом залишається незмінним, називається *стаціонарним потоком*. У стаціонарному потоці будь-яка множина проходить одну точку простору з такою самою швидкістю, як і всі попередні частинки. Графічно потік зображують не векторами швидкості у кожній точці, а лініями потоку. Вони проводяться так, щоб у кожній точці лінії вектор швидкості був дотичним. Частину рідини або газу, обмежену лініями потоку називають *трубкою потоку*. Через поперечний переріз трубки потоку  $\Delta S_1$  за 1с пройде  $\rho_1 \Delta S_1 V_1$  - кількість рідини. ( де  $\rho_1$  - густина рідини,  $V_1$  - швидкість у місці перерізу  $\Delta S_1$ . У стаціонарному потоці  $\rho_1 \Delta S_1 V_1 = \rho_2 \Delta S_2 V_2$ .

У стаціонарному потоці змінами густини рідини й газу можна знехтувати, тобто  $\Delta S_1 V_1 = \Delta S_2 V_2$ , або  $\Delta S V = const$  - рівняння нерозривності.

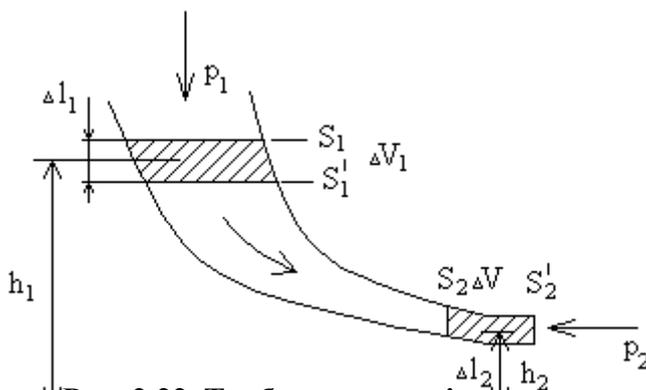


Рис. 2.22. Трубка потоку рідини

Розглянемо ідеальну рідину, тобто абсолютно нестисливу і нев'язку. Виділимо з потоку ідеальної рідини або газу вузьку трубку (рис. 2.22). Далі розглянемо деяку кількість рідини обмежену перері-

зами  $S_1$  і  $S_2$ . За час  $\Delta t$  верхня межа  $S_1$  переміститься в положення  $S_1'$ , а нижня межа  $S_2$  займе положення  $S_2'$ . Зміна енергії рідини повинна дорівнювати роботі, виконаній силами тиску над рідиною, енергія дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій окремих частин рідини. Повне енергія рідини  $E$  змінюється за рахунок тих частинок поблизу верхньої і нижньої межі (у заштрихованих об'ємах), які за час  $\Delta t$  залишили свої місця. Повна ж енергія частинок, які за час  $\Delta t$  залишилися в незаштрихованій частині об'єму не змінилася за умов стаціонарного потоку.

Таким чином, зміна  $E$  дорівнюватиме різниці енергії частинок у заштрихованих об'ємах  $\Delta V_1$  і  $\Delta V_2$ . Оскільки потік неперервний і рідина нестислива, то  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ . Нехай ці об'єми малі настільки, що у кожному з них можна вважати однаковими  $V$ ,  $h$  і тиск  $p$ . Тоді для різниці енергії математичний вираз: 
$$\Delta E = \left( \frac{\rho_1 \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V v g h_2 \right) - \left( \frac{\rho_1 \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V v g h_1 \right),$$
 де  $\rho \Delta V$  - маса речовини в об'ємі  $\Delta V$ .

Робота сил потоку:  $\Delta A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$ . Зауважимо, що сила тиску в нижньому перерізі напрямлена проти зміщення, бо з якою силою рідина діє на рідину спереду неї, такої самої вона зазнає протидії, тому  $\Delta A = \Delta E$ , тобто

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad \text{або} \quad \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad (2.63)$$

Це рівняння Бернуллі.

### 2.1.25 В'язкість рідини. Ламінарний і турбулентний потоки

В'язкістю називають властивість рідин і газів чинити опір, протидіяти відносному переміщенню їх суміжних частин чи шарів. Через в'язкість у реальних рухомих рідинах і газах виникає внутрішнє тертя. Кількісно в'язкість рідин і газів оцінюється коефіцієнтом в'язкості. Ньютон встановив, що  $F = \eta \left( \frac{dV}{dz} \right) \cdot S$ , де  $F$  - це сила внутрішнього тертя,  $\eta$  коефіцієнт в'язкості,  $S$  -

площа контакту суміжних шарів, між якими діє сила тертя;  $\frac{dV}{dz}$  - градієнт швидкості, він виражає зміну швидкості, розраховану на одиницю відстані по нормалі між розглядуваними шарами. Розмірність  $\text{grad} V - \text{с}^{-1}$  Коефіцієнт в'язкості  $\eta$  залежить від роду рідини (або газу), та їх температури, з підвищенням температури в'язкість рідин дуже зменшується. Одиниця вимірювання  $\eta$  у СІ - Па·с.

За формулою Пуазейля в стаціонарному потоці рідини по горизонтальній трубці однакового перерізу із-за витрати частини енергії на подолання сил внут-

трьох

рішнього тертя спад тиску  $\Delta p = \frac{8\eta lv}{r^2}$ , де  $r$  - радіус трубки:  $v$  - швидкість потоку:  $l$  - довжина трубки. Якщо визначити  $v$  і підставити в формулу об'єму, що витікає за час  $t$ :  $V = \pi r^2 \Delta t$ , то  $V = \frac{\eta l^2 \Delta p r^2}{8\eta l} \cdot t$ . У такому вигляді формулу Пуазейля застосовують для визначення коефіцієнтів в'язкості рідин.

Внутрішнє тертя істотно впливає на характер течії рідин і газів. У потоках, що мають малу швидкість при відсутності сторонніх збуджень зберігається таке розміщення шарів, коли одні шари ковзають по поверхні інших *без перемішування*. Такий потік називають *ламінарним*. Коли швидкість потоку стає значною, то спочатку біля стінок труби, а потім по всьому об'єму виникають безладні завихрення і відбувається перемішування шарів. Такий потік називають *турбулентним*. У трубці з турбулентним потоком різко спадає тиск. Якщо в *ламінарному* потоці спад тиску пропорційний швидкості (закон Пуазейля), то в турбулентному потоці він пропорційний *квадрату швидкості* рідини або газу.

*Рейнольдс*, досліджуючи потоки рідин і газів, встановив, що характер потоку визначається *безрозмірним числом*, знайденим за таким виразом:

$$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (2.64)$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $v$  - швидкість потоку,  $d$  - діаметр труби:  $\eta$  - коефіцієнт в'язкості. Було встановлено, якщо  $R_e < 2000$  *потік ламінарний*, а коли  $R_e > 2000$  - потік *нестійкий* і легко переходить у *турбулентний*. Число Рейнольдса використовують для визначення опору і підйімальної сили у випадках руху твердих тіл у рідинах і газах. Його записують ще так:  $R_e = \frac{vd}{\nu}$ . Це так звана *кінематична*

в'язкість, а  $\eta$  — динамічна в'язкість

## 2.2. Перелік контрольних питань

1. Інерціальні системи відліку. Перший принцип класичної механіки (закон інерції Галілея-Ньютона).
2. Другий принцип класичної механіки. Рівняння руху матеріальної точки.
3. Третій принцип класичної механіки. Принцип незалежної дії сил.
4. Сили тертя. Тертя спокою, тертя ковзання, тертя кочення. Закон тяжіння І. Ньютона. Інертна та гравітаційна маса.
5. Сили пружності й опору.
6. Перетворення Галілея. Інваріанти перетворень Галілея. Принцип відносності Галілея.
7. Рівняння руху матеріальної точки у неінерціальних системах відліку. Сили інерції.

8. Рух тіл із змінною масою. Рівняння Мещерського. Система матеріальних точок, рівняння руху системи матеріальних точок. Центр мас системи матеріальних точок.
9. Закон зміни імпульсу системи матеріальних точок. Закон збереження імпульсу системи матеріальних точок.
10. Робота сили за наявного переміщення. Потужність.
11. Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок.
12. Потенціальна енергія матеріальної точки у полі сили тяжіння і сили пружності.
13. Повна механічна енергія матеріальної точки. Закон збереження повної механічної енергії.
14. Момент сили та момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки та нерухомої осі. Рівняння моментів відносно осі.
15. Рівняння моментів для системи матеріальних точок. Закон збереження моменту імпульсу системи матеріальних точок.
16. Динаміка поступального руху твердого тіла. Рівняння руху. Рівновага твердого тіла.
17. Рівняння руху твердого тіла у разі обертання навколо нерухомої осі.
18. Робота зовнішньої сили у разі обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається.
19. Момент інерції твердого тіла. Обчислення моментів інерції відносно осі. Момент інерції твердого тіла відносно паралельних осей (теорема Штейнера - Гюйгенса).
20. Гіроскопи. Теорія гіроскопічних явищ.
21. Закон Паскаля. Сила Архімеда. Стаціонарний потік рідин і газів. Рівняння Бернуллі. Формула Торрічеллі. Ламінарний і турбулентний потоки. В'язкість. Формула Пуазейля.

## **2.3. Лабораторні роботи**

### **2.3.1 Лабораторна робота 2. Визначення коефіцієнтів тертя спокою, ковзання і кочення**

Прилад для визначення коефіцієнтів тертя різних матеріалів по сталі являє собою платформу, шарнірно зафіксовану на литому корпусі, прикріпленому до масивної основи. Платформу можна встановлювати довільно: від 0 (горизонтальне положення) до 45°. Кут нахилу платформи відлічують за шкалою. Платформу нахиляють спочатку вручну за відкріплених рукояток, згодом, обертаючи маховик за закріпленої рукоятки, встановлюють платформу на необхідний кут, після чого за допомогою рукоятки фіксують задане положення.

#### **Порядок виконання експерименту**

1. Для визначення коефіцієнта тертя спокою  $\mu_c$  необхідно на горизонтально розміщену платформу покласти зразок. Відтак, користуючись гвинтовим

механізмом, поступово нахилияти платформу, доки зразок не почне рухатися. Кут нахилу  $\alpha_c$  визначити за шкалою для трьох пар матеріалів, що труться. Їх значення й обчислені за формулою (2.8) коефіцієнти тертя спокою  $\mu_c$  занести у таблицю.

2. Для визначення коефіцієнта тертя ковзання платформу встановити під кутом  $\alpha > \alpha_c$ . Обчислити відстань  $S$  і час ковзання  $t$  зразка похилою площиною. За формулою (2.19) знайти коефіцієнт тертя ковзання  $\mu$  і його істинне значення.

3. Для визначення коефіцієнта тертя кочення  $\mu_k$  платформу слід установити під кутом  $\alpha_k$  і виміряти час  $t$  скочування зразка платформою з проходженням відстані  $S$ . За  $r = \text{const}$ ,  $g = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$  обчислити час  $t$  і за формулою (2.21) розрахувати коефіцієнт тертя кочення  $\mu_k$  та його істинне значення.

### 2.3.2 Лабораторна робота 3. Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом падаючої кульки

Для вимірювання коефіцієнта в'язкості рідин існує досить багато методів. Розглянемо метод падаючої кульки, в основі якого лежить закон Стокса, та метод, що ґрунтується на законі Пуазейля. Основною частиною установки є циліндрична посудина, заповнена досліджуваною рідиною (рис. 2.23). У разі вільного падіння тіла всередині нерухомої рідини на нього, крім сили земного тяжіння  $P$  та виштовхувальної сили  $F_{арх}$ , діє сила опору рідини  $F$ , яку для тіл сферичної форми визначаємо за формулою Стокса:

$$F = 6\pi r\eta V, \quad (2.65)$$

де  $r$  – радіус кульки, а  $V$  – швидкість її руху.

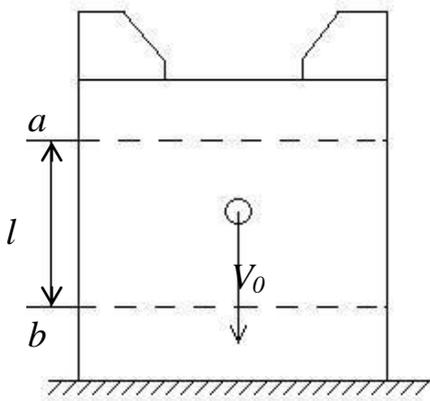


Рис. 2.23. Визначення коефіцієнта в'язкості за методом падаючої кульки

Рівнодійна цих сил на початку падіння надає кульці прискорення, яке потім дорівнює нулю. Тому в подальшому кулька рухається рівномірно зі швидкістю  $V_0$ , тож виконується рівняння

$$\frac{4}{3}\pi r r^2 g(\rho_k - \rho_p) = 6\pi r\eta V, \quad (2.66)$$

де  $\rho_k$ ,  $\rho_p$  – густина кульки і рідини відповідно.

Звідси

$$\eta = \frac{gd^2(\rho_k - \rho_p)}{18V_0}, \quad (2.67)$$

де  $d$  – діаметр кульки. Швидкість  $V_0$  можна визначити, вимірявши час  $\tau$  проходження кулькою шляху  $l$  між рисками  $a$  і  $b$  (рис. 2.23). Тоді

$$\eta = \frac{gd^2(\rho_k - \rho_p)\tau}{18l}. \quad (2.68)$$

Формула правдива за умови падіння кульки в необмеженому середовищі. Якщо у разі падіння кульки вздовж осі циліндричної посудини радіусом  $R$  врахуємо вплив її стінок, то отримаємо формулу

$$\eta = \frac{gd^2(\rho_k - \rho_p)\tau}{18l(1 + 1,2\frac{d}{R})}. \quad (2.69)$$

### Порядок виконання експерименту

1. Скориставшись мікрометром, тричі виміряти (уздовж різних напрямків) діаметри п'яти кульок.
2. Виміряти секундоміром час падіння кульки між рисками  $a$  і  $b$  на циліндрі. Для того щоб кульки падали уздовж осі посудини, їх слід кидати через воронку. Під час пуску та зупинки секундоміра необхідно спостерігати спочатку за рівнем риски  $a$ , відтак –  $b$ .
3. Результати вимірювань занести до таблиці. З формулою (2.69) визначити значення коефіцієнта в'язкості.

### 2.3.3 Лабораторна робота 4. Визначення модуля Юнга методом згину

Прилад являє собою підставку  $A$ , на верхніх планках якої закріплено дві металеві призми  $B$  (рис. 2.24). Зверху зафіксовано площадку  $C$ . Якщо до стрижня, який має дві точки опори, застосувати силу  $F$ , спрямовану перпендикулярно до його довжини  $l$ , то він прогнеться на величину  $\lambda$ , яку називають «стрілою прогину». Величину прогину обчислимо за формулою

$$\lambda = \frac{kl^3}{\alpha E} F, \quad (2.70)$$

де  $E$  – модуль Юнга;  $k$  – коефіцієнт, що залежить від точки прикладання сили;  $\alpha$  – коефіцієнт, що залежить від геометричних розмірів і форми тіла.

Для способу кріплення, зображеного на рис. 2.24а,  $k = 1/4$ , а для способу на рис. 2.24б –  $k=4$ . Для всіх способів кріплення прямокутного стрижня  $\alpha = ab^3$ , де  $a$  – ширина стрижня;  $b$  – товщина стрижня. Вимірювання виконують на установці, наведеній на рис. 6.1 (для двох способів кріплення вантажу).

### Порядок виконання експерименту

1. Скориставшись штангенциркулем і лінійкою, визначити геометричні розміри металевого прямокутного стрижня: ширину ( $a$ ), товщину ( $b$ ), довжину ( $l$ ).
2. На площадку  $C$  встановити сферометр та визначити його нульові показники  $N_0$ . При цьому на стрижні необхідно закріпити площадку  $D$ .
3. На площадку  $D$  послідовно покласти вантажі  $P_1, P_2, \dots, P_n$  та записати відповідні показники сферометра  $N_1, N_2, \dots, N_n$ .
4. Для кожного досліду визначити «стрілу прогину»  $\lambda$  за формулою  $\lambda_i = N_i - N_0$ .

5. Отримані значення  $\alpha$ ,  $k$ ,  $F$ ,  $\lambda$  підставити у формулу (2.70) та знайти модуль Юнга.

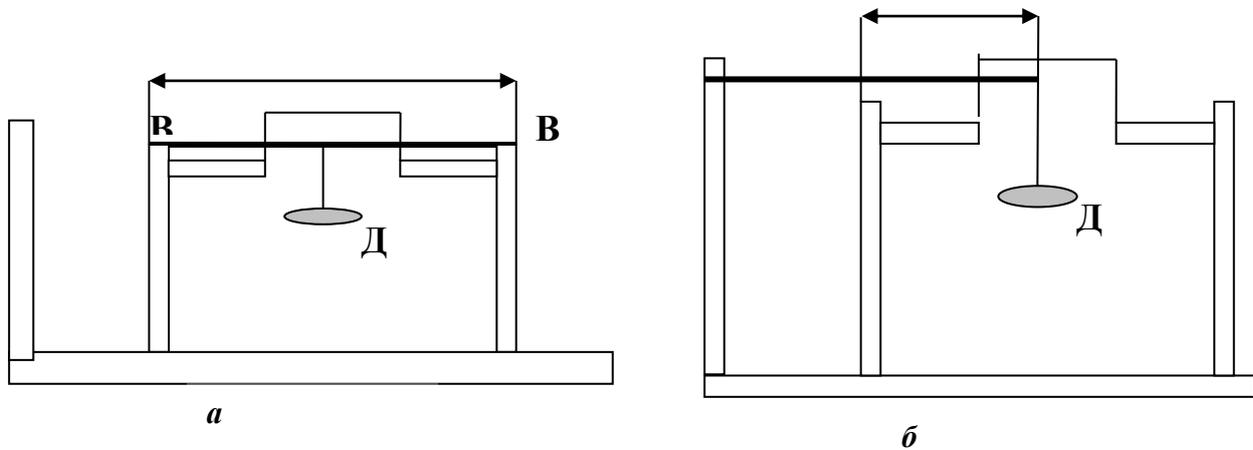


Рис. 2.24. Схема приладу для визначення модуля Юнга методом згину:  
*a* – з двома точками опори; *б* – з однією точкою опори

### 2.3.4 Лабораторна робота 5. Визначення модуля Юнга за методом Лермантова

Деформацію розтягнення характеризують за модулем Юнга, який визначають за формулами  $E = \sigma / \varepsilon$  або  $E = \frac{F \cdot l}{S \cdot \Delta l}$ . Для точного вимірювання величини  $\Delta l$  В. Лермантов запропонував прилад, схематично зображений на рис. 2.25.

Випробовуваний дріт  $l$  підвісимо на кронштейні А. На кінці дроту закріпимо циліндр В. Скориставшись вилкоподібним важелем Д, рухомо скріпимо циліндр В з металевим стрижнем С. Для попередження різких змін натягу дроту скористаємося гвинтом-аретиром К. До циліндра В підвісимо стрижень з площадкою Р, призначений для випрямлення дроту (у ході обчислень його вагу не беремо до уваги). Силою, що розтягує дріт, є сила тяжіння тягара  $F$ , покладеного на площадку Р. Крім того, наявна площадка Н з'єднана з кронштейном А. На ній розташуємо усі тягарі, використовувані в роботі.

На осі 0 розташоване дзеркало S (рис. 2.26), що може обертатися у вертикальній площині. До його нижнього кінця під прямим кутом прикріплено важіль  $r$ , вільний кінець якого лежить на циліндрі В (рис. 2.25).

У ході розтягування дроту важіль опуститься, а дзеркало повернеться на деякий кут  $\alpha$ . На відстані  $R$  від дзеркала встановимо вертикальну шкалу N та зорову трубу M (рис. 2.26). Побачивши шкалу в трубі, оберемо ті значення шкали, що збігатимуться з ниткою зорової труби. Навантаживши площадку Р тягарем  $F$ , зафіксуємо нове положення шкали  $N_1$ . Під вагою тягара важіль  $r$  дзеркала опуститься на величину  $\Delta l$ . Із рис. 2.26 бачимо, що видовження  $\Delta l = r \cdot \text{tg} \alpha$ ,  $(N_1 - N_0) = R \cdot \text{tg} 2\alpha$ . Оскільки  $\alpha$  є мала величина, то  $\Delta l = r \cdot \alpha$ , а

$(N_1 - N_0) = 2R\alpha$ . Із цих рівнянь випливає, що  $\Delta l = \frac{r}{2R}(N_1 - N_0)$ ,

$$E = \frac{8Rl \cdot F}{\pi \cdot d^2 r (N_1 - N_0)}.$$

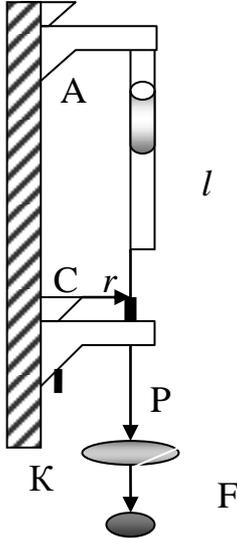


Рис. 2.25. Прилад  
В. Лермантова

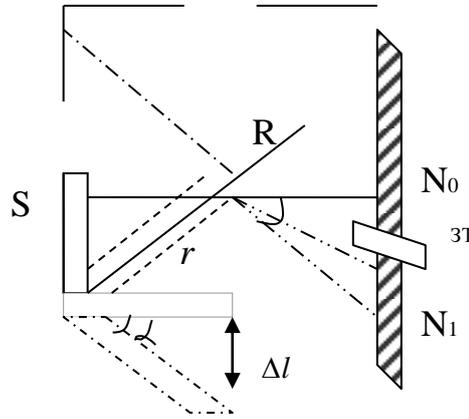
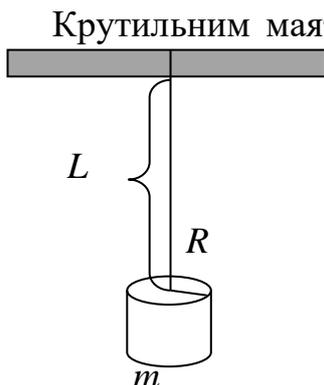


Рис. 2.26. Схема  
реєстрації

### Порядок виконання експерименту

1. Виміряти довжину  $l$  та діаметр дроту  $d$ .
2. Записати нульові положення шкали  $N_0$ .
3. На площадку  $P$  послідовно покласти тягарі  $P_1, P_2, \dots, P_n$  та записати відповідні положення шкали  $N_1, N_2, \dots, N_n$ . Кожен із тягарів декілька разів зняти з площадки та покласти знову. Із середніх значень знайти  $(N_i - N_0)$ .
4. Аретирувати дріт для запобігання ударного навантаження.
5. Перекладати тягарі лише з площадки  $N$  на площадку  $P$  для усунення похибок, пов'язаних з різними прогинами кронштейна  $A$ .
6. Визначити модуль Юнга  $E$ .

### 2.3.5 Лабораторна робота 6. Визначення модуля зсуву за коливаннями крутильного маятника



Крутильним маятником називають систему, що являє собою нитку довжиною  $l$ , один кінець якої зафіксовано на кронштейні, а до іншого кінця прикріплено масивний циліндр масою  $m$  і радіусом  $R$  (рис. 2.27). Якщо закрутити нитку і відпустити маятник, виникнуть крутильні коливання, зумовлені внутрішніми силами пружності, що створюють момент сили  $M$ . Сили пружності обумовлені в

Рис. 2.27. Крутильний  
маятник

цьому разі деформацією зсуву. Закон Гука за таких умов запишемо у вигляді рівняння

$$M = -D\phi, \quad (2.71)$$

де  $D$  – модуль кручення;  $\phi$  – кут закручування.

Згідно з основним законом обертального руху

$$M = I\beta, \quad (2.72)$$

де  $\beta = \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$  – кутове прискорення.

Момент інерції циліндра  $I$  визначимо за рівнянням

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho R^4 H, \quad (2.73)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу циліндра;  $R$  – радіус циліндра;  $H$  – висота циліндра.

Підставимо в рівняння (2.72) значення моменту сили (2.41). Тоді

$$I\beta + D\phi = 0, \quad I\ddot{\phi} + D\phi = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{D}{I}\phi = 0. \quad (2.74)$$

Рівняння (2.74) – лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійним коефіцієнтом. Якщо величину  $\frac{D}{I}$  позначити як  $\omega^2$ , то воно зведеться до рівняння гармонічних коливань з частотою  $\omega$ :

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0. \quad (2.75)$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є  $\phi = A\cos(\omega t + \phi_0)$ .

Частота коливань становитиме  $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{D}{I}$ . Отже,  $D = I\frac{4\pi^2}{T^2}$ .

Модуль кручення  $D$  пов'язаний із модулем зсуву  $G$  співвідношенням

$$D = \frac{\pi Gr^4}{2l}, \quad (2.76)$$

де  $r$  – радіус нитки;  $l$  – довжина нитки (дроту).

Визначимо модуль зсуву:

$$G = \frac{2lD}{\pi r^4} = \frac{8\pi^2 l I}{\pi r^4 T^2} = \frac{8\pi l I}{T^2 r^4}. \quad (2.77)$$

Підставимо значення моменту інерції циліндра (2.73) в рівняння (2.77):

$$G = \frac{4\pi^2 \rho}{T^2} H l \left(\frac{R}{r}\right)^4. \quad (2.78)$$

За отриманим виразом визначимо модуль зсуву через відомі параметри крутильного маятника.

### Порядок виконання експерименту

1. Виміряти висоту  $H$  і діаметр циліндра  $d = 2R$ .
2. Обчислити діаметр  $d_H = 2r$  і довжину нитки  $l$  (дроту).

3. Закрутити нитку маятника на малий кут. Визначити тривалість 50 повних коливань (50  $T$ ) і знайти період коливань  $T$ .

4. Результати вимірювань усіх величин, що входять до формули (2.78), занести в таблицю. Визначити  $G$ . Обчислити похибку вимірювань і знайти істинне значення модуля зсуву.

### 2.3.6 Лабораторна робота 7. Визначення моменту інерції динамічним методом

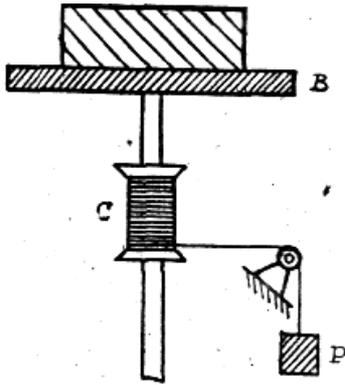


Рис. 2.28. Прилад для визначення моменту інерції тіла динамічним методом

Прилад для визначення моменту інерції тіла динамічним методом являє собою горизонтальний диск В (рис. 2.28), що може обертатися навколо вертикальної осі під дією тягара Р, закріпленого на шнурі. Шнур перекинато через невеликий блок і намотано на шків С, розташований на осі приладу. Тіло, момент інерції якого вимірюватимемо, розмістимо на диску так, щоб його вісь збігалася з віссю обертання приладу.

У разі падіння тягара з висоти  $h$  із закону збереження енергії випливає рівняння

$$mgh = \frac{(I_0 + I)\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + A, \quad (2.79)$$

де  $m$  – маса тягара;  $I_0$  і  $I$  – моменти інерції приладу та тіла відносно осі обертання;  $\omega$  – кутова швидкість у момент досягнення тягарем найнижчого положення;  $v$  – швидкість тягара в даний момент;  $A$  – робота сил тертя. Якщо в рівнянні (2.79) подати  $\omega$  і  $v$  через висоту  $h$ , радіус  $r$  шківа, на який намотано шнур, та час падіння тягара  $t$  ( $v = \frac{2h}{t}$ ,  $\omega = \frac{2h}{rt}$ ), то отримаємо

$$mgh = (I_0 + I) \frac{2h^2}{r^2 t^2} + m \frac{2h^2}{t^2} + A. \quad (2.80)$$

Для виключення роботи сил тертя проведемо вимірювання для двох вантажів  $m_1$  і  $m_2$ . Якщо врахувати, що робота сил тертя не залежить від швидкості обертання, отримаємо

$$m_1 gh = (I_0 + I) \frac{2h^2}{r^2 t_1^2} + m_1 \frac{2h^2}{t_1^2} + A, \quad (2.81)$$

$$m_2 gh = (I_0 + I) \frac{2h^2}{r^2 t_2^2} + m_2 \frac{2h^2}{t_2^2} + A. \quad (2.82)$$

Віднімаючи почленно з рівняння (2.81) рівняння (2.82), отримаємо

$$(m_1 - m_2)g = \frac{2h(I_0 + I)}{r^2} \left( \frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) + 2h \left( \frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2} \right). \quad (2.83)$$

Рівняння (2.83) дозволяє визначити добуток моментів інерції через величини, які можна виміряти безпосередньо. Для виключення величини  $I$  із форму-

ли (2.83) зніmemo тіло з диска В і повторимо аналогічні вимірювання для ненавантаженого приладу.

$$\text{Тоді} \quad (m_1 - m_2)g = \frac{2hI_0}{r^2} \left( \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} \right) + 2h \left( \frac{m_1}{\tau_1^2} - \frac{m_2}{\tau_2^2} \right), \text{ отже,} \quad (2.84)$$

$$I = r^2 \left[ \frac{\frac{(m_1 - m_2)g}{2h} - \left( \frac{m_1}{t_1^2} - \frac{m_2}{t_2^2} \right)}{\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}} - \frac{\frac{(m_1 - m_2)g}{2h} - \left( \frac{m_1}{\tau_1^2} - \frac{m_2}{\tau_2^2} \right)}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2}} \right]. \quad (2.85)$$

### Порядок виконання експерименту

1. Розмістити тіло масою  $m$  на диску так, щоб вісь, відносно якої визначаємо  $I$ , збігалася з віссю обертання приладу. Виміряти 5 разів час падіння  $t_1$  і  $t_2$  тягарів з висоти  $h$  із масами  $m_1$  і  $m_2$  відповідно.

2. Зняти тіло масою  $m$  з диска і виміряти 5 разів час падіння  $\tau_1$  і  $\tau_2$  тягарів із масами  $m_1$  і  $m_2$  з висоти  $h$ .

3. Обчислити момент інерції  $I$  тіла відносно осі обертання за формулою (2.85).

### 2.3.7 Лабораторна робота 8. Визначення моменту інерції махового колеса методом коливань

Система, що включає в себе маховик та ось, яка проходить через центр мас системи, перебуває у стані байдужої рівноваги. Якщо до махового колеса гвинтом прикріпити допоміжний паралелепіпед В (рис. 2.29), то вона набуде стану стійкої рівноваги. Тому виведене з положення рівноваги колесо здійснюватиме коливання з деяким періодом  $T$ , амплітуду яких обчислюють за шкалою приладу.

Якщо кутова амплітуда коливань дорівнює  $\alpha$ , то кутову швидкість в процесі проходження точки рівноваги можна визначити у такий спосіб.

Припустивши, що коливання махового колеса можна описати законом гармонічного руху у вигляді  $S = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi_0\right)$ , отримаємо вираз

$$\theta = \alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad (2.86)$$

де  $\theta$  – кутове зміщення в момент часу  $t$ ;  $\alpha$  – кутова амплітуда коливань. Початкову фазу коливань  $\phi_0$  вважатимемо такою, що дорівнює нулю. Перша похідна від виразу (2.86) за часом  $t$  дорівнює кутовій швидкості  $\omega$  коливної точки:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T} \alpha \cos 2\pi \frac{t}{T}. \quad (2.87)$$

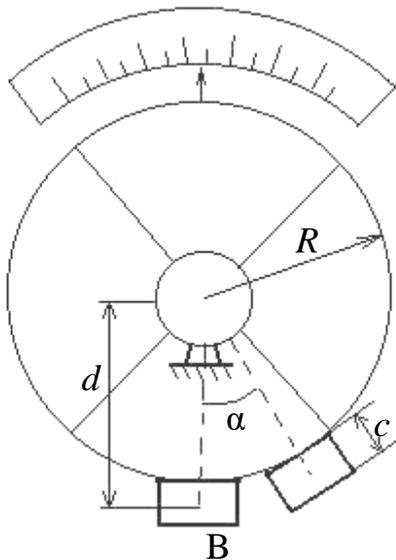


Рис. 2.29. Махове колесо

Під час проходження коливною точкою положення рівноваги фаза коливань дорівнюватиме нулю, а косинус в останньому виразі – одиниці.

Отже, кутова швидкість махового колеса під час проходження положення рівноваги дорівнюватиме

$$\omega = \frac{2\pi\alpha}{T}. \quad (2.88)$$

Звідси для кінетичної енергії  $E_K$  системи в цей момент часу, послуговуючись формулою  $E_K = \frac{I\omega^2}{2}$ , отримаємо вираз

$$E_K = \frac{1}{2}(I + I')\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2, \quad (2.89)$$

де  $I$  та  $I'$  – моменти інерції махового колеса і допоміжного паралелепіпеда відносно осі обертання.

Водночас потенціальна енергія  $E_{\text{ПОТ}}$  системи в її крайньому положенні (рис. 2.29) дорівнюватиме  $E_{\text{ПОТ}} = mgh$ , де  $m$  – маса допоміжного паралелепіпеда;  $h$  – висота його підняття відносно початкового положення.

Ця величина дорівнюватиме

$$h = d - d\cos\alpha = d(1 - \cos\alpha) = 2d\sin^2(\alpha/2),$$

де  $d = R + c/2$ .

Для невеликих амплітуд коливань вважатимемо, що  $h = 2d(\alpha^2/4)$ , і тоді потенціальна енергія системи в крайньому положенні дорівнюватиме

$$E_{\text{ПОТ}} = mgd \frac{\alpha^2}{2}. \quad (2.90)$$

Якщо знехтуємо силами тертя й опору повітря, то з формул (2.59) і (2.60) із урахуванням закону збереження енергії знайдемо

$$\frac{1}{2}(I + I')\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2 = mgd \frac{\alpha^2}{2}$$

і отримаємо

$$I = mgd\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - I'. \quad (2.91)$$

Усі величини в першому члені правої частини виразу (2.91), тобто  $m$ ,  $d$  і  $T$ , вимірюватимемо безпосередньо. Момент інерції допоміжного паралелепіпеда  $I'$  відносно осі обертання системи за теоремою Штейнера визначимо так:

$$I' = I_0 + md^2, \quad (2.92)$$

де  $I_0$  – момент інерції відносно осі обертання, що проходить через центр маси паралелепіпеда, який дорівнює

$$I_0 = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad (2.93)$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – лінійні розміри паралелепіпеда (рис. 2.30).

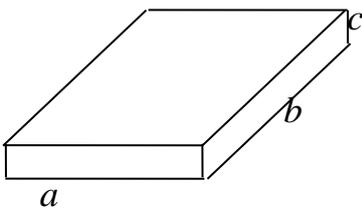


Рис. 2.30. Лінійні розміри паралелепіпеда

Підставивши значення  $I_0$  та  $I'$  у формулу (2.93), отримаємо рівняння

$$I = \rho abc \left( \frac{gdT^2}{4\pi^2} - \frac{c^2 + a^2}{12} - d^2 \right). \quad (2.94)$$

### Порядок виконання експерименту

1. Визначити лінійні розміри паралелепіпеда й обчислити його масу ( $\rho=9,0$  г/см<sup>3</sup>).
2. Відхилити вантаж і надати системі коливального руху. Визначити період коливань, вимірявши тривалість 8–10 коливань.
3. Виміряти радіус маховика  $R$ , обчислити  $d$ .
4. Експеримент повторити  $n$  разів; з'ясувати істинне значення  $I$ .

### 2.3.8 Лабораторна робота 9. Вивчення плоского руху твердого тіла за допомогою маятника Максвелла

Прилад, названий маятником Максвелла, схематично зображено на рис. 2.31. На вертикальній колоні (2), закріпленій на основі (4), встановлено два кронштейни: нерухомий верхній (1) і нерухомий нижній (3). На верхньому кронштейні розташовано електромагніт, що фіксує маятник у верхньому положенні, пристрій для кріплення нитки біфілярного підвісу маятника. Нижній кронштейн із прикріпленням до нього фотодатчиком можна переміщувати уздовж колони та фіксувати в довільному положенні, визначуваному за міліметровою шкалою на колоні приладу. Для визначення положення кронштейн має чорний покажчик, що збігається з оптичною віссю фотодатчика. Останній з'єднано із секундоміром, розміщеним в основі приладу. Маятник являє собою диск, міцно закріпленій на осі. За допомогою електромагніту маятник (із одним з надягнутих знімних кілець) фіксують у крайньому верхньому положенні. Після вимкнення електромагніту маятник опускається, розкручуючи нитки підвісу, секундомір почне відраховувати час руху маятника. Коли маятник опуститься на максимальну довжину, нижній край знімного кільця перетне оптичну вісь фотодатчика. Секундомір автоматично зупинить відлік, і на його табло висвітиться час  $t$  опускання маятника на його максимальну довжину  $h$ . Цю довжину визначають за положенням нижнього кронштейна за шкалою на колоні. Верхнє положення маятника відповідатиме нульовій відмітці шкали.

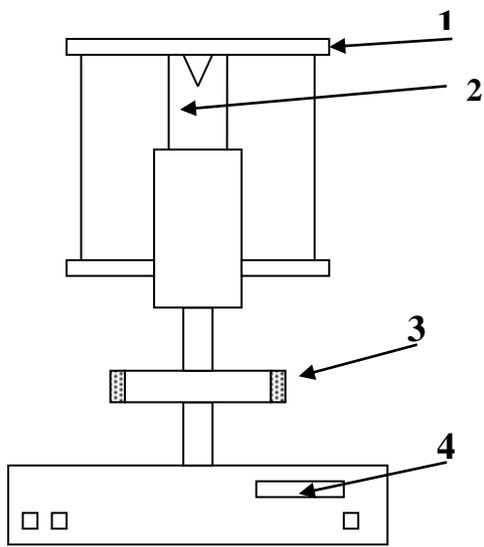


Рис. 2.31. Маятник  
Максвелла

зпочне відлічувати час спуску. Після перетину нижнім краєм знімного кільця оптичної осі фотодатчика мілісекундомір автоматично вимкнеться. Занести до таблиці час  $t$  руху маятника.

4. Повторити вимір часу  $t$  руху маятника. Для цього натиснути клавішу «Пуск», закріпити маятник у крайньому верхньому положенні, як указано в п. 2, натиснути клавішу «Скидання» («Сброс»). На табло секундоміра висвітяться нулі, що означатиме готовність приладу до повторних вимірювань.

5. За формулами (2.46) та (2.47) визначити експериментальні та теоретичні значення моментів інерції маятника Максвелла зі знімним кільцем. Зробити висновки про відповідність експериментальних результатів теоретичним даним.

6. За формулами (2.48) та (2.49) визначити потенціальну енергію маятника Максвелла у крайньому верхньому положенні та кінетичну енергію в крайньому нижньому положенні. Порівняти отримані результати, зробити висновок про експериментальне підтвердження закону збереження повної механічної енергії.

### 2.3.9 Лабораторна робота 10. Перевірка основного закону обертального руху за допомогою маятника Обербека

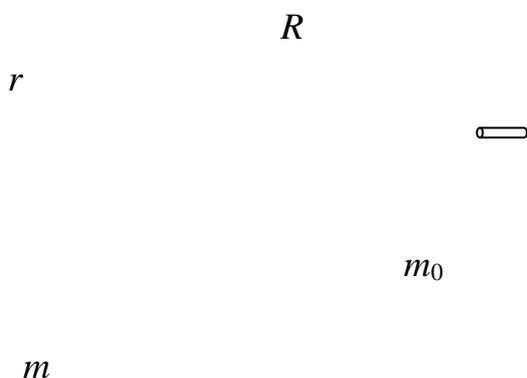


Рис. 2.32. Маятник Обербека

### Порядок виконання експерименту

1. Увімкнути прилад натисканням клавіші «Мережа» («Сеть») (клавіша «Пуск» при цьому віджата), подати напругу до магніту.

2. Рівномірно намотавши нитку на вісь маятника, закріпити його за допомогою магніту в крайньому верхньому положенні.

3. Натиснути на клавішу «Пуск». З електромагніту автоматично зніметься напруга, і маятник, розкручуючи нитки підвісу, почне опускатися. Мілісе-кундомір розпочне відлічувати час спуску.

Після перетину нижнім краєм знімного кільця оптичної осі фотодатчика мілісекундомір автоматично вимкнеться. Занести до таблиці час  $t$  руху маятника.

4. Повторити вимір часу  $t$  руху маятника. Для цього натиснути клавішу «Пуск», закріпити маятник у крайньому верхньому положенні, як указано в п. 2, натиснути клавішу «Скидання» («Сброс»). На табло секундоміра висвітяться нулі, що означатиме готовність приладу до повторних вимірювань.

5. За формулами (2.46) та (2.47) визначити експериментальні та теоретичні значення моментів інерції маятника Максвелла зі знімним кільцем. Зробити висновки про відповідність експериментальних результатів теоретичним даним.

6. За формулами (2.48) та (2.49) визначити потенціальну енергію маятника Максвелла у крайньому верхньому положенні та кінетичну енергію в крайньому нижньому положенні. Порівняти отримані результати, зробити висновок про експериментальне підтвердження закону збереження повної механічної енергії.

Маятник Обербека (рис. 2.32) включає в себе основну вісь і закріплені на ній хрестовину та шків. Хрестовина містить чотири стрижня із нанесеними на них поділками. На стрижнях закріплено однакові циліндри масою  $m_0$ . Відстань циліндрів від осі обертання можна змінювати. Маятник має шків радіусом  $r$ . На нього намотують нитку, до вільного кінця якої прикріплена гирка масою  $m$ . Під вагою гирки нитка розмотується, що зумовлює рівноприскорений обертальний рух маятника.

Знаючи лінійне прискорення  $a$  гир-

ки масою  $m$ , визначимо кутове прискорення  $\varepsilon$  за формулою  $\varepsilon = \frac{a}{r}$ . Лінійне прискорення  $a = \text{const}$ , оскільки  $\varepsilon = \text{const}$ .

Отже, вимірявши висоту  $h$  і час  $t$  падіння гирки  $h = \frac{at^2}{2}$ , знайдемо лінійне прискорення  $a = \frac{2h}{t^2}$  і кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2} . \quad (2.95)$$

Момент сили визначимо із співвідношення

$$M = fr - M_{\text{тер}} = m(g-a)r - M_{\text{тер}} , \quad (2.96)$$

де  $f$  – сила натягу нитки;  $M_{\text{тер}}$  – момент сили тертя в осі. Величина  $M_{\text{тер}}$  мала, тому для спрощення можна зрівняти її до нуля:  $M_{\text{тер}} = 0$ .

Для більшої точності вимірювань визначимо  $M_{\text{тер}}$ . Для цього складемо рівняння

$$M = I \cdot \varepsilon = m(g-a)r - M_{\text{тер}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{(m(g-a)r - M_{\text{тер}})}{I} \quad \text{за } I = \text{const} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(m_1(g-a_1)r - M_{\text{тер}})}{I} \\ \varepsilon_2 &= \frac{(m_2(g-a_2)r - M_{\text{тер}})}{I} \end{aligned} \Rightarrow \frac{m_1 gr - m_1 \varepsilon_1 r^2 - M_{\text{тер}}}{\varepsilon_1} = \frac{m_2 gr - m_2 \varepsilon_2 r^2 - M_{\text{тер}}}{\varepsilon_2} .$$

Оскільки  $a = r \cdot \varepsilon$ , ураховуючи вираз  $\varepsilon = \frac{2h}{t^2 r}$ , отримаємо рівняння

$$M_{\text{тер}} = \frac{(m_1 t_1^2 - m_2 t_2^2) gr + (m_1 - m_2) 2hr}{t_1^2 - t_2^2} , \quad (2.97)$$

де  $t_1$  і  $t_2$  – час проходження висоти  $h$  гирками з масами  $m_1$  і  $m_2$  відповідно.

Момент інерції маятника включає в себе моменти інерції хрестовини  $I_0$  і чотирьох циліндрів масою  $m_0$ , центр мас яких розташований на відстані  $R$  від осі маятника:

$$I = I_0 + 4m_0 R^2 . \quad (2.98)$$

Момент інерції циліндра можна прирівняти до моменту інерції матеріальної точки, положення якої збігається з положенням центра мас циліндра. Ця умова виконується, якщо розміри циліндра незначні. При цьому його момент інерції відносно центра мас є досить малий порівняно із сумарним моментом інерції маятника.

### Порядок виконання експерименту

1. Для визначення  $M_{\text{тер}}$  закріпити циліндри  $m_0$  на хрестовині на однаковій відстані  $R$  від осі обертання. При цьому  $I = \text{const}$ . Потім для гирки масою  $m_1$ , підвішеної до нитки, визначити  $n$  разів час падіння  $t_1$  з висоти  $h$ . За формулою (2.97) визначити  $M_{\text{тер}}$  для  $n$  варіантів вибірки. Усі значення, що входять до рівняння (2.97), занести в таблицю і провести оцінку похибки, обчисливши істинне значення  $M_{\text{тер}}$ .

2. Для визначення моменту інерції хрестовини  $I_0$  необхідно:

- зняти зі стрижнів циліндри  $m_0$ ;
- прикріпити до нитки гирку  $m_1$  або  $m_2$ , підняти її догори, визначити  $n$  разів час падіння гирки з висоти  $h$ ;
- обчислити моменти інерції хрестовини за формулою

$$I_0 = \frac{M_0}{\varepsilon} = \frac{m(g-a)r - M_{\text{тр}}}{(2h \setminus rt^2)} = \frac{mr(g - \frac{2h}{t^2})}{(2h \setminus rt^2)}. \quad (2.99)$$

Усі значення, що входять до формули (2.99), занести до таблиці й обчислити похибки й істинне значення  $I_0$ .

3. Для перевірки рівності  $\frac{M_2}{M_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  (2.100) за  $I = \text{const}$  необхідно:

- циліндри масою  $m_0$  розмістити на однаковій відстані  $R$  від центра маятника і не змінювати їх положення до закінчення даної частини роботи;
- прикріпити до нитки гирку масою  $m_1$  і визначити  $n$  разів тривалість її падіння з висоти  $h$ ;
- прикріпити до нитки гирку  $m_2$  (при цьому сумарна маса дорівнюватиме  $(m_1 + m_2)$ ); визначити  $n$  разів тривалість падіння  $t_2$  гирок із висоти  $h$ .

Усі значення, що входять до формул (2.95) і (2.96), занести до таблиці. Обчислити похибки й істинне значення відношень  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  і  $\frac{M_2}{M_1}$ , порівняти їх.

4. Для перевірки рівності  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  (2.101) за  $M = \text{const}$  необхідно:

- прикріпити до нитки гирку масою  $m_1$  або  $m_2$  і не знімати її до закінчення даної частини роботи;
- розмістити циліндри масою  $m_0$  на хрестовині на відстані  $R_1$  до центра, визначити  $n$  разів тривалість  $t_1$  падіння гирки масою  $m_1$  або  $m_2$  із висоти  $h$ ;
- змінити положення циліндрів масою  $m_0$  на хрестовині, установивши їх на одній відстані  $R_2$  від центра маятника, визначити  $n$  разів час  $t_2$  падіння гирки масою  $m_1$  або  $m_2$  з висоти  $h$ .

Усі значення, що входять до формул (2.95) і (2.98), занести до таблиці. Обчислити похибки й істинне значення відношень  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ ,  $\frac{I_1}{I_2}$ , порівняти їх.

### 2.3.10 Лабораторна робота 11. Вивчення властивостей гіроскопа

Схему навчального приладу представлено на рис. 2.33. Властивості гіроскопа у приладі має ротор електродвигуна (1) з маховиком (11), насадженим на вал двигуна. Двигун змонтовано на кронштейні (10) у такий спосіб, щоб він міг повертатися навколо горизонтальної осі  $y$ . Обертальний з'єднувач (5) дозволяє повертатися навколо вертикальної осі  $z$ . Вісь ротора  $x$  може мати будь-яке положення в просторі. Отже, гіроскоп має три ступеня вільності. На корпусі двигуна закріплено важіль (2), який конструктивно являє собою продовження осі обертання ротора. Уздовж важеля можна переміщувати і фіксувати тягар (3). Положення тягара (3) визначають за міліметровою шкалою на важелі. Переміщення вантажу (3) уздовж важеля дозволяє змінювати момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп.

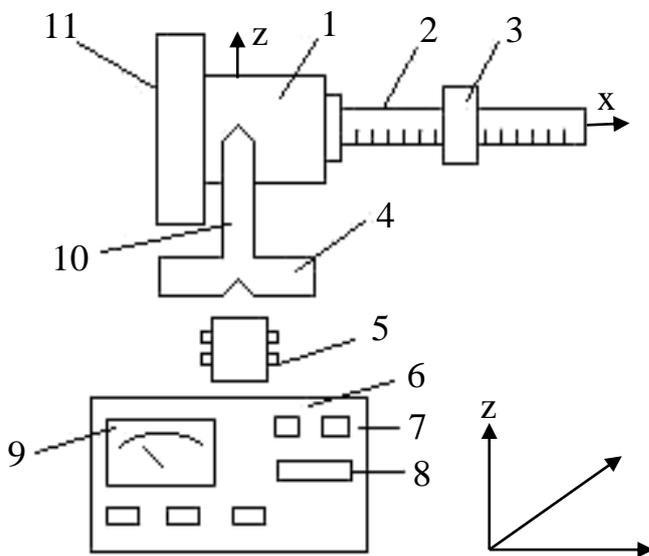


Рис. 2.33. Навчальний гіроскоп

Величину кутової швидкості обертання ротора визначають за стрілковим індикатором (9). Кут  $\phi$  повороту осі ротора навколо вертикальної осі  $z$  і відповідний час повороту на цей кут визначають за цифровими індикаторами (7) і (8). Вимірювання проводять автоматично, користуючись фотоелектричними датчиками. Ручка (6) становить регулятор швидкості. Повертаючи її за годинниковою стрілкою, вмикають напругу живлення електродвигуна. Тією самою ручкою повільно регулюють швидкість обертання ротора електродвигуна.

#### Порядок виконання експерименту

1. За вимкненої установки, переміщуючи тягар (3), урівноважити гіроскоп. Дані про рівноважне положення тягара на важелі ( $l_0$ ) занести до таблиці. Увімкнути прилад і регулятором (6) встановити певну швидкість обертання  $\omega$  ротора гіромотора.

2. Притримуючи важіль (2), змістити тягар (3) від рівноважного положення  $l_0$  і занести в таблицю дані про нове положення ( $l$ ).

3. Виміряти кут повороту  $\Delta\phi$  осі гіроскопа і час обертання  $\Delta t$  для даної швидкості обертання ротора і положення  $l$  тягара (3). Визначити кутову швидкість прецесії  $\Omega$  за формулою  $\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$  (5 разів).

4. Змінити положення  $l$  тягара (3) 4–5 разів і повторити вимірювання згідно з п.3.

5. Визначити момент інерції ротора гіроскопа  $I$ , скориставшись формулою  $I = \frac{P(l-l_0)}{\omega\Omega} b$ .

6. Побудувати графік залежності кутової швидкості прецесії  $\Omega$  від моменту сили  $M=P(l-l_0)$ , де  $P$  – вага тягаря.

## 3 Коливання і хвилі

### 3.1 Теоретичні відомості

#### 3.1.1 Гармонічний коливальний рух

Коливаннями називають процеси, за яких будь-яка фізична величина через однакові послідовні проміжки часу багаторазово набуває тих самих значень.

Залежно від фізичної природи процесу розрізняють механічні, електромагнітні, електромеханічні й інші коливання.

Механічні коливання – це чергові періодичні рухи механічної системи у двох протилежних напрямках. Механічну систему, що перебуває у стані коливального руху, називають осцилятором.

Залежно від характеру впливу на коливальну систему розрізняють автоколивання, вільні (або власні), вимушені та параметричні коливання.

Вільними, або власними, називають коливання, що відбуваються в системі, наданій самій собі після того, як вона зазнала поштовху або була виведена зі стану рівноваги. Механічна система може здійснювати власні коливання, якщо під час виведення зі стану рівноваги виникають сили, що повертають її до попереднього стану.

*Коливальним* називається рух, у якому матеріальна точка або система точок, багаторазово відхиляючись від свого положення рівноваги, щоразу знову повертається до нього. Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла точно повторюються через однакові проміжки часу, називають *періодичним* (рух маятника годинника, ніжки камертону, натягнутої струни).

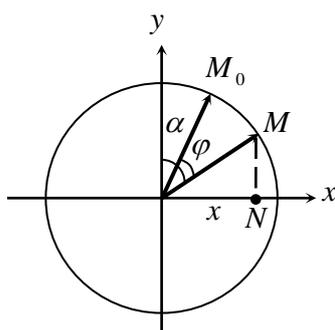


Рис. 3.1. Рух точки по колу

Мінімальний проміжок часу, через який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом*. Серед різних коливальних рухів важливе значення мають *гармонічні* коливальні рухи. *Гармонічним* називають коливальний рух, у якому зміщення матеріальної точки від положення рівноваги змінюється за рівнянням  $\sin$  або  $\cos$ . Відстань  $x$  від положення рівноваги для точки, що перебуває в коливальному русі, називається *зміщенням*. Найбільше значення зміщення точки в коливальному русі називають *амплітудою* ( $A$ ). Тоді *період коливання* ( $T$ ) точки N, наприклад, при рухові проекції точки, яка рівномірно рухається по колу (рис.3.1), дорівнює  $T=2\pi/\omega$ . При цьому

$$x=R \sin (\omega t+\alpha), \quad (3.1)$$

де  $R=A$ ;  $\omega$  – циклічна або колова частота гармонічного коливання. Кількість коливань за 1 с називають частотою коливань і визначають за рівнянням  $\nu = \frac{1}{T}$ .

Тому  $\omega = 2\pi\nu$ . Добуток  $\omega t$  із рівняння (44) називають фазою,  $\alpha$  – початкова фаза, тобто фаза в момент часу  $t=0$ . Швидкість точки в гармонічному коливанні знайдемо як

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \text{ або } v = \omega A \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.2)$$

Прискорення точки

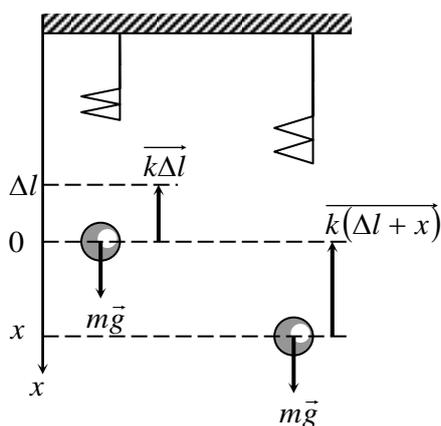
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad , \quad \text{інакше} \quad a = -\omega^2 x = \omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \alpha + \pi) \quad . \quad (3.3)$$

Знаючи прискорення руху і масу точки, за другим законом механіки знаходимо силу:  $F = -m\omega^2 x$ . Видно, що ця сила пропорційна зміщенню і напрямлена до положення рівноваги, тому її називають *повертаючою силою*. У законі Гука також є повертаюча сила, яка вираховується за формулою  $F = -kx$ , тобто  $k = m\omega^2$ .

Тоді для коливального руху тягарця на пружині  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , а  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Для кульки на пружині в положенні рівноваги в точці О (рис.3.2) сила тяжіння врівноважується силою пружності  $mg = k\Delta l$ , якщо кульку вивести з положення рівноваги (рис.3.2), то рівняння динаміки для кульки матиме такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x).$$

Але оскільки  $mg = k\Delta l$ , то



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \text{ або } \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (3.4)$$

Легко перевірити підстановкою, що розв'язок цього рівняння виражає гармонічне коливання:

$$x = A \sin \left( t \times \sqrt{\frac{k}{m}} + \alpha \right)$$

(3.5)

з циклічною частотою  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  і періодом коли-

**Рис. 3.2. Пружинний маятник**

вань  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . У цих виразах  $k$  - коефіцієнт жорст-

кості пружини. Систему, яка описується рівнянням (3.4), називають гармонічним осцилятором. Прикладами гармонічного осцилятора є: коливання кульки на пружині, математичний і фізичний маятники і т.д. У процесі вивчення коливань проводять експериментальну перевірку виразу

для визначення періоду коливань маятника. Маятником називають будь-яке тіло, підвішене так, що його центр маси розташований нижче точки підвішування. Слід розрізняти математичний і фізичний маятники.

### 3.1.2 Математичний маятник

Тіло, розмірами якого можна знехтувати, підвішене до невагомої та нерозтяжної нитки, що коливається під дією сили ваги, називають математичним маятником (рис. 3.3).

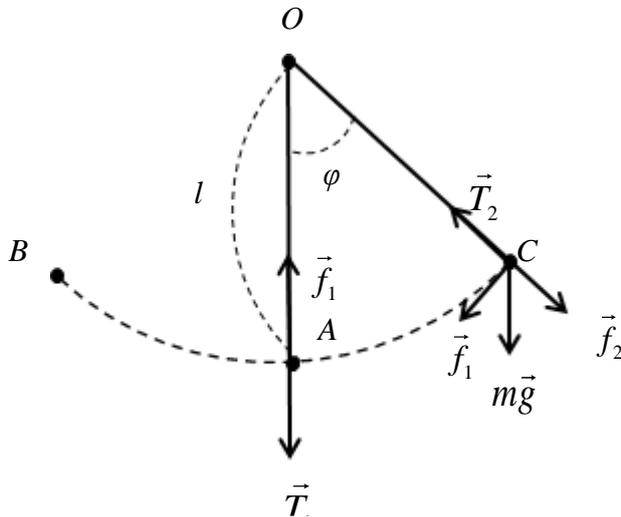


Рис. 3.3. Математичний маятник

У вертикальному положенні силу тяжіння  $m\vec{g}$  цілком урівноважує сила натягу нитки  $\vec{T}_1$ , і маятник все ще перебуває у стані спокою (положення рівноваги – точка А). Якщо відхилити маятник від положення рівноваги до точки С на деякий кут  $\varphi$ , то складову сили тяжіння, спрямовану вздовж нитки, тобто силу  $f_2 = mg\cos\varphi$ , урівноважить сила натягу нитки  $\vec{T}_2$ . Інша ж

складова, тобто сила  $f_1 = -mg\sin\varphi$ , перпендикулярна до нитки, змусить маятник повернутися в положення рівноваги. Отже ця складова становить поворотальну силу.

Довжину дуги  $x = AC$ , на яку маятник відхилився від положення рівноваги, називають зміщенням. Якщо зміщення від А до С вважати додатним, а від А до В – від’ємним, то сила  $f_1$  завжди буде спрямована протилежно зміщенню і за малих кутів відхилення ( $2 - 4^\circ$ ) пропорційна йому.

У разі відхилення маятника на кут  $\varphi$  на матеріальну точку діє обертальний момент

$$M = f_1 l = -mgl \sin \varphi, \quad (3.6)$$

де  $l$  – плече сили  $f_1$ . Маятник рухатиметься колом відносно точки підвішування О. З рівняння обертального руху отримаємо вираз

$$M = I\varepsilon = ml^2 \ddot{\varphi}, \quad (3.7)$$

де  $I = ml^2$  – момент інерції матеріальної точки;  $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  – кутове прискорення матеріальної точки. Порівнявши формули (3.6) і (3.7), отримуємо рівняння

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (3.8)$$

(для малих кутів  $\sin \varphi \approx \varphi$ , якщо  $\varphi$  вимірювати в радіанах і  $\varphi \ll 1$ ).

Розв’язком цього рівняння буде будь-яка функція часу  $\varphi(t)$ , яку можна записати у вигляді

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.9)$$

де  $A = \varphi_{\text{макс}}$  – амплітуда коливань;  $\varphi$  – початковий кут;  $\omega_0$  – циклічна (колова) частота коливань.

Підставимо отриману функцію  $\varphi(t)$  у рівняння (3.8) і доведемо, що вона становить його розв'язок. Двічі продиференціювавши функцію  $\varphi(t)$  за часом, отримаємо вираз

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Підставимо його у рівняння (3.3). Тоді

$$-\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{g}{l} A \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \quad \text{або}$$

$$\left( \frac{g}{l} - \omega_0^2 \right) A \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0.$$

Це співвідношення виконується в будь-який момент часу за умови

$$\frac{g}{l} - \omega_0^2 = 0. \quad \text{Отже, } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.10)$$

Період коливань математичного маятника дорівнюватиме

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Фізичний маятник

Фізичним маятником називають довільне тверде тіло, яке не можна вважати матеріальною точкою, здатне коливатися під дією сили тяжіння навколо нерухомої осі, що не проходить через його центр мас.

У разі поштовху маятника (тіла) або відведення вбік він здійснюватиме коливання навколо положення рівноваги. Час, за який здійснюється повне коливання, називають періодом коливання ( $T$ ).

На рис. 3.4 схематично зображено фізичний маятник. Точка  $O$  – точка підвісу, точка  $C$  – центр мас маятника. Положення маятника в кожен момент часу можна охарактеризувати кутом відхилення  $\varphi$ . У разі відхилення маятника на кут  $\varphi$  складову сили тяжіння – силу  $\vec{f}_2$  – урівноважує реакція осі  $O$ . Складова  $\vec{f}_1$  змушує маятник повернутися до положення рівноваги.

Для малих кутів

$$\vec{f}_1 = -mg \sin \varphi \approx -mg \varphi. \quad (3.12)$$

Знак «мінус» означає, що сила  $\vec{f}_1$  направлена у напрямку, протилежному тому, у якому відраховують додатні кути  $\varphi$ .

Обертальний момент  $M$ , створений силою  $\vec{f}_1$ , чисельно дорівнює

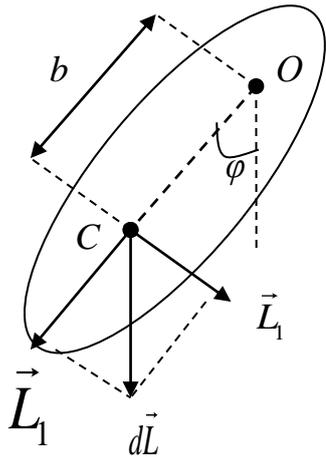


Рис. 3.4. Фізичний маятник

$$M_1 = f_1 b = -mg\varphi b, \quad (3.13)$$

де  $b = OC$  – плече сили  $\vec{f}_1$ ;  $m$  – маса маятника.

За законом обертального руху

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\phi}{dt^2}, \quad (3.14)$$

де  $I$  – момент інерції маятника відносно точки  $O$ ;  $\varepsilon = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \ddot{\phi}$  – кутове прискорення.

Із формул (3.13) і (3.14) маємо

$$I\ddot{\phi} + mg\varphi b = 0, \quad \ddot{\phi} + \frac{mgb}{I}\phi = 0. \quad (3.15)$$

Цей вираз являє собою динамічне рівняння руху гармонічного осцилятора.

Квадрат циклічної частоти ( $\omega_0$ ) власних коливань дорівнює множнику при  $\phi$ , тобто

$$\omega_0^2 = \frac{mgb}{I}. \quad (3.16)$$

Звідси період  $T$  власних коливань фізичного маятника дорівнюватиме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (3.17)$$

За теоремою Штейнера – Гюйгенса момент інерції  $I = I_C + mb^2$ , де  $I_C$  – момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить через центр мас, розташованої паралельно осі коливань. Тоді вираз для періоду власних коливань матиме вигляд

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + mb^2}{mgb}}. \quad (3.18)$$

У ході визначення  $g$  складно знайти момент інерції  $I_C$ . Труднощів можна уникнути, скориставшись оборотним маятником, оскільки при цьому з розрахункових формул виключимо величину  $I_C$ .

Маятник, що має дві паралельні опорні призми, на які його можна по чергово підвішувати, називають оборотним.

Залежно від призначення оборотний маятник може мати різноманітну форму. Він зазвичай являє собою металевий стрижень із поділками, уздовж якого можна переміщувати і закріплювати в тому чи іншому положенні важкі тягарці й опорні призми. Період коливань маятника можна змінювати, регулюючи положення тягарців.

Зазвичай оборотний маятник має вигляд, представлений на рис. 3.5, де  $n_1$ ,  $n_2$  – опорні призми, а  $D$  і  $E$  – сочевиці. У цьому разі період коливань маятника відносно точок підвісу  $n_1$  і  $n_2$  дорівнюватиме відповідно

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + mb_1^2}{mgb_1}}; T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + mb_2^2}{mgb_2}}. \quad (3.19)$$

Звідси  $T_1^2 gb_1 - T_2^2 gb_2 = 4\pi^2 (b_1^2 - b_2^2)$ . Тоді

$$g = 4\pi^2 \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1 T_1^2 - b_2 T_2^2} = 4\pi^2 L \left( \frac{b_1 - b_2}{b_1 T_1^2 - b_2 T_2^2} \right), \quad (3.20)$$

де  $L = b_1 + b_2$  – відстань між опорними призмами.

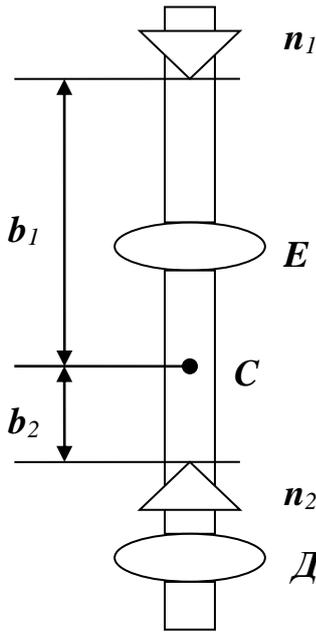


Рис. 3.5. Оборотний маятник

### 3.1.4 Енергія коливального руху

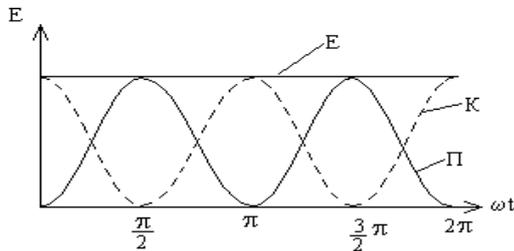
Щоб надати матеріальній точці коливального руху, треба вивести її з положення рівноваги. Для цього виконують певну роботу проти повертаючої сили. Ця робота буде мірою потенціальної енергії наданої точці ззовні:

$$\Pi = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.21)$$

Після припинення дії зовнішньої сили точка повертатиметься до положення рівноваги, у міру зменшення зміщення, потенціальна енергія перетворюється в кінетичну енергію. Оскільки зміщення точки  $x = A \sin \omega \cdot t$ , а коефіцієнт квазіпружної сили  $k = m\omega^2$ , то

$$\Pi = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega \cdot t}{2}, \quad (3.22)$$

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega \cdot t. \quad (3.23)$$



$\Pi \rightarrow \max$ , а  $T=0$ , в положенні рівноваги  $T \rightarrow \max$ ,  $\Pi=0$ . А повна енергійна повна енергійна повна енергійна

Тоді повна енергія

$$E = \Pi + T = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (3.24)$$

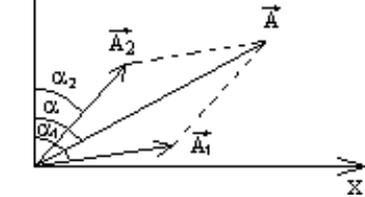
Тобто у положеннях крайнього зміщення

Рис. 3.6. Залежності від часу Е,  $\Pi$  та Т

рівновагі у коливаннях. Графічно зміна  $\Pi$ ,  $T$ ,  $E$  із часом представлена на рис.3.6.

### 3.1.5 Додавання коливань однакового напрямку. Биття

Можливі випадки, коли тіло перебуває одночасно в кількох коливаннях, наприклад, в двох гармонічних коливаннях однакової частоти і однакового напрямку, заданих рівняннями:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega \cdot t + \alpha_1) \quad x_2 = A_2 \sin(\omega \cdot t + \alpha_2)$$


Геометричне відображення цих коливань має вигляд як на рис.3.6. Тоді додавання заданих коливань зводиться до знаходження суми проєкцій векторів амплітуд  $A_1$  і  $A_2$  (рис.3.7)

**Рис. 3.7. Векторна діаграма додавання коливань**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.25)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (3.26)$$

З виразу (3.25) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ , то  $A = A_1 + A_2$ , якщо  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$ , то  $A = |A_1 - A_2|$ , тобто коли коливання перебувають у протилежних фазах.

Коли додають гармонічні коливання з різними частотами, вектори амплітуд  $A_1$  і  $A_2$  обертаються з різними кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , тому результуючий вектор  $A$  за величиною змінюється у вигляді пульсацій, кутлова швидкість  $A$  теж змінюється.

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами. Для спрощення припустимо, що  $A_1 = A_2 = A_3$ , а початкові фази дорівнюють нулю. Тоді рівняння складових коливань мають вигляд:

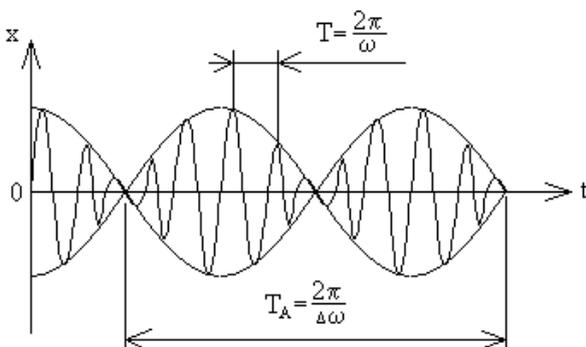
$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \quad (3.27)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t. \quad (3.28)$$

Якщо додати ці два вирази і застосувати формулу суми синусів, дістанемо:  $x = 2A \left( \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \left( \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$ . Порівнявши цей вираз з рівнянням гармонічного коливання можна дійти висновку, що результуюче коливання відбувається з частотою, яка дорівнює  $\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , але його амплітуда

$$x = 2A \left( \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right),$$

і амплітуда в свою чергу змінюється з частотою пульсацій  $\omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ . Таке результуюче коливання називають



**биттям.** Графік биття має вигляд, як на рис.3.8.

Частота пульсацій амплітуди  $\Delta\omega_0$  значно менша, ніж частота коливання точки  $\omega$ .

**Рис. 3.8. Биття**

### 3.1.6 додавання взаємно перпендикулярних коливань

Припустимо, що гармонічні коливання з однаковою частотою відбуваються в напрямі координатних осей  $x$  і  $y$ . Якщо початкова фаза першого коливання дорівнює 0, то:

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad (3.29)$$

$$y = A_2 \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (3.30)$$

де  $\alpha$  різниця фаз цих коливань. Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Із (3.29)  $\sin \omega t = \frac{x}{A_1}$ , звідси  $\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$ . Розгорнувши в (3.30) синус суми, дістанемо

$$(\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha).$$

$$y = A_2 [\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \omega t] = \frac{A_2 x}{A_1} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \alpha, \quad (3.31)$$

або:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \alpha \rightarrow \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (3.32)$$

Це рівняння кривої другого порядку в загальному вигляді:

$$a_{11}x^2 + 2a_{22}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (3.33)$$

де  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ):  $a_{11} = \frac{1}{A_1^2}$ ;  $a_{22} = \frac{1}{A_2^2}$ ;  $a_{12} = -\frac{\cos \alpha}{A_1 A_2}$ ;  $a_{33} = -\sin^2 \alpha$ ;  $a_{13} = a_{23} = 0$ .

Це рівняння має три величини, які інваріантні відносно переноса і поворота осей координат:  $I = a_{11} + a_{22}$ ,  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  та

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^{-2} & -\frac{\cos \alpha}{A_1 A_2} & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{A_1 A_2} & A_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2 \alpha \end{vmatrix}.$$

Інваріант  $A$  називають дискримінантом рівняння (3.31).

$$A = -\sin^2 \alpha \frac{1}{A_1^2 A_2^2} - \left( -\frac{\cos^2 \alpha}{A_1^2 A_2^2} \right) \cdot \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \left( \frac{\cos^2 \alpha}{A_1^2 A_2^2} - \frac{1}{A_1^2 A_2^2} \right). \text{ Якщо } A < 0, \text{ а } D > 0,$$

то таке рівняння – це рівняння еліпса.  $D = \frac{\cos^2 \alpha}{A_1^2 A_2^2} - \frac{1}{A_1^2 A_2^2}$ .

Характеристики еліпса істотно залежать від різниці фаз  $\alpha$ :

а) коли  $\alpha=0$ , то рівняння (3.30) перетворюється на рівняння прямої  $y = \frac{A_2}{A_1} x$ , тобто результуючий рух точки відбувається по прямій, що проходить

через початок координат, а зміщення точки можна знайти як:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{A_2^2}{A_1^2} x^2} = \frac{x^1}{A_1} \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \sin \omega t. \text{ Отже точка перебуває в гармо-}$$

нічному коливанні з частотою  $\omega$  і амплітудою  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

б) коли  $\alpha=\pm\pi$ , то результуючим рухом буде гармонічне коливання точки по прямій  $y = -\frac{A_2}{A_1} x$

в) коли  $\alpha=\pm\pi/2$ , то рівняння(3.30) матиме вигляд:  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ , тобто точка

рухається по еліпсу, зведеному до координатних осей, а якщо  $A_1=A_2$ , то еліпс вироджується в коло.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань різні, то залежно від їх співвідношення результуючий рух точки відбуватиметься по складних траєкторіях, які називаються фігурами Ліссажу (рис.3.9).

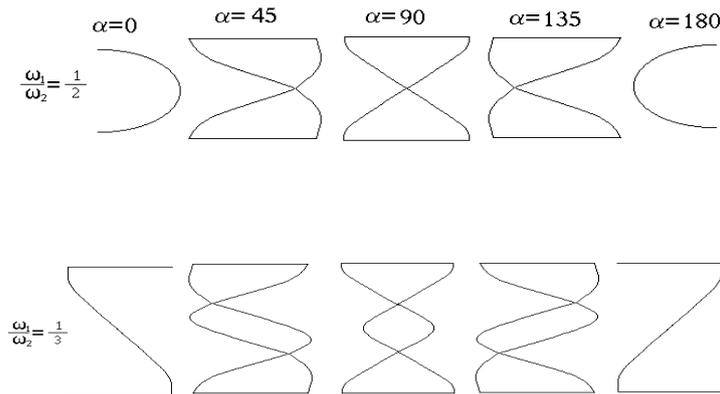


Рис. 3.9. Фігури Ліссажу

### 3.1.7 Згасання коливань. Декремент згасання. Автоколивання

Найпростішим видом коливального руху є гармонічні, або синусоїдальні, коливання. Вони виникають у разі, якщо на тіло, виведене з положення рівноваги, безперервно діє сила, завжди спрямована до положення рівноваги. За ве-

личиною ця сила пропорційна зміщенню тіла. Із другого закону Ньютона випливає, що

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS, \quad (3.34)$$

де  $m$  – маса коливного тіла ;  $\frac{d^2 S}{dt^2}$  – прискорення тіла;  $S$  – зміщення тіла;  $k$  – деякий постійний коефіцієнт.

Якщо коливання відбуваються за наявності сил опору, то енергія системи частково витрачається на їх подолання, у результаті чого амплітуда коливань поступово зменшується, тобто виникають коливання, що згасають. Отже, вони відбуваються за одночасної дії двох сил: сили, пропорційної зміщенню коливного тіла, і сили опору. Останню зазвичай вважають пропорційною швидкості руху тіла, тобто значенню похідної  $\frac{dS}{dt}$ . Звідси випливає, що диференціальне рівняння коливань, що згасають, можна записати у вигляді виразу  $m \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = -k \cdot S - n \cdot \frac{dS}{dt}$ , де  $n$  – другий постійний коефіцієнт. Це рівняння зазвичай записують у вигляді

$$m \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} + n \cdot \frac{dS}{dt} + kS = 0. \quad (3.35)$$

Поділимо рівняння на  $m$  і введемо позначення

$$\frac{n}{m} = 2\delta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0.$$

Розв'язком отриманого рівняння буде функція

$$S = a \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \phi_0).$$

У цьому виразі роль амплітуди відіграє добуток  $a \cdot e^{-\delta t}$ , тож амплітуда коливань поступово спадає, а коливання згасають.

Циклічна частота  $\omega$  пов'язана з коефіцієнтом диференціального рівняння  $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ . Тому умовний період коливань  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$  залежить від коефіцієнта згасання  $\delta$ .

За умови, що початкова фаза коливань  $\phi_0$  дорівнюватиме нулю, отримаємо простіше розв'язання рівняння (3.35):

$$S = a \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t. \quad (3.36)$$

Обчислимо амплітуди  $a_1, a_2, a_3, \dots$  за рівнянням (3.36) для відповідних моментів часу  $t_1 = \frac{1}{4} \cdot T, t_2 = \frac{3}{4} \cdot T, t_3 = \frac{5}{4} \cdot T$ . Взявши співвідношення двох послідовних амплітуд одного знака, отримаємо ряд рівностей:

$$\frac{a_1}{a_3} = e^{\delta T}; \quad \frac{a_2}{a_4} = e^{\delta T}; \quad \frac{a_3}{a_5} = e^{\delta T}; \quad \dots \quad \frac{a_n}{a_{n+2}} = e^{\delta T}.$$

Звідси випливає, що відношення двох послідовних амплітуд одного знака є постійна величина, названа декрементом  $D$  згасання:

$$D = \frac{a_n}{a_{n+2}} = e^{\delta T}. \quad (3.37)$$

Чим більший декремент згасання, тим швидше спадають амплітуди коливань. Часто коливання характеризують натуральним логарифмом декременту згасання  $\theta$ , який дорівнює

$$\theta = \ln \frac{a_n}{a_{n+2}} = \delta T. \quad (3.38)$$

Для коливань, що не згасають, декремент згасання дорівнює одиниці, а логарифмічний декремент – нулю. Отже, для визначення декременту згасання слід виміряти амплітуди ряду послідовних коливань. Відношення двох послідовних амплітуд одного знаку визначає декремент згасання коливань, а натуральний логарифм цього відношення – їх логарифмічний декремент.

Щоб коливання не затухали, до системи треба підводити енергію ззовні додатковими зовнішніми поштовхами в такт коливанням. Такі коливання, в яких сама система в потрібний час зумовлює поштовх називають *автоколиваннями*.

### 3.1.8 Вимушені коливання. Резонанс

Всякі вільні коливання є затухаючими. Незатухаючі коливання виникають під дією зовнішньої періодично змінної сили  $F = F_o \sin \omega_1 t$ , яку називають змушувальною, а коливання під її дією називають вимушеними.

Рівняння вимушених коливань має вигляд:  $m \frac{dx^2}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_o \sin \omega_1 t$ ,  
 або ввівши позначення  $\frac{k}{m} = \omega_o^2$  ;  $\frac{r}{m} = 2\beta$   $f_o = \frac{F_o}{m}$  , маємо

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega_o^2 x + 2\beta \frac{dx}{dt} = f_o \sin \omega_1 t.$$

Рішення цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Перша частина – це розв'язок затухаючого коливання, який через деякий проміжок часу дорівнює 0. Розв'язок затухаючого рівняння має вигляд:  $y = A \sin(\omega_1 \cdot t + \alpha)$ , де

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}}, \quad (3.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta \omega_1}{\omega_o^2 - \omega_1^2} \quad (3.40)$$

Проаналізуємо ці рівняння. Амплітуда вимушених коливань залежить не тільки від амплітудного значення змушувальної сили  $f_o$ , а й від її частоти ко-

ливання. При певній частоті змущувальної сили  $f_0$   $\omega_{рез}$  амплітуда вимушених коливань різко зростає і настає явище резонансу  $\omega_{рез}$  можна визначити з умови max амплітуди:  $\frac{dA}{d\omega} = 0$  або min підкореневого виразу в рівнянні (3.39):

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.41)$$

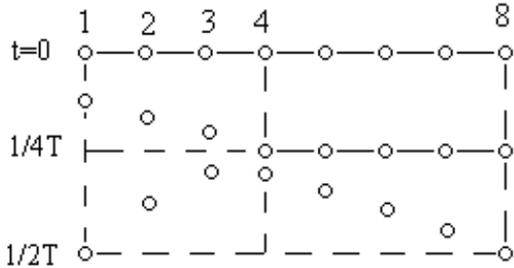
тоді

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \quad (3.42)$$

З виразів (3.41-3.42) бачимо, що коли опір середовища малий, тобто  $\omega_0^2 \gg 2\beta^2$ , то  $\omega_0 = \omega_{рез}$  і в цьому випадку  $A_{рез} \rightarrow \infty$ , тобто стає дуже великою.

### 3.1.9 Хвилі. Рівняння хвилі

Якщо в будь-якому середовищі зовнішні коливання збуджують коливання частинок в одному місці, то внаслідок взаємодій між частинками, коливання передаватимуться *хвильовим процесом*. Напрямок *поширення* хвилі називають



*променем*. *Поперечними* називають хвилі, в яких частинки коливаються в напрямі, перпендикулярному до променя *хвилі*. *Поздовжніми* називають хвилі, в яких частинки коливаються в *напрямі* променя хвилі.

Розглянемо процес утворення хвиль. Точка, рух якої починається пізніше на

Рис. 3.10. Утворення хвилі

$\Delta t = T$ , від однако-

руху першої точки, перебуває в

тій фазі з точкою 1. А відстань між найближчими точками в напрямі поширення хвилі, які коливаються в однакових фазах називається *довжиною хвилі*  $\lambda$  і  $\lambda = vT$ . У цій формулі  $v$  - називають *фазовою швидкістю*. Геометричне місце точок, до яких дійшли коливання в деякий момент часу  $t$  - називається *фронтом хвилі*. За формою фронту розрізняють сферичні, плоскі та інші хвилі. Геометричне місце точок, що коливаються в однаковій фазі, називається *хвильовою поверхнею*. За принципом Гюйгенса всі точки фронту хвилі в даний момент часу можна розглядати як *самостійні джерела хвиль*. Рівнянням хвилі називають вираз, який визначає зміщення будь-якої точки, збудженої хвилею, як функції від *часу* і *відстані* від початкової точки (або джерела). Якщо зміщення точок, що лежать у початковій площині ( $z=0$ ) визначається рівнянням  $\xi = A \sin \omega t$ , то щоб визначити зміщення у площині на відстані  $Z$ , треба щоб пройшов час  $\tau = \frac{z}{v}$ , тобто точки на відстані  $z$  були приведені в коливання пізніше, тоді змі-

щення точок у такій площині:  $\xi = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = \text{або} = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$ . Це

рівняння *плоскої хвилі*. Щодо сферичної хвилі, яка утворюється в суцільному однорідному середовищі від точкових джерел, енергія сферичної хвилі розрахована на одиницю поверхні буде обернено пропорційна квадрату радіуса хвилі (або відстані поверхні хвилі). А енергія частинки пропорційна квадрату амплітуди зміщення. Тому амплітуда точок сферичної хвилі зменшується обернено пропорційно радіусу *сферичної хвилі*. Тоді рівняння сферичної хвилі має вигляд:

$$\xi = \frac{A}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{V} \right) \quad (3.43)$$

Диференціюванням рівняння плоскої хвилі на змінних  $t$  і  $z$  можна дістати відображення в диференціальній формі, яка знадобиться при вивченні електромагнітних хвиль  $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{z}{V} \right)$ ,  $\frac{d^2 \xi}{dz^2} = -A \frac{\omega^2}{V^2} \sin \omega \left( t - \frac{z}{V} \right)$  тому

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = V^2 \frac{d^2 \xi}{dz^2} \quad (3.44)$$

Це і є *хвильове рівняння* (тобто друга похідна від зміщення по часу пропорційна другий похідній від зміщення по координаті; а квадрат швидкості хвилі є коефіцієнт пропорційності).

### 3.1.10 Енергія хвилі. Вектор Умова

Виділимо в середовищі, де поширюється плоска поздовжня хвиля, такий елементарний об'єм  $\Delta V$  (лінійні розміри якого значно менші від довжини хвилі), щоб швидкість руху й деформації в усіх точках цього об'єму можна було вважати незмінними, і які відповідно дорівнюють  $\frac{d\xi}{dt}$  та  $\frac{d\xi}{dz}$ . Виділеному об'єму притаманні певні кінетична і потенціальна енергії, Знайдемо їх:  $\Delta E_k = \frac{m}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2$ ,  $\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \left[ \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right] \Delta V$ , де  $\rho$  - густина середовища.

Потенціальна енергія пружної деформації виділеного об'єму середовища дорівнюватиме  $\Delta U = \frac{E \xi^2}{2} \Delta V$ , де  $\varepsilon = \frac{d\xi}{dz}$  – відносна деформація хвилі:  $E$ - модуль Юнга. Якщо замість  $E$  підставити  $\rho V^2$ , дістанемо  $\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \left[ \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right] \cdot \frac{V^2}{V^2} \cdot \Delta V$ . Тобто зміна потенціальної енергії аналогічна зміні кінетичної енергії. Повна енергія:  $\Delta E = \Delta E_k + \Delta U = \rho A^2 \omega^2 \left[ \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right] \Delta V$ . Оскільки середнє значення  $\cos^2$  дорівнює  $1/2$ , то середнє в часі значення густини енергії в кожній точці хвилі дорівнює:

$$W_{cp} = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (3.45)$$

Кількість енергії, яку переносить хвиля (т.е при поширенні хвилі середовище дістає додаткову енергію, яку приносить хвиля від джерела) через деяку поверхню  $S$  за час  $t$  називають *потокм енергії*  $\Phi$  через цю поверхню. Кількість енергії, що переноситься хвилею через поверхню  $1m^2$ , орієнтовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі за  $1s$  називають *густиною потоку енергії* ( $j$ ). За фізичним змістом:

$$\vec{j} = W_{cp} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{V}, \quad (3.46)$$

де  $\vec{V}$  - вектор фазової швидкості хвилі. Вектор  $\vec{j}$  називають *вектором Умова*.

### 3.1.11 Інтерференція хвиль

У середовищі одночасні можуть поширюватися кілька хвиль. Явище додавання хвиль у середовищі називається *інтерференцією*. По принципу *суперпозиції* для визначення результуючого зміщення частинки в області перекриття хвиль треба знати зміщення її у кожній хвилі окремо, а потім шукати їх геометричну суму. Випадок додавання хвиль від двох джерел з однаковими періодами і напрямками коливань, коли фази їх однакові, або коли різниця їх фаз залишається незмінною, має особу важливе значення. Такі джерела називають *когерентними*. Результуючий рух точки, яка бере участь у коливанні

$\xi_1 = A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right)$  і  $\xi_2 = A_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$  буде дорівнювати алгебраїчній сумі

зміщення  $\xi_1$  і  $\xi_2$  ( $r_1$  і  $r_2$  відстань розглядуваної точки від джерел хвиль) і

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \text{де} \quad \alpha_1 = -2\pi \frac{r_1}{\lambda};$$

$$\alpha_2 = -2\pi \frac{r_2}{\lambda}; \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}, \quad r_2 - r_1 \text{ - різниця ходів хвиль від джерел до}$$

розглядуваної точки.

З цих рівнянь

а)  $\max A$  (результуючого коливання) буде коли  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$  де

$$k=0,1,2,3,\dots, \text{ або коли } |r_2 - r_1| = k\lambda$$

б)  $\min A$  буде коли  $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2k+1)\pi$  або  $|r_2 - r_1| = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

в) точки з різницею ходів між  $k\lambda$  і  $(2k+1) \frac{\lambda}{2}$  коливаються з деякими середнім значеннями амплітуд.

У результаті додавання двох зустрічних плоских хвиль однакового  $T$ , з однаковими  $A$  і напрямками зміщень точок (фазою) утворюються так звані стоячі хвилі.

Рівняння стоячої хвилі має вигляд:

$$\xi = (2A \sin \frac{2\pi z}{\lambda}) \cos \omega t . \quad (3.47)$$

Множник  $\rho = 2A \sin \frac{2\pi z}{\lambda}$  є виразом амплітуди коливання точок у стоячій хвилі, множник  $\sin \omega t$  показує, що точки в стоячій хвилі коливаються з тією самою частотою, що й у зустрічних хвилях. Точки, які коливаються з найбільшими амплітудами називаються *пучностями*, а точки з  $A=0$  називаються *вузлами* стоячої хвилі. На межі відбиття від середовища з меншою густиною порівняно з тим, в якому хвиля поширюється, буде пучність. А якщо хвиля відбивається від середовища з більшою густиною, то на межі відбиття буде вузол. Пружні коливання з частотами від 16 до 20000 Гц називають *звуковими*, пружні коливання з частотою нижчою від 15 Гц називають *інфразвуком*, а понад 20000 Гц – *ультразвуком*. Звук характеризується *частотою, швидкістю поширення, інтенсивністю*. Розмову про них ми вже вели.

Інфразвукі використовують для прогнозу штормів у морі, ультразвуки – для локації, у детекторах, для утворення стійких емульсій незмішуючих рідин і т.п.

### 3.2. Перелік контрольних питань

1. Рівняння руху гармонічного осцилятора. Власна частота математичного, пружного і фізичного маятників.
2. Закон руху гармонічного осцилятора. Опис коливального руху за допомогою векторної діаграми. Швидкість, прискорення й енергія гармонічного осцилятора.
3. Вільні коливання, що затухають. Рівняння руху та закон руху осцилятора, що затухає. Коефіцієнт затухання та логарифмічний декремент затухання. Властивості логарифмічного декременту затухання. Автоколивання.
4. Вимушені коливання. Рівняння руху та закон руху осцилятора під дією періодичної зовнішньої сили. Амплітуда і фаза вимушених коливань. Резонанс. Добротність. Ширина резонансної кривої.
5. Додавання коливань однакового напрямку. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.
6. Хвильовий рух. Рівняння руху плоскої хвилі.
7. Енергія хвилі. Вектор Умова.
8. Інтерференція хвиль. Рівняння стоячої хвилі.

### 3.3. Лабораторні роботи

#### 3.3.1 Лабораторна робота 12. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника

У даній роботі математичний маятник виконано у вигляді свинцевої кульки, підвішеної біфілярно на капроновій нитці, довжину якої змінюють намотуванням її на барабанчик, закріплений на кронштейні.

Знаючи період коливань і довжину маятника, визначимо  $g$ . Щоб уникнути похибки під час визначення довжини математичного маятника (відстані центра ваги до точки підвісу), виміряємо періоди коливань для двох різних довжин.

Тоді, скориставшись рівнянням (3.11), отримаємо  $T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l_1}{g}$ ,  $T_2^2 = 4\pi^2 \frac{l_2}{g}$ .

Після перетворення отримаємо вираз

$$g = \frac{4\pi^2(l_2 - l_1)}{(T_2^2 - T_1^2)}. \quad (3.48)$$

#### Порядок виконання експерименту

1. Дослідити залежність періоду коливань  $T$  від довжини нитки підвісу  $l$ . Для цього виміряти період коливань математичного маятника для чотирьох – п'яти довжин підвісу в межах від  $l_{\min}$  до  $l_{\max}$ . Амплітуда  $\varphi$  коливань має бути малою.

2. Побудувати графік залежності  $T^2$  від величини  $l$  в осях координат  $x = l$ ,  $y = T^2$ . Переконайтеся, що експериментально підтверджується лінійна залежність  $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l$  між квадратом періоду коливань  $T^2$  і довжиною  $l$  підвісу.

3. Визначити прискорення вільного падіння  $g$ . Для цього відхиливши кульку від положення рівноваги на  $2 - 3^\circ$ , привести його в коливальний рух і виміряти тричі час 50 коливань для довжин  $l_1$  і  $l_2$ . Обчислити  $g$  за формулою (3.48).

#### 3.3.2 Лабораторна робота 13. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника

У даній роботі використано оборотний маятник, рухомі сочевиці якого закріпимо на стрижні в несиметричних положеннях (рис. 3.4): сочевицю Д – біля кінця стрижня, а сочевицю Е – біля його середини. У цьому разі центр мас маятника буде розташований між сочевицями та не збігатиметься з серединою стрижня. Опорні призми встановимо з різних боків від центра мас. Одну з них закріпимо якомога далі (відстань  $b_1$ ) від нього, тобто біля кінця стрижня для якнайдалшого виходу за межі мінімальних значень періоду коливань. Другу опорну призму встановимо з іншого боку біля точки С. Опорні призми міцно закріпимо. Положення сочевиці Е також зафіксуємо. Другу сочевицю Д можна переміщувати вздовж стрижня.

Маятник підвісимо на кронштейні на одну з опорних призм. Під час відхилення з положення рівноваги він починає рухатись. Під час проходження маятника через положення рівноваги у фотоелектричній системі виникне електричний імпульс, що запустить систему підрахунку періодів та електронний таймер. Умикнемо блок, натиснувши кнопку «Мережа» («Сеть»), а кнопкою «Скидання» («Сброс») здійснимо обнулення табло електронного блока.

Згодом під час першого перетинання маятником світлового променя система підрахунку запуститься знову. Після натискання кнопки «Стоп» черговий перетин маятником світлового променя зумовить зупинку таймера та системи підрахунку періодів коливань. На табло блока висвітлиться час і кількість періодів коливань.

### Порядок виконання експерименту

1. Зняти маятник із кронштейна й обережно покласти його стрижень на спеціальну підставку, на якій закріплено гостру призму. Пересуваючи маятник відносно ребра призми, досягти рівноваги сил і визначити положення центра мас маятника. За допомогою лінійки визначити відстані  $b_1$  та  $b_2$  від центра мас до опорних призм маятника.

2. Підвісивши маятник на опорну призму  $n_1$ , виміряти час 50 коливань (не менше 5 разів) і визначити період коливань  $T_1$ .

3. Аналогічно обчислити період  $T_2$  відносно осі, що проходить через ребро опорної призми  $n_2$ .

4. Із отриманих даних визначити істинне значення  $g_{\text{іст}}$  за формулою (3.20).

### 3.3.3 Лабораторна робота 14. Визначення декременту згасання пружних коливань

Прилад для спостереження коливань являє собою металевий дріт (рис. 3.11), із закріпленим верхнім кінцем. На його нижньому кінці закріплено диск.

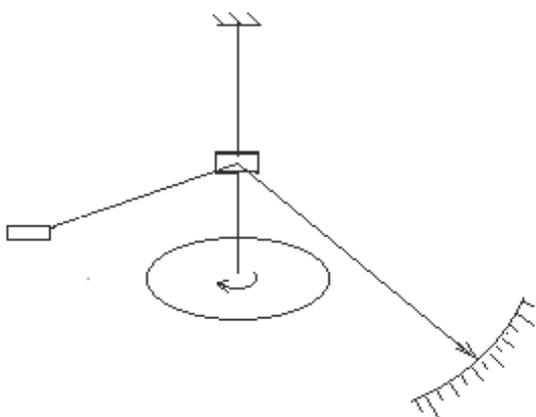


Рис. 3.11. Прилад для визначення декременту коливань, що згасають

Якщо його повернути на деякий кут навколо осі, то дріт закрутиться і в ньому з'являться пружні сили. У результаті цього система здійснюватиме пружні (крутильні) коливання навколо вертикальної осі, що поступово згасатимуть. Спостереження за коливаннями і вимірювання їх амплітуд здійснюватимемо, послуговуючись дзеркалом і шкалою.

### Порядок виконання експерименту

1. Освітливши дзеркальце світильником, установити шкалу так, щоб «зайчик» був розташований посередині шкали, тобто на нулі. Надати диску коливання і виміряти величину послідовних

амплітуд (з одного боку від нуля). Амплітуди пропорційні кількості поділок на шкалі.

2. Одночасно обчислити період коливань системи, вимірявши секундоміром тривалість 10 – 15 коливань. Визначити логарифмічний декремент згасання коливань  $\theta$  та коефіцієнт згасання  $\delta$ .

### 3.3.4 Лабораторна робота 15. Визначення швидкості звуку в повітрі методом додавання взаємно перпендикулярних звукових коливань

Звукові хвилі в газі передбачають послідовні стиснення та розрідження середовища. Довжина звукової хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється хвиля за період коливань  $\lambda = VT$ . Із цього співвідношення випливає, що швидкість звуку в повітрі

$$V = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu, \quad (3.49)$$

де  $\nu$  – частота звукових коливань.

Якщо відома частота звукових коливань і вимірювана довжина хвилі, то за формулою (3.49) обчислимо швидкість поширення звуку. Довжину хвилі вимірюємо, визначивши відстань між двома точками хвилі та різницю фаз між ними.

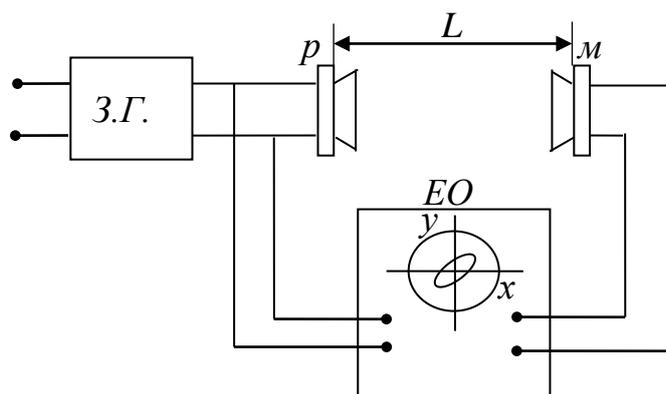


Рис. 3.12. Схема приладу

Швидкість звуку у даній роботі визначимо з різниці фаз коливань звукової частоти, поданих до двох взаємно перпендикулярних пар відхильних пластин електронно-променевої трубки осцилографа (рис. 3.12)

До однієї пари пластин електронного осцилографа подамо синусоїдальну напругу, яку підведемо до електродинамічного репродуктора Р (джерела звуку) від звукового генератора ЗГ.

До іншої пари пластин подамо синусоїдальну напругу, індуковану в мікрофоні М (приймачі звуку), розташованому на відстані  $L$  від репродуктора. Різниця фаз між двома коливаннями, частота яких однакова і дорівнює звуковій частоті, залежить від відстані  $L$ , швидкості звуку  $V$  у середовищі, яке розділяє репродуктор і мікрофон, частоти коливань, а також від граничних умов зсуву (фазового зсуву в репродукторі та мікрофоні). Оскільки до обох пар пластин подаємо гармонічні електричні коливання однакової частоти, відмінні одне від одного лише за фазою, то електронний промінь на екрані осцилографа рухатиметься у двох взаємно перпендикулярних напрямках. У результаті промінь опишеватиме (залежно від різниці фаз і співвідношення амплітуд) найпростіші фігури Ліссажу (еліпс, коло або відрізок прямої).

Подамо до горизонтально відхильних пластин електронного осцилографа ( $X$ ) синусоїдальну напругу. Промінь осцилографа пересуватиметься у горизонтальній площині. Його зміщення  $x$  опишемо формулою

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad (3.50)$$

де  $x_0$  – амплітуда зміщення променя в горизонтальному напрямку;  $\omega$  – циклічна частота. Якщо напруга на вертикально відхильних пластинах відсутня, то електронний промінь рухатиметься вздовж прямої лінії, паралельній осі  $x$ . Подамо тепер подамо до пластини  $y$  напругу тієї самої частоти із зсувом фаз  $\phi$ . Відхилення променя у вертикальній площині опишемо законом

$$y = y_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (3.51)$$

де  $y_0$  – амплітуда вертикальних коливань. У результаті промінь на екрані осцилографа описуватиме еліпс.

Дійсно, виключивши з рівнянь (3.50) і (3.51) час  $t$ , отримаємо рівняння траєкторії променя на екрані осцилографа у вигляді

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \phi = \sin^2 \phi. \quad (3.52)$$

Рівняння (3.52) являє собою рівняння еліпса в декартових координатах. В окремому випадку, коли  $\phi = 2\pi n$ , де  $n=0, 1, 2, 3$ , рівняння набуде вигляду

$$\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} = 0, \quad y = \frac{y_0}{x_0} x, \quad (3.53)$$

тобто еліпс перетвориться на пряму лінію, розташовану в першому та третьому квадрантах. Якщо різниця фаз становитиме  $\phi = (2n+1)\pi$ , де  $n=0, 1, 2, 3$ , то промінь здійснить коливальний рух та опише пряму

$$y = -\frac{y_0}{x_0} x, \quad (3.54)$$

яка проходить через другий і четвертий квадранти.

Зміну форми траєкторії променя осцилографа, який бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, показано на рис. 3.13 для деяких значень різниці фаз  $\Delta\phi$  коливань.

$\Delta\phi$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$\pi$
$\Delta\phi$	$\pi$	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	$2\pi$

Рис. 3.13. Форма траєкторії променя на екрані осцилографа залежно від різниці фаз двох взаємно перпендикулярних коливань

Якщо частота зміщення променя вздовж однієї з осей вдвічі більша, ніж вздовж іншої, то на екрані осцилографа з'явиться стала картина, яка загалом

матиме вигляд замкненої петлі з одним самоперетином – «вісімки». Її форма й орієнтація залежать від співвідношення амплітуд і різниці фаз коливань. В окремому випадку петля може перетворитися на лінію, але криву, а не пряму.

Різниця фаз додаваних коливань виникає у результаті того, що швидкість поширення звукових коливань від репродуктора до мікрофона дуже мала порівняно зі швидкістю поширення електричних коливань уздовж з'єднувальних проводів.

Якщо до горизонтально відхильних пластин осцилографа подати напругу від репродуктора, яка з часом змінюється за законом

$$U_x = U_{0x} \cos \omega t, \quad (3.55)$$

то зміщення електронного променя на екрані осцилографа у результаті його безінерційності з часом зміниться за тим самим законом

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (3.56)$$

Напруга, індукована в мікрофоні, також поступово змінюватиметься за цим законом, але її буде подано до вертикально відхильних пластин із запізненням  $\tau$ , необхідним для поширення звукового коливання від репродуктора до мікрофона. Тому напруга, що надходить до вертикально відхильних пластин, змінюватиметься за законом

$$U_y = U_{0y} \cos \omega(t - \tau). \quad (3.57)$$

Відповідно до цього зміщення променя у вертикальному напрямку опишемо формулою

$$y = y_0 \cos \omega(t - \tau). \quad (3.58)$$

Час запізнення  $\tau$  визначимо за співвідношенням

$$\tau = \frac{L}{V}, \quad (3.59)$$

де  $V$  – фазова швидкість поширення звукових коливань у повітрі;  $L$  – відстань між репродуктором і мікрофоном. Різниця фаз між коливаннями променя у вертикальному і горизонтальному напрямках становитиме

$$\phi = \omega \tau = \frac{2\pi}{T} \frac{L}{V} = 2\pi \frac{Lv}{T}, \quad (3.60)$$

де  $T$  – період;  $v$  – лінійна частота коливань;  $L$  – різниця ходу двох хвиль.

За відсутності нелінійних викривлень у системі на екрані осцилографа має з'явитися еліпс. Змінюючи відстань між репродуктором і мікрофоном або підбираючи частоту, можна досягти того, щоб промінь на екрані осцилографа здійснював коливання прямою (3.53), а потім, віддаляючи мікрофон від репродуктора – прямою (3.54). Відстань між цими двома положеннями мікрофона дорівнюватиме половині довжини звукової хвилі. Якщо продовжувати віддаляти мікрофон від репродуктора, промінь знову здійснюватиме коливання вздовж прямої (3.53). У цьому разі відстань між початковим і кінцевим положеннями мікрофона дорівнюватиме довжині звукової хвилі  $\lambda$ . Вимірявши цю відстань, легко обчислимо швидкість звуку.

Реальна картина на екрані осцилографа може відрізнятись від показаної на рис. 3.13. Нелінійні викривлення, створювані апаратурою, електричні наводки, шум у приміщенні й інші чинники приводять до того, що і вертикальне, і

горизонтальне зміщення променя не є повністю синусоїдальне. Тому фігури Ліссажу не вдається перетворити на пряму лінію. У цьому разі рекомендуємо переміщувати мікрофон, доки площа, обмежена фігурою Ліссажу, не стане мінімальною.

Якщо сигнал звукового генератора відрізняється від синусоїдального або репродуктор не працює в лінійному режимі, то мембрана репродуктора може коливатися не з частотою, заданою звуковим генератором, а вдвічі або в декілька разів швидшою. При цьому фігура Ліссажу матиме вигляд не еліпса, а вісімки або складнішої фігури. Нелінійні коливання мембрани репродуктора виникають у разі їх великої амплітуди, наприклад, коли частота звукового генератора наближається до власної частоти коливань мембрани, тобто виникає резонанс. Якщо має місце таке явище, рекомендуємо зменшити вихідну потужність звукового генератора або виконати вимірювання на іншій частоті.

### Порядок виконання експерименту

1. Зібрати електричну схему установки відповідно до рис. 3.11. Мікрофон з'єднати зі входом вертикального відхилення ( $Y$ ), а репродуктор – зі входом горизонтального відхилення ( $X$ ). Ручки горизонтального і вертикального відхилення підсилювачем осцилографа встановити на нуль. Ручку осцилографа «Діапазон частот» поставити в положення «вимкнено».

2. Увімкнути осцилограф. Сфокусувати електронний промінь у точці й встановити його в центрі екрана осцилографа.

3. Увімкнути звуковий генератор, встановити потрібну частоту. Відрегулювати горизонтальне підсилення осцилографа так, щоб електронний промінь описував горизонтальну пряму довжиною, що дорівнює третині діаметра екрана.

4. Вертикальне підсилення осцилографа збільшити до максимального значення.

5. Змінюючи частоту генератора і відстань між репродуктором і мікрофоном, вивести на екран осцилографа пряму лінію.

6. Забезпечити  $45^\circ$  нахилу прямої лінії до осей координат, для чого підібрати відповідне послаблення сигналу та горизонтальне підсилення осцилографа.

7. Зафіксувати положення мікрофона, відтак, переміщуючи його, знайти нове положення, у якому електронний промінь знову описуватиме пряму лінію в тих самих координатних кутах, що і за початкового положення мікрофона. Відстань між початковим і кінцевим положеннями мікрофона в цьому разі дорівнюватиме довжині хвилі.

8. Записати в таблицю значення  $v$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ . Провести дослід 7 разів.

9. Повторити дослід для інших частот.

10. За формулою (3.49) визначити швидкість звуку та похибку вимірювань.

### 3.3.5 Лабораторна робота 16. Визначення фазової швидкості поширення коливань методом стоячих хвиль

Якщо в будь-якому пружному середовищі зовнішні сили збуджують коливання частинок в одному місці, то у результаті взаємодії між частинками середовища коливання передадуться до частинок в інших місцях. Передавання коливань у середовищі називають хвильовим процесом. Для його кількісного описання розмістимо вібратор у точці  $O$  (рис. 3.14).

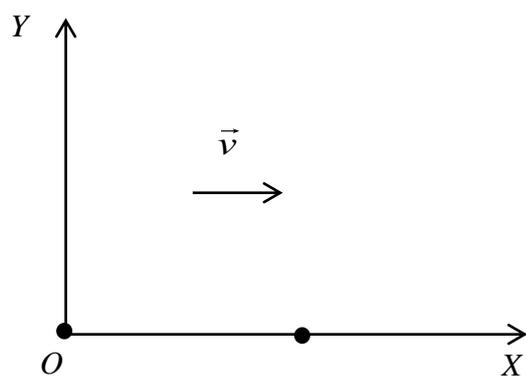


Рис. 3.14. Виведення рівняння хвилі

Вібратор здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою  $\omega$  і амплітудою  $A$ :

$$y = A \cos \omega \cdot t_0, \quad (3.53)$$

де  $t_0$  – час, який відлічуємо від початку коливань вібратора, що поширюються від точки до точки вздовж осі  $X$ . Кожна точка повторює рух вібратора тільки з деяким запізненням. Запишемо рівняння руху точки  $A$ , розташованої на відстані  $x$  від вібратора:

$$y_A = A \cos \omega \cdot \left(t_0 - \frac{x}{V}\right), \quad (3.54)$$

де  $V$  – швидкість поширення хвиль. Рівняння (3.54) – рівняння хвилі, яка поширюється вздовж осі  $X$ .

Вираз  $\omega(t - \frac{x}{V})$  називають фазою хвилі. Фазова швидкість – це швидкість переміщення зафіксованої фази хвилі.

Хвиля – це процес із просторовою та часовою періодичністю, що відображає рівняння (3.54). Якщо зафіксувати точку хвилі  $x$ , то рівняння хвилі стане рівнянням гармонічних коливань; за фіксованого часу  $t$  отримаємо просторове періодичне розташування частинок середовища.

Оскільки  $\omega = 2\pi / T$  і  $T \cdot V = \lambda$ , то рівняння хвилі можна записати у вигляді

$$y = A \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (3.55)$$

Напрямок поширення хвилі називають променем. Залежно від напрямку коливання точок відносно променя всі хвилі поділяють на поздовжні та поперечні. У поперечних хвилях частинки середовища коливаються у напрямку, перпендикулярному до променю хвилі, натомість у поздовжніх – у напрямку променю хвилі.

Явище, що виникає у разі додавання хвиль у середовище, називають інтерференцією. Важливе значення має додавання хвиль, поширюваних від двох джерел з однаковими періодами і напрямками коливань, коли їх фази однакові або їх різниця залишається незмінною. Такі джерела та хвилі називають когерентними.

Окремим випадком такої інтерференції є утворення стоячих хвиль. Вони виникають у разі додавання двох зустрічних плоских хвиль однакового періоду з однаковими амплітудами і напрямками зміщення точок. Рівняння для спадної та відображеної хвиль виглядатимуть як

$$y_n = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right); \quad y_e = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (3.56)$$

Рівняння стоячої хвилі запишемо у вигляді

$$y = y_n + y_e = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}. \quad (3.57)$$

Це рівняння описує коливальний рух із різною амплітудою. Точки, для яких амплітуда коливань дорівнює нулю, називають вузлами. Їх координати ( $x_v$ ) знайдемо із рівняння  $2\pi \frac{x_e}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , де  $k=0, 1, 2, \dots$ . Звідси  $x_e = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ .

Точки в стоячій хвилі, що коливаються з найбільшою амплітудою, називають пучностями. Для них виконується умова  $2\pi \frac{x_n}{\lambda} = k\pi$ . Координати пучностей мають значення  $x_n = k \frac{\lambda}{2}$ . Взаємне розташування вузлів і пучностей зобра-

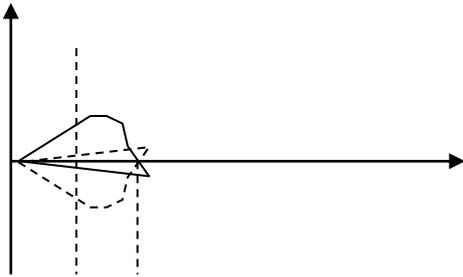


Рис. 3.15. Розташування вузлів і пучностей стоячої хвилі

жено на рис. 3.15. Сусідні вузли та пучності розташовані на відстані  $\lambda/2$  один від одного.

Положення вузлів і пучностей в обмеженому пружному середовищі залежить від граничних умов. Закріплені кінці струни завжди є вузли стоячої хвилі, а вільні кінці – пучності.

Якщо в струні виникне стояча хвиля, то довжина струни буде кратна  $\lambda/2$ :

$$l = k\lambda / 2 = k \cdot V \cdot T / 2 = k \cdot V / 2 \cdot \nu. \quad (3.58)$$

Звідси

$$V = 2 \cdot \nu \cdot l / k. \quad (3.59)$$

Згідно з теорією пружності фазова швидкість хвилі пов'язана із силою натягу струни і масою одиниці її довжини :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\rho}}. \quad (3.60)$$

Прилад, за допомогою якого утворюють стоячі хвилі, зображено на рис. 3.16. Струну (1) з одного боку закріплено затискачем (2). Натяг струни забезпечено вантажем (3), підвішеним до другого кінця струни. У затискачі (4) закріплено другий кінець струни. Періодична сила діє на струну через стрижень (5), з'єднаний з дифуззором динаміка (6). Під час подачі до динаміка змінної на-

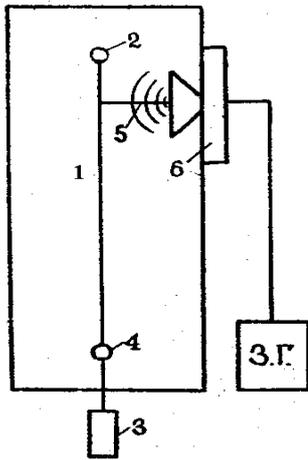


Рис. 3.16. Прилад для утворення стоячої хвилі в струні

пруги від звукового генератора струна починає коливатися. Коли частота генератора збігається з однією із власних частот струни, в останній з'являється стояча хвиля.

### Порядок виконання експерименту

1. Увімкнути звуковий генератор, відтак – внутрішнє навантаження, перемикач опору встановити на 600 Ом.

2. Перемикачем атенюатора встановити такі межі шкал генератора, щоб на верхній шкалі було не менше 3 В. Поступово повертаючи ручку, досягти відхилення стрілки приблизно на 2,5 В.

3. Підвісити до струни тягар і виміряти частоту коливань генератора. Зафіксувати значення частот генератора, за яких уздовж струни утворюється ціле число півхвиль. Аналогічні операції виконати з іншими тягарями.

4. Виміряти довжину струни. Визначити фазову швидкість за формулою (3.60). Виміряти діаметр струни і, знаючи її густину, обчислити вагу одиниці довжини.

5. Для експериментальної перевірки формули (3.60) побудувати залежність  $\ln V$  від  $\ln(F/\rho)$  (тангенс кута нахилу дорівнює показнику ступеня в рівнянні (3.60)).

## ЧАСТИНА II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

### 4 Властивості газів. Основи статистичного методу

#### 4.1 Теоретичні відомості

##### 4.1.1 Експериментальні закони ідеального газу. Об'єднаний газовий закон, формула Клапейрона. Універсальна газова стала. Стала Больцмана

Молекулярна фізика вивчає фізичні властивості речовини в різних агрегатних станах (твердому, рідкому та газоподібному) в залежності від будови тіл і особливостей молекулярного руху. Основні питання, які розглядає молекулярна фізика це: **1)** молекулярна будова речовини та її зв'язок з властивостями; **2)** процеси переходу від одного агрегатного стану до іншого; **3)** явища на межах двох агрегатних станів.

Молекулярна фізика використовує два теоретичні методи: термодинамічний, який дозволяє побудувати теорію властивостей речовини не беручи до уваги внутрішню будову; термодинаміка вивчає макроскопічні процеси в тілах, які пов'язані з тепловою формою руху матерії на основі трьох аксіом (начал)

термодинаміки. Аксиоми визначаються експериментально і вони встановлюють функціональний зв'язок між основними макроскопічними параметрами ( $P, V, T$ )

**Метод статистичної фізики**, який узагальнює властивості речовини через дослідження великої кількості частинок. Молекулярна фізика ґрунтується на статистичному підході при умові рівноваги системи. Підхід цей ґрунтується на визначенні параметрів і законів великої кількості часток. Молекулярна фізика використовує моделювання для уявлення про внутрішню структуру речовини і за допомогою якого визначаються макроскопічні параметри і закони. В основі молекулярної фізики лежать три фундаментальних твердження: **1)** Усі тіла складаються з найдрібніших частинок – атомів або молекул; **2)** Атоми взаємодіють одні з одними, величина сил взаємодії залежить від віддалей між частинками; **3)** Атоми перебувають у стані безперервного хаотичного руху. Цей хаотичний рух ми сприймаємо як теплоту.

Молекулярна фізика і термодинаміка вивчають теплові явища з різних позицій. Молекулярна фізика на основі певних моделей і статистичного підходу визначає макроскопічні параметри і закони теплових явищ. Термодинаміка на основі експериментально установлених параметрів і законів (аксіом, начал) встановлює загальні закони теплових явищ без знання внутрішньої структури об'єкта дослідження.

Розміри атомів становлять кілька ангстремів. Так діаметр атома азоту  $3,7 \cdot 10^{-10}$  м, а вуглекислого газу  $5,5 \cdot 10^{-10}$  м. Маса молекул виражають в атомних одиницях маси, яка дорівнює  $1/12$  маси вуглецю, тобто  $1 \text{ а.о.м.} = 1/12 m_C$ , де  $m_C$  – маса ізотопу вуглеці  $C^{12}$ . Відносна молекулярна маса елемента  $\mu = m_C / \text{а.о.м.}$  показує в скільки разів маса даного атома більше  $1 \text{ а.о.м.}$  У фізиці і хімії часто використовується одиниця маси  $1 \text{ моль}$ . Для кожного елемента  $1 \text{ моль}$  дорівнює в грамах відносної молекулярній масі  $\mu$ . В  $1 \text{ моль}$  будь-якої речовини міститься одна і та ж кількість молекул  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  яку називають число Авогадро. З елементарного курсу фізики відомі так звані експериментальні газові закони: Бойля-Маріона, Гей-Люсака, Шарля, Авогадро та Дальтона.

Об'єм  $V$  це частина простору яку займає макроскопічне тіло. З точки зору феноменологічного підходу термодинаміки це визначення макроскопічного параметра є достатнім, так як легко визначається в практичному плані. З структурних позицій молекулярної фізики в об'ємі  $V$  знаходиться  $N$  атомів тому концентрація  $n = (N/V)$  стає суттєвим параметром замість об'єму. Зворотною величиною концентрації є середній об'єм, який займає в середньому один атом або молекула.

$$v = \frac{1}{n} = \frac{V}{N}$$

*Закон Бойля-Маріота*, при сталій температурі та незмінній кількості газу

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P \cdot V}{m_0 \cdot N} = \text{const}, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 \cdot N}{V}$$

тобто  $PV = \text{const}$  ( $t = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ) Ступінь стисливості ідеального газу визначається коефіцієнтом стисливості ( $\chi$ ). Для визначення використаємо рівняння

ізотермічного процесу. Продиференціюємо це рівняння ( $PV=const$ ) і визначимо коефіцієнтом стисливості

$$\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad d(PV) = \partial PV + P\partial V = 0 \Rightarrow \frac{1}{P} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \chi$$

Знаючи коефіцієнт стисливості  $\chi$  ( $\chi$ ), ми можемо визначити об'єм системи за початковими значеннями тиску і об'єму  $P_0V_0$ . Це співвідношення ми отримаємо з рівняння ізотермічного процесу  $PV = P_0V_0$ , з якого

$$V = \frac{1}{P} V_0 P_0 = \chi V_0 P_0 \quad V = \frac{1}{P} V_0 P_0 = \chi V_0 P_0$$

*Закон Шарля:* при сталому об'ємі, при нагріванні газу від  $0^\circ\text{C}$ , тиск змінюється за законом:  $p-p_0 = \beta p_0 t = \beta p_0 T$ : ( $V = \text{const}$ ), де  $\beta$  - температурний коефіцієнт тиску. При нормальних умовах термічний коефіцієнт тиску  $\beta = (273,14941)^{-1}$

Введемо нову температурну шкалу  $T = t - 273,14941$ . В цьому разі закон Шарля з класичної форми переходить в термодинамічну

$$P = P_0(1 + \beta t) = P_0(1 + \beta T - 273,14941\beta) = P_0\beta T:$$

Так як при нормальних умовах  $\beta = \text{const}$ ,  $p_0 = \text{const}$ , то

$$\frac{P}{T} = \beta P_0 = \frac{P_0}{T_0} = \text{const}$$

Отже  $\beta = 1/T_0$  при нормальних умовах, а в загальному вигляді  $\beta = 1/T$ . Для визначення термічного коефіцієнта тиску  $\beta$  продиференціюємо рівняння ізобаричного процесу  $(p/T) = \text{const}$

$$\left( \frac{d\left(\frac{P}{T}\right)}{dT} \right)_V = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \frac{1}{T} - \frac{P}{T^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Величина  $\beta = (1/T)$ . Отже

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{P} \left( \frac{dP}{dT} \right)_V$$

*Закон Гей-Люсака:* встановлено, що зміна об'єму газу при його нагріванні під сталим тиском пропорційна об'ємові газу при  $0^\circ\text{C}$  та підвищенню температури:  $V-V_0 = \alpha \cdot V_0 t$  ( $p = \text{const}$ ), де  $V$  і  $V_0$  - об'єм при  $t$  і при  $0^\circ\text{C}$  відповідно,  $\alpha = (1/273,14941)$  - температурний коефіцієнт об'єму газу. Введемо нову температурну шкалу  $T = t - 273,14941$ . В цьому разі закон Гей-Люсака з класичної форми переходить в термодинамічну:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0(1 + \alpha T - \alpha 273,14941) = V_0\alpha T$$

Отже при нормальних умовах,  $\alpha = 1/T_0$  а в загальному вигляді  $\alpha = 1/T$ . Продиференціюємо рівняння ізобаричного процесу  $(V/T) = \text{const}$ .

$$\left( \frac{d\left(\frac{V}{T}\right)}{dT} \right)_p = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{1}{T} - \frac{V}{T^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Оскільки  $\alpha = (1/T)$  то:

$$\alpha = \frac{1}{T} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

*Закон Гей-Люсака* правильний тільки приблизно, і особливо великі відхилення від нього мають місце при великих густинах газів та низьких температурах.

Термодинамічні параметри  $P$ ,  $V$ ,  $T$  зв'язані термічним рівнянням  $F(P, V, T) = 0$ , отже і коефіцієнти  $\chi, \alpha, \beta$  між собою функціонально зв'язані. Для цього складемо систему рівнянь, в яку ввійдуть рівняння визначення коефіцієнтів: стисливості  $\chi$ , термічного розширення  $\alpha$ , термічного тиску  $\beta$ , та рівняння теорему математичного аналізу про добуток часткових похідних

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \\ \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \\ \beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{1}{\chi V} \\ \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \alpha V \\ \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{1}{\beta P} \\ \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$-\frac{1 \cdot \alpha V}{\chi V \beta P} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\chi \beta P} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{\chi P}$$

Отже ми отримали функціональний зв'язок між коефіцієнтами стисливості, термічного розширення, термічного тиску у вигляді рівняння:

$$\beta = \frac{\alpha}{\chi P}$$

*Закон Авогадро*: якщо які-небудь два гази займають рівні об'єми при однаковому тиску і мають однакові температури, то в цих об'ємах містяться рівні числа молекул. Дослід показує, що моль кисню (32г) під тиском 1атм і при 0 °С займає об'єм 22.414 л.

*Закон Дальтона*: тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, які утворюють суміш. Парціальним називається тиск, який мав би газ, коли б він один заповнював весь об'єм.

*Об'єднаний газовий закон*:

$$\frac{pV}{T} = const$$

Якщо брати газ масою 1 моль, то керуючись законом Авогадро, згідно якому 1 моль при нормальних умовах має об'єм 22,4л, можна визначити сталу в об'єднаному законі

$$const = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ (Па)} \cdot 0,0224 \text{ (м}^3/\text{моль)}}{273,15 \text{ (К)}} = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Її називають універсальною газовою сталою  $R$ .

Тепер рівняння стану для 1 моля має вигляд:  $pV_\mu = RT$ . Для будь-якого числа молей  $\nu = (m/\mu) = (N/N_A)$ . Отримаємо рівняння стану ідеального газу, рівняння Клапейрона  $pV = \nu RT$ . Якщо поділити це рівняння на  $N_A$ :

$$\frac{pV_\mu}{N_A} = \frac{R}{N_A} T$$

Звідси  $p = nkT$ , де  $n = N_A/V_\mu$  - концентрація молекул, тобто число молекул в одиниці об'єму, а  $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - стала Больцмана.

Рівняння Клапейрона можна отримати і інакше. Якщо записати систему рівнянь визначення термічного коефіцієнта об'ємного розширення, ізотермічної стисливості і термічного коефіцієнта тиску, до них долучити рівняння теореми математичного аналізу про добуток часткових похідних, то ми можемо отримати загальний закон Клапейрона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \\ -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} \\ \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \\ \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{V_1}{T_1} \text{ because } \left( \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = const \right) \\ \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{P_1}{V_2} \text{ because } \left( P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow \frac{P_1}{V_2} = \frac{P_2}{V_1} = const \right) \\ \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{T_2}{P_2} \text{ because } \left( \frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{P_2} = \frac{T_1}{P_1} = const \right) \\ \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1 \end{array} \right.$$

#### 4.1.2 Барометрична формула

З'ясуємо залежність тиску газу від висоти в посудині. Якщо знехтувати залежністю температури атмосферного повітря від висоти можна знайти, як змінюється атмосферний тиск з висотою. Для цього виділимо стовп повітря і будемо вважати, що тиск  $P$  зумовлюється вагою газу, що знаходиться над цим рівнем. З підняттям на  $dh$  тиск змінюється на  $dP = -\rho g dh$  (зменшується) так

$$\text{як } \rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu P}{RT} \quad dP = -\frac{\mu P g}{RT} dh. \quad \text{Або } \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Після інтегрування одержимо  $\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g}{RT} h$ , або  $P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$ . Так як

$\rho_0 = P_0 \frac{\mu}{RT}$  при  $h=0$ , то  $P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}}$ , або, якщо перейти до концентрації, так як

$p = nkT$ , то можна одержати формулу Больцмана  $n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ , де  $m$  -

маса молекули і  $m = \frac{\mu}{N_A}$ , а  $k = \frac{R}{N_A}$  при нормальних умовах  $n_0 = 2,69 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}$ . Це число Лошмідта.

### 4.1.3 Основне рівняння кінетичної теорії газів

Тиск газу можна визначити як відношення середньої сили, зумовленої ударами молекул у стінку до площі цієї стінки:  $\vec{p} = \frac{\vec{f}}{S}$ .

Якщо сила  $f$  діяла час  $t$ , то імпульс сили  $\Delta L = \vec{f} \cdot t$ , тоді  $\vec{p} = \frac{\Delta L}{St}$ , якщо  $S = 1 \text{см}^2$   $t = 1 \text{с}$ , то  $p = \Delta L$ . Припустимо, що газ знаходиться в кубі з ребром 1 см. Нехай маса молекули  $m$ . Обчислимо тиск газу  $p_x$  (на стінку перпендикулярну ребру  $x$ ). Спинимо увагу на якій-небудь молекулі зі швидкістю  $\vec{U} = \vec{U}_x + \vec{U}_y + \vec{U}_z$ , тобто  $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ . Під час удару в стінку молекула надає стінці імпульс. Якщо удар пружний, складова швидкості після удару змінюється на зворотне і стає рівною  $-U_x$ , а складові  $U_y$  і  $U_z$  не змінюються. Під час удару стінка дістане імпульс.  $mU_x - (-mU_x) = 2mU_x$ . Припустимо, що молекула, рухаючись від стінки до стінки, на своєму шляху не зустрічає інших молекул. Тоді після зіткнення з лівою стінкою молекула буде періодично повертатися до правої стінки і кожного разу надавати стінці кількості руху  $2mU_x$ . Проміжок часу між двома послідовними зіткненнями  $\tau = \frac{2}{U}$ . За 1с стінка дістане від цієї молекули ударів:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{U_x}{2}.$$

Тоді за 1с стінці буде надано руху:  $\Delta L = 2mU_x \nu = mU_x^2$ . Тепер перенумеруємо усі молекули:  $m_1, m_2, \dots$  а складові швидкостей у напрямі паралельному осі  $x$  позначимо як  $U_{x1}, U_{x2}, \dots$

Тоді тиск газу на стінку, вимірюваний загальною кількістю руху, наданою стінці за 1с всіма молекулами дорівнюватиме:  $p_x = m_1 U_{x1}^2 + \dots + m_n U_{xn}^2$

Тому що ми взяли не суміш газів, а один певний газ, маси всіх молекул однакові, тобто

$$p_x = m(U_{x1}^2 + \dots + U_{xn}^2) = m \cdot n \left( \frac{U_{x1}^2 + \dots + U_{xn}^2}{n} \right) \quad (4.1)$$

Вираз в дужках являє собою середнє значення квадрата  $U_x$ , тому позначимо його  $\overline{U_x^2}$ . Тоді  $p_x = m \cdot n \overline{U_x^2}$ . Аналогічно  $p_y = m \cdot n \overline{U_y^2}$ ,  $p_z = m \cdot n \overline{U_z^2}$ . Тому що молекул надзвичайно багато і рухаються вони хаотично, то згідно з теорією імовірностей, середнє значення квадрата швидкості в якому завгодно напрямі одне й те саме. Значить  $U_x^2 = U_y^2 = U_z^2$ , тому

$$\left. \begin{aligned} p_x = p_y = p_z = p \\ \bar{U}^2 = 3U_x^2 \\ U_x^2 = \frac{1}{3}\bar{U}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Підставивши (4.2) в (4.1) маємо

$$p = \frac{1}{3}m \cdot n\bar{U}^2 = \frac{2}{3}n\bar{U}^2, \quad (4.3)$$

але  $m\bar{U}^2 = \frac{m(U_1^2 + \dots + U_n^2)}{n} = \frac{mU_1^2 + mU_2^2 + \dots + mU_n^2}{n}$ , тобто  $\frac{m\bar{U}^2}{2}$  дорівнює сумі кінетичної енергії молекул, що містяться в  $1 \text{ см}^3$ . Рівняння (4.3) – це основне рівняння кінетичної теорії газів.

Якщо підставити замість кількості молекул в  $1 \text{ см}^3$  величину  $\frac{N}{V}$ , де  $N$  – загальна кількість молекул в об'ємі  $V$ , тоді дістанемо:

$$pV = \frac{2}{3}N \frac{m\bar{U}^2}{2} \quad (4.4)$$

Тобто добуток тиску газу на об'єм чисельно дорівнює двом третинам суми кінетичних енергій молекул, замкнених у даному об'ємі.

Порівняймо (4.4), яке записане для молю газу з рівнянням Клапейрона:

$$RT = \frac{2}{3}N_A \frac{m\bar{U}^2}{2} \text{ або } \frac{m\bar{U}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T, \text{ так як } \frac{R}{N_A} = k - \text{ стала Больцмана, то}$$

$$\frac{m\bar{U}^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (4.5)$$

Із цього рівняння випливає, що *абсолютна температура є міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекули*. Тоді абсолютний нуль – це є така температура, при якій припиняється поступальний рух молекул ідеального газу.

#### 4.1.4 Висновки з основного рівняння кінетичної теорії газів

Підставивши (4.5) в (4.4) дістанемо:

$$p = nkT, \quad (4.6)$$

це ще один запис основного рівняння кінетичної теорії газів. З (4.6) випливають як висновок усі експериментальні газові закони.

1. З (4.6) випливає що при сталій температурі  $p \sim n$  – числу молекул в  $1 \text{ см}^3$  газу. Це закон Бойля-Маріотта.

2. Рівняння (4.6) показує також, що  $p \sim T$  при сталому об'ємі. Це закон Шарля.

3) Оскільки  $n = \frac{N}{V}$ , то (4.6) можна переписати як

$$pV = NkT \rightarrow V = \frac{Nk}{p}T, \quad (4.7)$$

тобто при сталому тиску для даній кількості газу  $V \sim T$ , отже ми прийшли до закону Гей-Люссака.

4. З рівняння (4.7) видно, що кількість молекул  $N$  при даних  $p$ ,  $V$ ,  $T$  однакова в різних газах, а це є закон Авогадро.

5. З рівняння (4.7) випливає також і закон Дальтона для суміші газів. Якщо в посудині з об'ємом  $V$  міститься  $N$  молекул при температурі  $T$ , то його тиск дорівнює  $p_1 = \frac{N_1}{V}kT$ . Якби в тій самій посудині містилося  $N_2$  молекул при

тій самій  $T$ , то тиск дорівнював би  $p_2 = \frac{N_2}{V}kT$ . Якби всі  $N_1$  і  $N_2$  молекул одночасно містилися в цій посудині, то тиск газу дорівнював би:  $p = \frac{N_1 + N_2}{V}kT = p_1 + p_2$ . Тобто ми прийшли до закону Дальтона.

Отже всі так звані експериментальні газові закони можна одержати як висновок з ОРКТГ (основного рівняння кінетичної теорії газів). Але це рівняння було виведено для моделі газу, молекули якого не взаємодіють одна з одною і об'ємом яких можна знехтувати.

#### 4.1.5 Розподіл Максвела по швидкостях

В результаті зіткнень молекули змінюють свої швидкості, тому швидкість даної молекули в даний момент є випадковою. Проте відносні кількості молекул, швидкості яких мають різні величини, підлягають так званому *статистичному закону розподілу*,

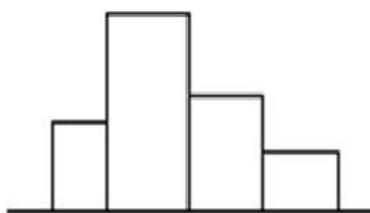
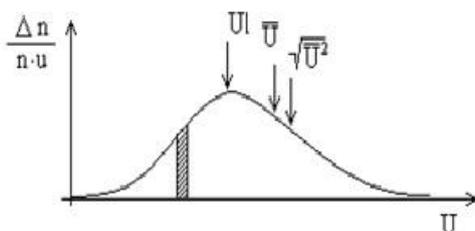


Рис. 4.1. Розподіл молекул по інтервалах швидкостей



тобто цей закон стосується не кожної даної молекули, а всієї сукупності молекул. Питання про розподіл швидкостей молекул можна поставити так:

яка частина загальної кількості молекул має швидкості, що лежать в даному інтервалі швидкостей. Наприклад, яка частина їх має швидкості, що лежать в інтервалі 300-310 м/с: 310-320 м/с і т.д. Питання про розподіл можна сформулювати і іншим способом. Якщо одну з молекул

газу як-небудь помічено, то яка ймовірність того, що ця молекула матиме в даний час швидкість, яка лежить у даному інтервалі швидкостей, наприклад між 300-310 м/с. Графічно розподіл молекул по інтервалах швидкостей зображується ламаною лінією (рис. 4.1). Якщо взяти до уваги, що молекул у газі дуже багато, то ширину інтервалу швидкостей можна такою вузькою, що ламаної лінії, практично зникнуть і її можна замінити плавною кривою (рис. 4.2).

Площа заштрихованого на рисунку прямокутника відображає відносне число молекул  $\frac{\Delta N}{N}$ , швидкості яких лежать в інтервалі між  $U$  і  $U+dU$ , а висота,

яку можна знайти, поділивши площу  $\frac{\Delta N}{N}$  на

**Рис. 4.2. Розподіл молекул по вузьких інтервалах швидкостей**

основу  $U$ , відповідає відносному числу молекул, швидкості яких лежать в інтервалі, що дорівнює одиниці.

Імовірність того, що молекула має швидкість, яка лежить в інтервалі між  $u$  та  $u+du$ , за Максвеллом визначається формулою:

$$dw = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du, \quad (4.8)$$

де  $T$  – температура газу,  $m$  – маса молекули,  $k$  – стала Больцмана,  $e$  – основа натурального логарифму. Ця формула називається максвеллівським розподілом. Розглядаючи криві розподілу швидкостей молекул, можна відзначити такі особливості цих кривих: 1) криві розподілу швидкостей молекул проходять через початок координат, отже немає молекул, які б не рухались; 2) крива має максимум, після якого асимптотично наближається до осі абсцис, тобто дуже великі швидкості мало ймовірні; 3) крива розподілу швидкостей не симетрична – в один бік спад кривої крутіший, ніж у другий. Швидкість, яка відповідає максимуму кривої розподілу швидкостей молекул, називається найімовірнішою швидкістю ( $U_v$ ) і її можна обчислити згідно з теорією Максвелла за формулою

$$U_v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (4.9)$$

середня арифметична швидкість згідно з теорією дорівнює:

$$\bar{U} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad (4.10)$$

середню квадратичну швидкість можна обчислити з рівняння:  $\frac{\overline{mu^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$ ,

приймаючи до уваги, що

$$\frac{\overline{mu^2}}{2} = \overline{mu^2} \rightarrow \sqrt{\overline{U^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kT \cdot N_A}{m \cdot N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{m}}. \quad (4.11)$$

Звідси

$$p = nkT \rightarrow kT = \frac{p}{n} \rightarrow \overline{mu^2} = \frac{5}{2} \frac{p}{n} \rightarrow \sqrt{\overline{U^2}} = \sqrt{\frac{3p}{m \cdot n}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad (4.12)$$

де  $m \cdot n = \rho$  - густина газу.

#### 4.1.6 Поняття про флуктуації

Припустимо, що в об'ємі  $V$  міститься  $N$  молекул, тоді в кожному  $1\text{см}^3$  при рівномірному розподілі буде  $\frac{N}{V}$  молекул. Виділимо невеликий об'єм  $v$ . При рів-

номірному розподілі в ньому повинно в середньому бути  $n = \frac{N}{V} \cdot v$  молекул.

Проте в дійсності хаотичність руху молекул приводить до того, що в різні моменти часу в об'ємі  $v$  будуть кількості молекул або більші, або менші від середнього значення  $n$ , ці випадкові зміни кількості частинок у малому об'ємі називаються *флуктуаціями числа частинок в об'ємі*. Мірою флуктуації величиною  $n$

вважається:  $\Delta = \sqrt{(\overline{n - n})^2}$  корінь квадратний з середнього квадрата відхилення

величини  $n$  від середнього значення її  $\bar{n}$ . Відношення  $\frac{\Delta}{\bar{n}} = \delta$  називається відносною флуктуацією даної величини.

#### 4.1.7 Довжина вільного пробігу молекули

*Середня віддаль, яку молекула проходить між двома послідовними зіткненнями, називається середньою довжиною вільного пробігу молекули.*

Середня довжина вільного пробігу дорівнює:  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{u}}{z}$ , де  $z$  - середнє число зіткнень молекул за 1 с на шляху, який чисельно дорівнює середній швидкості молекули ( $\bar{u}$ ). Припустимо, що всі молекули перебувають у спокої, крім однієї, яка рухається з швидкістю  $\bar{u}$ . Ця молекула "виріже" в просторі ламаний циліндр з радіусом, який дорівнює радіусові молекули. Молекули, центри яких містяться всередині циліндра, безперечно зазнають зіткнення з рухомою молекулою. Крім того, зіткнення станеться і з тими молекулами, центри яких містяться на віддалі від поверхні циліндра на більшій, ніж радіус молекули, тобто рухома молекула зіткнеться і з тими молекулами, центри яких містяться на віддалі від поверхні циліндра не більшій, ніж радіус молекули. Тобто можна провести другий циліндр з радіусом  $2r$ . Оскільки довжина циліндра дорівнює  $\bar{u}$ , то його об'єм дорівнює  $\pi d^2 \bar{u}$ , а загальне число молекул у цьому об'ємі  $\pi d^2 \bar{u} \cdot n$ , де  $n$  - число молекул в  $1\text{см}^3$  газу. Оскільки, рухома молекула стикається з усіма молекулами, які є в об'ємі, то число зіткнень також дорівнює  $z = \pi d^2 \bar{u} \cdot n$ . Насправді всі молекули перебувають у русі. Тому число зіткнень за 1 с більше, ніж число, яке ми визначили. Якщо виходити з максвелівського розподілу швидкостей, то за 1 с  $z = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{u} \cdot n$ , де  $\bar{u}$  - середня арифметична швидкість молекули. Тоді

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 \cdot n}. \quad (4.13)$$

Величина  $d$  в (4.13) називається ефективним діаметром молекули, тобто  $d$  - це найменша віддаль, на яку молекули зближаються при зустрічі. *Площа круга, діаметр якого дорівнює ефективному діаметрові називається ефективним перерізом молекули.*

Число молекул в одиниці об'єму газу прямо пропорційне тискові. Через те з (4.13) випливає, що середня довжина вільного пробігу молекул обернено пропорційна тискові газу. При нормальному тиску (760 мм.рт.ст.) -середня довжина вільного пробігу молекули буває порядку  $10^{-7}$  м, а при  $10^{-3}$  мм. рт.ст., коли в  $1 \text{ см}^3$  буде приблизно  $4 \cdot 10^{12}$  молекул, вона становить 0,5 м.

#### 4.1.8 Явища переносу. Стаціонарна теплопровідність

Безперервний хаотичний рух молекул спричинює процеси дифузії, теплопровідності та внутрішнього тертя. Якщо виникає деяка різниця концентрацій молекул у суміжних областях, то в результаті теплового руху молекул відбувається вирівнювання концентрацій. Це є процес дифузії, якщо газ стикається із стінками неоднакової температури, то поблизу нагрітої стінки молекули газу мають більшу середню кінетичну енергію ніж поблизу холодної. Хаотичний рух молекули, обмін енергіями між ними приводять до передачі тепла від нагрітої стінки до холодної. Це є *процес теплопровідності*. Коли викликати в газі течію у вигляді струменя, в результаті або весь газ братиме участь у течії, якщо безперервно діятиме зовнішня сила, спричинюючи течію, або течія припиниться, якщо зовнішня сила перестане діяти. Це *процес внутрішнього тертя*. Це три процеси – теплопровідності, внутрішнього тертя і дифузії можуть бути об'єднані загальною назвою явища переносу. Візьмемо дві паралельні горизонтальні пластинки, температура верхньої пластинки  $T_1$ , а нижньої –  $T_2$ :  $T_1 > T_2$ . Далі припустимо, що ці температури підтримуються сталими. Оскільки температура верхньої пластинки вища від нижньої, то конвекційних потоків газу не буді. Коли конвекції немає процес передачі енергії від нагрітої пластинки до холодної можна пояснити так. Деякі молекули газу в шарі, який притягає до пластинок, адсорбуються на пластині, а потім віддаляються від пластини, но вже з середньою енергією, яка відповідає  $T$  пластині, при зіткненні з молекулами газу вони віддаватимуть певну частину енергії. Оскільки всі напрями руху молекул рівноімовірні деяка частина молекул, які збільшили свою енергію через зіткнення, проникатиме в нижчі шари і віддаватиме енергію. З другого боку, молекули із шару біля холодної пластини переходять до вищих шарів. Так енергія передається від шару до шару і холодній пластинці. Це явище називають теплопровідністю. Кількість енергії, яка передається при цьому через площадку, перпендикулярну до напрямку потоку тепла, як показує дослід прямо пропорційне до площі  $S$ , різниці температур  $T_1 - T_2$ , часу  $t$ , протягом якого відбувається процес, і обернено пропорційна відстані  $Z$  між пластинами, тобто

$$Q = \theta \frac{T_1 - T_2}{Z} \cdot St, \quad (4.14)$$

де  $\theta$  - коефіцієнт теплопровідності. Величина  $\frac{T_1 - T_2}{Z}$  є мірою падіння температури на кожний сантиметр віддалі між пластинами в напрямі потоку енергії, або швидкість зміни температури у просторі, або градієнт температури. *Градієнт температури* в даній точці – це є границя, до якої прямує відношення  $\frac{\Delta T}{\Delta Z}$ , коли  $\Delta Z$  наближається до нуля.

Тобто  $\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta Z} = \frac{dT}{dZ} = gradT$ , тоді (4.14) можна записати як:

$$Q = -\theta \frac{dT}{dZ} \cdot St. \quad (4.15)$$

Знак “-” тому, що потік енергії спрямований протилежно до напрямку градієнта  $T$ .

Нам лишається зробити зауваження, з самого початку ми припускали, що різниці температур між пластинами з часом не змінюються, тобто (4.15) є рівнянням теплопровідності для стаціонарного процесу.

Фізичний зміст коефіцієнта теплопровідності випливає з формули  $\theta = -\frac{Q}{S \cdot \frac{dT}{dz} \cdot t}$ , тобто  $\theta$  чисельно дорівнює кількості енергії, що переноситься за 1с через площу 1 см<sup>2</sup>, розміщену перпендикулярно до напрямку потоку енергії при градієнті температури 1 град на 1 см.

#### 4.1.9 Обчислення коефіцієнта теплопровідності газів

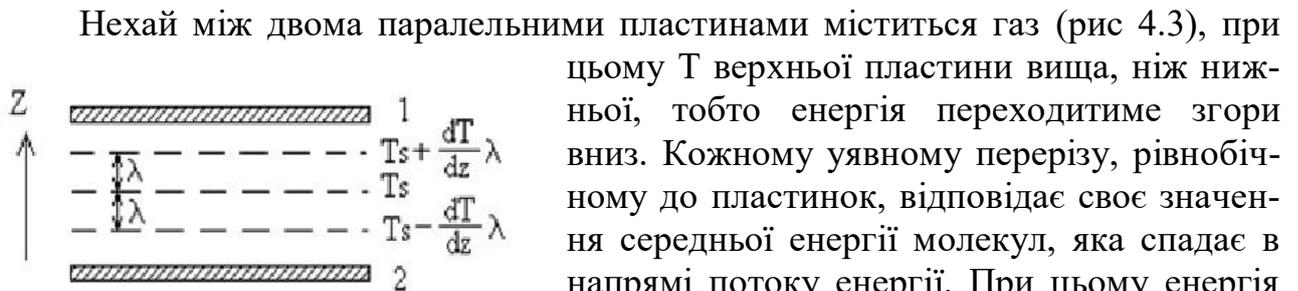


Рис. 4.3. Передача тепла в газі

Нехай між двома паралельними пластинами міститься газ (рис 4.3), при цьому  $T$  верхньої пластини вища, ніж нижньої, тобто енергія переходитиме згори вниз. Кожному уявному перерізу, рівнобічному до пластинок, відповідає своє значення середньої енергії молекул, яка спадає в напрямі потоку енергії. При цьому енергія переноситься згори вниз не певним упорядкованим рухом, а безладним тепловим рухом молекул. Виділимо площадку із площею  $S$  см<sup>2</sup> між пластинами і рівновіддалену до них. Припустимо, що середня швидкість молекул у всіх шарах однакова. Тоді крізь площадку  $S$  протягом  $t$  с можуть пролетіти тільки молекули, які перебувають на віддалі не більшій  $l = \bar{u} \cdot t$ . Нехай  $n$  - кількість молекул в одиниці об'єму. Тоді молекули, кількість яких  $n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t$  мають шанс пролетіти крізь площадку  $S$  протягом  $t$  с. Однак пролітатимуть не усі молекули, а тільки ті, які рухаються у напрямі площадки. Через рівномірність усіх напрямів можна вважати, що у вертикальному напрямі рухається третя частина всіх молекул, а з

тих – тільки половина згори вниз до площадки, тобто  $N_1 = \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t$ . Спрощено можна вважати, що всі молекули, які пролітають крізь площадку  $S$ , зазнають останнього зіткнення на відстані  $-\bar{\lambda}$  (середнього вільного пробігу) від площадки. Тому середня енергія цих молекул дорівнює середній енергії молекули із шара на відстані  $\lambda$  від  $S$ . Отже, середня енергія молекул, які приходять згори ( $\bar{\xi}_1$ ) трохи більша за середню енергію молекул, які приходять знизу ( $\bar{\xi}_2$ ). Обчислимо, скільки енергії переноситься молекулами крізь площадку  $S$  у напрямі згори вниз за  $t$  с:  $Q_1 = \bar{\xi}_1 N_1 = \bar{\xi}_1 \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t$ .

За цей час у напрямі знизу вгору молекулами переноситься крізь площадку  $S$  енергія:  $Q_2 = \bar{\xi}_2 N_2 = \bar{\xi}_2 \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t$ .

Різниця  $Q = Q_1 - Q_2$  виражає кількість енергії, яка переноситься внаслідок теплового руху молекул крізь  $S$  з  $t$  с, тобто

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t (\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1). \quad (4.16)$$

З іншого боку, за описовою теорією, енергію, яка переноситься при теплопровідності, можна знайти за формулою (4.15):  $Q = +\theta \left| \frac{dT}{dz} \right| \cdot S \cdot t$ , де  $\left| \frac{dT}{dz} \right|$  - абсолютне значення градієнта температури,  $\theta$  - коефіцієнт теплопровідності.

Позначимо температуру газу на рівні  $S$  через  $T_s$ . Тоді  $T_1 = T_s + \frac{dT}{dz} \cdot \bar{\lambda}$ , а  $T_2 = T_s + \frac{dT}{dz} \cdot \bar{\lambda}$  ( $T_1$  - температура на відстані  $\bar{\lambda}$  над площадкою,  $T_2$  - під площадкою  $S$ ). Якщо газ одноатомний, то

$$\bar{\xi}_1 = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} k \left( T_s + \frac{dT}{dz} \cdot \bar{\lambda} \right), \quad \bar{\xi}_2 = \frac{3}{2} k \left( T_s - \frac{dT}{dz} \cdot \bar{\lambda} \right).$$

Тобто (4.16) можна переписати так:

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t (\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1) = \frac{1}{6} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \frac{3}{2} k \frac{dT}{dz} 2\bar{\lambda}. \quad (4.17)$$

Якщо прирівняти це рівняння до (4.15), дістанемо:

$$\theta \left| \frac{dT}{dz} \right| \cdot S \cdot t = \frac{1}{3} n \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \frac{3}{2} k \frac{dT}{dz} \bar{\lambda}. \quad (4.18)$$

Звідки:

$$\theta = \frac{1}{3} n \cdot S \cdot \bar{u} \frac{3}{2} k \bar{\lambda} = \frac{1}{2} n \cdot \bar{u} k \bar{\lambda}. \quad (4.19)$$

Якщо взяти до уваги співвідношення  $C_V = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} k N_A$  - молярна теплоємність, яка пов'язана з питомою теплоємністю

$$c_v = C_v \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{C_v}{m_a N_A} = \frac{3}{2} \frac{k}{m_a}, \quad (4.20)$$

де  $m_a$  – маса молекули, дістанемо із (4.19):

$$\theta = \frac{1}{3} n \cdot \bar{u} \cdot C_v m_a \cdot \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{\lambda} \cdot c_v, \quad (4.21)$$

де  $\rho = n \cdot m_a$  - густина газу.

З формули (4.21) випливає, що коефіцієнт теплопровідності газу не залежить від тиску, так як  $\theta \approx \rho \bar{\lambda}$ , а  $\rho \approx p$  і  $\bar{\lambda} \approx \frac{1}{p}$ . При цьому рівняння (4.21)

справедливе доти, доки віддаль  $Z \gg \bar{\lambda}$ .

#### 4.1.10 Внутрішнє тертя в газах

Припустимо, що між двома паралельними пластинами нескінченних розмірів міститься газ. Після початку руху верхньої пластини слідом за нею почне переміщатись і газ. Таким чином рух передаватимуться до нижньої пластини. При цьому кожний довільний шар газу рухається швидше, ніж шар, розташований нижче. Тому нижній шар захоплюється вищим з певною силою  $f$  а з другого боку нижчий шар гальмує рух вищого з тією ж силою  $f$ . Ця сила пропорціональна площі  $S$  стикання шарів і спрямована до них по дотичній, ця сила, як показує дослід, також пропорціональна градієнтові швидкості  $\frac{dV}{dZ}$ . Силу взаємодії

між суміжними шарами газу, які рухаються один відносно одного називають *силою внутрішнього тертя*.

А градієнтом швидкості в шарі, який міститься на віддалі  $Z$  від нерухомої пластинки, називається границя відношення середньої зміни швидкості ( $\Delta V$ ) до віддалі між шарами ( $\Delta Z$ ) при переході від шару до шару в напрямі перпендикулярному до шарів при  $\Delta Z \rightarrow 0$ , тобто  $\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta Z} = \frac{dV}{dZ}$ .

Силу взаємодії між суміжними шарами газу, які рухаються один відносно одного називають *силою внутрішнього тертя* і вона дорівнює:

$$f = \eta \cdot S \left| \frac{dV}{dZ} \right|, \quad (4.22)$$

де  $\eta$ - коефіцієнт внутрішнього тертя, який чисельно дорівнює силі, діючої на дотичній на  $1 \text{ см}^2$  площі, взятої на межі між шарами, що рухаються один відносно одного при градієнті  $1 \text{ см/с}$  на  $1 \text{ см}$ .

Рівняння (4.22) можна записати у вигляді :

$$L = f \cdot t = -\eta \frac{dV}{dZ} \cdot S \cdot t, \quad (4.23)$$

де  $L$ - кількість руху, яка переноситься молекулами, знак мінус поставлено тому, що напрям перенесення кількості руху і напрям градієнта швидкості протилежні один одному. Щодо теорії внутрішнього тертя, то

1) З молекулярного погляду явище внутрішнього тертя в газах зводиться до перенесення молекулами кількості руху від шару до шару в результаті не-впорядкованого теплового руху.

2) Явище внутрішнього тертя цілком аналогічне до явища теплопровідності і відрізняється від нього тільки тим, що в процесі внутрішнього тертя молекули переносять кількість руху, тоді як при теплопровідності переноситься енергія.

3) Внутрішнє тертя, як і теплопровідність є процес, що проходить всередині газу, а не на суміжних між газом і твердим тілом поверхнях.

Для обчислення коефіцієнту внутрішнього тертя підемо тим же шляхом, що й при обчисленні коефіцієнту теплопровідності.

Кількість руху, яку переносять молекули через площадку  $S$  за час  $t$  рухаючись згори вниз, дорівнює:  $L_1 = \frac{1}{6} n \cdot \bar{u} \cdot S \cdot t \cdot m V_1$ , де  $V_1$  – швидкість молекул у

напрямі, паралельному пластинам на віддалі  $\bar{\lambda}$  над  $S$ ,  $\bar{u}$  - швидкість теплового руху. Кількість руху, яку переносять молекули крізь  $S$  за час  $t$ , рухаючись знизу

вгору, дорівнює  $L_2 = \frac{1}{6} n \cdot \bar{u} \cdot S \cdot t \cdot m V_2$ , де  $V_2$  - швидкість молекул у напрямі па-

ралельному пластинкам на віддалі  $\bar{\lambda}$  під  $S$ .

Отже разом через площадку  $S$  молекулами за час  $t$  переноситься кількість руху

$$L = L_1 - L_2 = \frac{1}{6} n \cdot \bar{u} \cdot S \cdot t \cdot m (V_1 - V_2). \quad (4.24)$$

За формальною теорією, кількість руху, що переноситься в процесі внутрішнього тертя через  $S$ , за абсолютною величиною дорівнює:

$$L = \eta \frac{dV}{dZ} \cdot S \cdot t. \quad (4.25)$$

Якщо вважати, що всі молекули, які пролітають через  $S$ , зазнають останнього зіткнення на однакових віддальх від площадки, а саме на віддальх, рівних  $\bar{\lambda}$ , тому  $V_1$  та  $V_2$  можна знайти із співвідношень

$$V_1 = V_s + \frac{dV}{dZ} \cdot \bar{\lambda}, \quad V_2 = V_s - \frac{dV}{dZ} \cdot \bar{\lambda}. \quad (4.26)$$

Тоді порівнюючи (4.26) і (4.24) отримаємо:

$$L = \frac{1}{6} n \cdot \bar{u} \cdot S \cdot t \cdot m \frac{dV}{dZ} \cdot 2\bar{\lambda}. \quad (4.27)$$

А порівнюючи (4.27) і (4.25), дістанемо формулу для коефіцієнта внутрішнього тертя:  $\eta = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot \bar{u} \cdot \bar{\lambda}$ . Через те що  $\rho = n \cdot m$  - густина газу  $\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{\lambda}$ ,

або підставивши вираз для  $\bar{\lambda}$ , дістанемо:

$$\eta = \frac{m \bar{u}}{3 \sqrt{2} \pi d^2} \cdot \quad (4.28)$$

Тобто коефіцієнт внутрішнього тертя газу не залежить від густини, а отже, і від стиску газу. Проте, як показує теорія, цей закон втрачає силу при дуже малих густинах газу, коли не виконується умова, що довжина вільного пробігу молекул значно менша від віддалі між стінками посудини.

#### 4.1.11 Молекулярна теорія дифузії в газах

Явище дифузії в газі є, з погляду кінетичної теорії, процес, цілком аналогічний процесам теплопровідності і внутрішнього тертя. Різниця полягає тільки в тому, що тут переноситься молекулами не кількість руху, не енергія як в явищах внутрішнього тертя і теплопровідності, а маса.

Масу газу, яка переноситься молекулами в процесі дифузії за час  $t$  з областей, де концентрація молекул більша, в області, де вона менша, можна обчислити за формулою

$$M = -DS \cdot t \cdot \frac{d\rho}{dz}, \quad (4.29)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії, який показує яка маса переноситься через площу  $1 \text{ см}^2$  за  $1 \text{ с}$  при градієнті густини  $1 \frac{\text{г}}{\text{см}^4}$ . Розмірність коефіцієнту дифузії

$|D| = \frac{l^2}{t} = \text{см}^2 / \text{с}$ . Використовуючи молекулярно-кінетичну теорію  $D$  можна визначити наступним чином: через площадку  $S$ , перпендикулярну до напрямку градієнту концентрації за час  $t$  згори вниз проходить  $\frac{1}{6} n_1 \cdot S \cdot l = \frac{1}{6} n_1 \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t$  молекул, тобто

$$M_1 = \frac{1}{6} n_1 \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot m, \quad (4.30)$$

де  $n_1$  - концентрація молекул на віддалі  $\bar{\lambda}$  над  $S$ ,  $m$  - маса молекули. За той самий час знизу вгору крізь  $S$  переноситься маса

$$M_2 = \frac{1}{6} n_2 \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot m. \quad (4.31)$$

Тоді результуюча

$$M = M_1 - M_2 = \frac{1}{6} \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot m (n_1 - n_2). \quad (4.32)$$

Якщо позначити, як і раніше  $n_1 = n_s + \frac{dn}{dz} \cdot \bar{\lambda}$ , а  $n_2 = n_s + \frac{dn}{dz} \cdot \bar{\lambda}$ -, то враховуючи,

що  $\frac{d\rho}{dz} = m \frac{dn}{dz}$ , із (4.29) можемо записати

$$M = \frac{1}{6} \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot m \cdot 2\bar{\lambda} \frac{dn}{dz} = \frac{2}{6} \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot \bar{\lambda} \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \bar{u} \cdot t \cdot \bar{\lambda} \frac{d\rho}{dz}, \quad (4.33)$$

Зіставивши коефіцієнт дифузії з коефіцієнтом внутрішнього тертя  $\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{\lambda}$  і

з коефіцієнтом теплопровідності  $\theta = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{u} \cdot \bar{\lambda} \cdot C_v$  знайдемо, що всі три коефіцієнти зв'язані один з одним простими співвідношеннями

$$\left. \begin{aligned} \eta &= D\rho \\ \theta &= D\rho \cdot C_v \\ \theta &= \eta \cdot C_v \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Слід зауважити, що нами розглянута спрощена теорія явищ переносу.

#### 4.2. Перелік контрольних питань

1. Експериментальні закони ідеального газу. Об'єднаний газовий закон, формула Клайперона.
2. Барометрична формула. Число Лошмідта.
3. Основне рівняння кінетичної теорії газів. Висновки з основного рівняння кінетичної теорії газів.
4. Розподіл Максвелла по складовим швидкості. Розподіл Максвелла за модулем швидкості.
5. Вплив температури на розподіл Максвелла за швидкостями. Поняття найбільш імовірної, середньої арифметичної, середньої квадратичної швидкості.
6. Експериментальне визначення швидкостей срібла в дослідах Штерна. Досліди Ламерта і їх наслідки.
7. Розподіл молекул по швидкостям в молекулярному пучку. Барометрична формула із врахуванням змінності  $g(h)$  і  $T$ .
8. Розподіл Больцмана. Розподіл Максвелла – Больцмана. Дослід Перена з визначенням числа Авогадро.
9. Поняття флуктуації. Міра флуктуації. Формула для середнього числа зіткнень молекул. Формула для середньої довжини вільного пробігу молекул. Поняття ефективного перерізу молекули.
10. Явища переносу. Стаціонарна теплопровідність. Формула Фур'є.
11. Обчислення коефіцієнта теплопровідності газів. Випадки, у яких коефіцієнт теплопровідності не залежить від тиску.
12. Внутрішнє тертя в газах. Формула Ньютона. Вираз коефіцієнта внутрішнього тертя через молекулярно-кінетичні параметри. Випадки, у яких коефіцієнт внутрішнього тертя не залежить від тиску.

13. Молекулярна теорія дифузії в газах. Закон Фіка. Вираз коефіцієнта дифузії через молекулярно-кінетичні параметри. Взаємозв'язок між коефіцієнтами дифузії, теплопровідності та внутрішнього тертя.

### 4.3 Лабораторні роботи

#### 4.3.1 Лабораторна робота №17. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя, середньої довжини вільного пробігу та ефективного (газодинамічного) діаметра молекул методом протікання через капіляр

Прилади та приладдя: установка, секундомір, насос.

У цій роботі значення довжини вільного пробігу та ефективного діаметра молекул обчислюється з використанням значення коефіцієнта внутрішнього тертя, який знаходиться з експерименту. Установка для знаходження коефіцієнта в'язкості методом протікання через капіляр складається з балона з рідинним манометром і капіляром, системи трубок і кранів за допомогою яких, за допомогою яких балон спочатку з'єднується з насосом для попереднього нагнітання в нього повітря, а потім з капіляром, через який нагнітається повітря (Рис. 4.4).

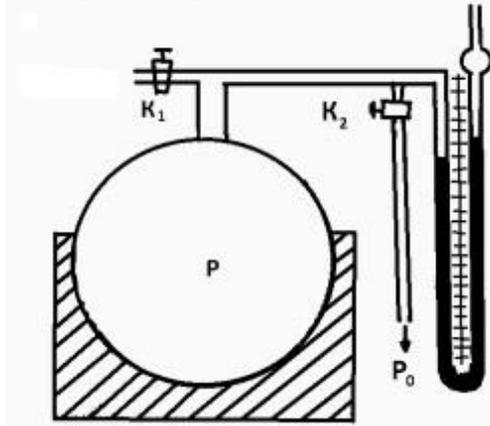


Рис. 4.4. Прилад для визначення внутрішнього тертя повітря

#### Теоретичні відомості

Розглянемо ламінарний рух газу (повітря) крізь капіляр довжиною  $l$ , перерізом  $S$  під дією різниці тисків  $P - P_0$  ( $P_0$  – атмосферний тиск,  $P$  – змінний тиск у балоні об'ємом  $V$  з яким з'єднується верхній кінець капіляра).

Знайдемо середню густину газу в капілярі  $P_{\text{ср}}$  відповідно до рівняння Менделєєва-Клапейрона  $\rho_{\text{ср}} = \mu P_{\text{ср}} / RT$ , де  $\mu$  – молярна маса,  $T$  – абсолютна температура:

$$P_{\text{ср}} = (P - P_0) / 2.$$

При протіканні газу через капіляр розподіл швидкості газу по перерізу капіляра виражається формулою:

$$U(r) = \frac{P + P_0}{4\eta l(r_0^2 - r^2)}, \quad (4.35)$$

де  $r_0$  – внутрішній радіус капіляра;  $r$  – відстань від осі капіляра до розглядуваного кільця в його поперечнім перерізі;  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя

Виразимо витік газу з балону за час  $dt$  через зниження тиску в ньому:

$$dm = -Vd\rho = -V \frac{\mu dP}{RT}, \quad (4.36)$$

де  $d\rho$  – приріст густини ( $d\rho < 0$ ), а також через середню (по перерізу капіляра) швидкість протікання газу

$$dm = \rho_{\text{сер}} U_{\text{сер}} S dt = \frac{\mu P_{\text{сер}} (P - P_0) r_0^2}{RT \cdot 8\eta l} \pi r_0^2 dt. \quad (4.37)$$

Прирівнюємо праві частини рівнянь (4.36) і (4.37), підставимо вираз для  $P_{\text{сер}}$  та проведемо розподіл змінних. З цього випливає:

$$(4.38)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (4.38):

і проінтегруємо праву частину по часу від 0 до  $t$ , а ліву частину – по тиску від  $P_1$  до  $P_2$  відповідно до моментів часу 0 і  $t$ . Тоді будемо мати:

$$\frac{1}{P_1 P_0} (\ln(P_2 + P_0) / (P_1 + P_0) - \ln(P_2 - P_0) / (P_1 - P_0)) = \frac{1}{P_1 P_0} \ln(P_2 + P_0) (P_1 - P_0) - \ln(P_2 - P_0) (P_1 + P_0) \quad (4.39)$$

Через те що в даній роботі  $P_1$  і  $P_2$  мало відрізняються від  $P_0$ , то  $\frac{P_2 + P_0}{P_1 + P_0} = 1$ .  
Замінивши відношення  $\frac{P_1 - P_0}{P_2 - P_0}$  різниці рівнів рідини в манометрі в моменти часу 0 і  $t$ :  $\frac{P_1 - P_0}{P_2 - P_0} = \frac{h_1}{h_2}$ , одержимо вираз для коефіцієнта внутрішнього тертя

$$\eta = \frac{\pi r_0^4}{8lV} \cdot \frac{P_0 T}{\ln(h_1 / h_2)}. \quad (4.40)$$

Згідно з кінетичною теорією газів коефіцієнт внутрішнього тертя тісно пов'язаний з середньою довжиною вільного пробігу молекул співвідношенням:

$$\eta = 0,499 \rho \langle v \rangle \lambda, \quad (4.41)$$

де  $\rho = \frac{P\mu}{RT}$  – густина газу ( у нашому випадку  $P = P_0$ );  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – середня

арифметична швидкість молекул газу.

З виразу (4.41) визначимо:



### Контрольні запитання

1. Що таке коефіцієнт внутрішнього тертя (або коефіцієнт в'язкості)?
2. Який механізм внутрішнього тертя в газах?
3. Дати визначення довжини вільного пробігу й ефективного (газодинамічного) діаметра молекул.
4. Вивести формулу для визначення коефіцієнта в'язкості.

#### 4.3.2 Лабораторна робота №18. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом затухаючих коливань

Прилади та приладдя: пристрій для спостереження крутильних коливань, посуд з рідиною, секундомір, пікнометр.

В'язкістю (внутрішнім тертям) називається властивість рідини (газу) чинити опір переміщенню її шарів відносно один одного. Ця властивість кількісно характеризується коефіцієнтом в'язкості  $\eta$ . Основний закон в'язкого руху описується формулою Ньютона:

$$F = \eta S (dV/dx), \quad (4.45)$$

де  $F$  – сила взаємодії двох шарів рідини;  $S$  – площа їх контакту;  $dV/dx$  – градієнт швидкості в напрямку, перпендикулярному до напрямку руху.

У цій роботі для визначення коефіцієнта в'язкості рідини слід взяти характеристики затухаючого коливального руху. Коливальна система складається з металевого диску  $R$  (малюнок), підвішеного на тонкому дроті, верхній кінець якого прикріплений до крутильної головки  $N$  (за її допомогою корегується нульове положення).

Диск  $R$  розміщений у посудині, яка наповнюється рідиною (досліджуваної чи еталоном), її в'язкість відома. Для спостережень крутильних коливань використовується оптична система яка складається з освітлювача  $C$ , дзеркальця  $M$  закріплене, на дроті, шкали  $\Pi$ , на якій відбивається світловий зайчик.

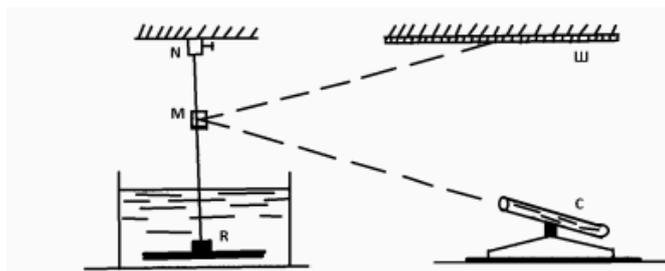


Рис. 4.5. Схема пристрою для вивчення крутильних коливань

### Теоретичні відомості

Якщо викликати крутильні коливання диска  $R$ , то вони будуть з часом згасати, тому що діє сила в'язкого тертя, яка пропорційна швидкості руху диска. Амплітуда коливальних рухів буде зменшуватися з часом по експоненціальній залежності:

$$A_t = A_0 e^{-\beta t}, \quad (4.46)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт затухання;

Відношення амплітуд двох послідовних коливань (які відстають за часом на період  $T$ ) називається декрементом затухання  $A_n/A_{n+1}=\exp(\beta t)$ , а його натуральний логарифм - логарифмічним коефіцієнтом затухання:

$$\lambda=\ln(A_n/A_{n+1})=\beta T. \quad (4.47)$$

Визначимо логарифмічний декремент затухання коливань диска у рідині через  $\lambda_p$ , а у повітрі – через  $\lambda_0$ , період коливань диска у рідині –  $T_p$ . Ці величини зв'язані з коефіцієнтом внутрішнього тертя  $\eta_p$  співвідношенням, яке порівняно складне у теоретичному доказі:

$$\lambda=\lambda_0+\sqrt{(\pi/2)\rho_p T_p \eta_p}, \quad (4.48)$$

де  $\rho_p$  – густина рідини  $\alpha$  – константа (стала приладу), яка залежить від радіуса диска і його моменту інерції.

Запишемо формулу (4.48) для досліджуваних рідини й води (еталонної рідини), в'язкість якої  $\eta_v$  відома. За допомогою нескладних перетворень цих двох формул маємо

$$\eta_p=\frac{\rho_p T_p \eta_p (\lambda_p - \lambda_0)}{\rho_v T_v \eta_v (\lambda_v - \lambda_0)}. \quad (4.49)$$

При визначенні  $\lambda_0, \lambda, \lambda_v$  маємо на увазі, що, відповідно до формули (4.47),  $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_{n-1}=\ln(A_1/A_2)+\ln(A_2/A_3)+\dots+\ln(A_{n-1}/A_n)=\ln(A_{n-1}/A_n)$ , тому що  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dots=\lambda_{n-1}$ .

Таким чином,

$$\lambda=(1/(n-1))\cdot\ln(A_1/A_n) \quad (4.50)$$

### Порядок роботи

1. Спостерігати затухання коливань диска у повітрі. Для цього спочатку перемістити шкалу і підстроїти освітлювач таким чином, щоб зайчик знаходився на нулі шкали, а шкала була перпендикулярна до падаючого на неї променю. Злегка закрутити дріт так, щоб зайчик відхилився на 15-20 см. При коливаннях диска відрахувати 10-15 максимальних відхилень зайчика від нуля шкали в одну вибрану сторону, реєструючи амплітуду першого  $A_1$  і останнього  $A_n$  відхилень, та розрахувати  $\lambda_0$ .

2. Дослідити затухання коливань диска у воді. Для цього наповнити посудину водою так, щоб диск був повністю занурений, та виконати такі ж виміри, що й для повітря. Виміряти секундоміром час, за який відбувається 10-20 повних коливань, і визначити період коливань.

3. Спостерігати затухання коливань диска у досліджуваній рідині (пропонуються водні розчини). При цьому слід діяти так, як і в описаних дослідах з повітрям та водою. Визначити період коливань  $T_v$  та розрахувати  $\lambda_v$ .

4. Виміряти температуру води та розчину. За допомогою таблиці ( $\epsilon$  в лабораторії) визначити коефіцієнт в'язкості відповідно до температури.

5. Кожен з дослідів по визначенню  $\lambda_0, \lambda_p, \lambda_v, T_0, T_v$ , і  $T_p$  повторити по три рази. Результати вимірювань занести в таблицю.

Середовище	$A_1$	$A_2$	$\lambda$	$\Delta\lambda$	$T$	$\eta$	$\Delta\eta/\eta$	$\eta_{\text{іст}}$
Повітря								
Середнє				$\sqrt{\langle \Delta\lambda_0^2 \rangle}$				
Вода								
Середнє				$\sqrt{\langle \Delta\lambda_B^2 \rangle}$				
Досліджувана речовина								
Середнє				$\sqrt{\langle \Delta\lambda_p^2 \rangle}$				

Погрішність визначити за формулою:

$$\frac{\Delta\eta_p}{\eta_p} = \sqrt{\left(\frac{\Delta T_B}{T_B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_p}{T_p}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda_p}{\lambda_p - \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda_0}{\lambda_B - \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0}\right)^2},$$

де  $\Delta T_B$  и  $\Delta T_p$ , визначаємо за формулою,

$$\Delta T^2 = \Delta T_{\text{сист}}^2 + t_{n,\alpha} \sqrt{\frac{\sum (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}.$$

### Контрольні запитання

1. Що таке коефіцієнт в'язкості? Визначити його з (4.45).
2. Довести формулу (4.49) для визначення  $\eta_p$ .
3. Довести формулу для розрахунків відносної похибки.

### 4.3.3 Лабораторна робота №19. Визначення коефіцієнта теплопровідності повітря

Прилади та приладдя: основний прилад, випрямляч, мікроампер метр, амперметр, вольтметр, потенціометр ПП-63.

### Теоретичні відомості

Перенесення тепла від більш нагрітої частини якого-небудь тіла до менш нагрітої може здійснюватися трьома засобами: теплопровідністю, конвекцією і випромінюванням. У випадку передачі тепла шляхом теплопровідності кількість тепла що проходить за час  $dt$  через площадку  $\delta S$ , перпендикулярно до напрямку, в якому існує градієнт температури, визначається рівнянням:

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} \delta S dt, \quad (4.51)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від властивостей речовини. Для газів коефіцієнт теплопровідності залежить від температури, він зростає при її збільшенні. Знак “–” у формулі означає, що перенесення тепла відбувається у напрямі зменшення температури.

Один з методів визначення коефіцієнта теплопровідності газів такий. По осі циліндричної труби, в середині якої знаходиться досліджуваній газ, натягається тонка дротинка. Якщо дротинка нагрівається електричним струмом, а температуру трубки підтримувати постійною, то в напрямі радіуса трубки виникає градієнт температури. Через будь-яку коаксіальну з дротинкою циліндричну поверхню радіуса  $y$  за одиницю часу пройде кількість тепла:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} 2\pi y l, \quad (4.52)$$

де  $l$  – довжина дротинки. Для стаціонарного процесу  $q$  – постійна.

Розділимо в цьому випадку змінні і проінтегруємо:

$$q \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = -2\pi l \int_{T_1}^{T_2} dT,$$

де  $y_1$  – радіус дротинки;  $T_1$  – її температура;  $y_2$  – внутрішній радіус трубки;  $T_2$  – температура газу біля внутрішньої поверхні трубки.

Внаслідок одержимо:

$$\lambda = \frac{q}{2\pi l} \frac{\ln(y_2 / y_1)}{T_1 - T_2}. \quad (4.53)$$

Отже, щоб визначити коефіцієнт теплопровідності, слід знати кількість тепла, яка переноситься від дротинки до стінки трубки шляхом теплопровідності, різницю температури між шарами газу, які безпосередньо прилягають до поверхні дротинки і трубки ( ми будемо вважати, що вона дорівнює різниці температур між дротинкою і трубкою), та розміри дротинки і трубки.

Величина у формулі (4.53) завжди менше тієї кількості тепла  $q' = IU$  ( $I$  – сила струму,  $U$  – напруга), яка виділяється дротинкою, тому що крім теплопровідності тепло може передаватися від дротинки до трубки тепловипромінюванням і конвекцією. Для оцінки кількості тепла, яке віддає дротинка шляхом випромінювання, можна скористатися законом Стефана-Больцмана, за яким з одиниці поверхні абсолютно чорного тіла за одиницю часу випромінюється енергія

$$W = \sigma T^4,$$



Абсолютні похибки вимірів електричних величин розрахувати відповідно класу точності приладів, згідно з (4.53) вивести формулу і оцінити відносну похибку розрахунку.

### Контрольні запитання

1. Як фізично обґрунтовується, що коефіцієнт теплопровідності газів в широких межах не залежить від тиску?
2. При яких умовах починає виявлятися залежність  $\lambda$  від тиску?
3. При яких умовах передача теплоти в газі відбувається переважно шляхом теплопровідності?
4. Вивести формулу (4.60) для розрахунку коефіцієнта теплопровідності.

### 4.3.4 Лабораторна робота №20. Визначення розподілу Гауса

Прилади та приладдя: прилад дошка Гальтона, лінійка, комп'ютер

#### Теоретичні відомості

Якщо результати досить великого числа вимірювань будь-якої фізичної величини  $a$  відкласти на числовій осі, то можна помітити, що вони будуть розташовані довільно, відхиляючись по обидві сторони від точки, яка відповідає істинному значенню величини,  $a_{\text{ист}}$ . Враховуючи це, можна в першому наближенні прийняти за істинне середнє арифметичне значення величини:  $a_{\text{сеп}} = \langle a \rangle$

$$a_{\text{ист}} = \langle a \rangle = (1/n) \sum_{i=1}^n a_i,$$

де  $n$  – число вимірювань.

За міру випадкової похибки можна розглядати середнє арифметичне абсолютних похибок окремих вимірювань:

$$\Delta a = (1/n) \sum_{i=1}^n |a_i - a_{\text{сеп}}|.$$

Однак, такий спосіб визначення випадкової похибки придатний тільки для орієнтовної оцінки. Більш строгим і надійним засобом визначення цієї величини з розрахунків, проведених на основі теорії ймовірності.

Результати окремих вимірювань є випадковими величинами, оскільки не існує способів, які могли б однозначно провіщувати їх появу. Виберемо на числовій прямій довільно два результати вимірювань  $a_i$  і  $a_k$ . Оскільки істинне значення величини  $a_{\text{ист}}$  невідоме, ми не можемо бути впевненими, що " $a_{\text{ист}}$ " знаходиться в інтервалі  $[a_i, a_k]$ . Не виключено, що " $a_{\text{ист}}$ " не належить  $[a_i, a_k]$ . Очевидно, що чим ширше вибраний інтервал, тим більша ймовірність того, що в нього потрапить істинне значення величини.

Оскільки результати окремих вимірювань є випадковими величинами, середньоарифметичне також буде випадковою величиною. Користуючись методами теорії ймовірності, Гауса довів закон нормального розподілу похибок, який задовольняє двом експериментальним закономірностям: 1) вимірювання з великими відхиленнями від істинного значення зустрічаються

рідше, ніж з малими; 2) вимірювання рівних за величиною, але різних за знаками похибок однаково ймовірні. Закон нормального розподілу похибок виражається формулою

$$\Delta n = n f(x) \Delta x = n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Delta x, \quad (4.54)$$

де  $n$  – число вимірювань із загального числа  $n$  вимірювань з похибками в інтервалі від  $x$  до  $x + \Delta x$  ( $x = a - a_{\text{іст}}$ ).

Величина  $\sigma^2$  називається дисперсією вимірювань. Вона є основним параметром, який визначає вид кривої розподілу випадкових похибок.

Зміст функції  $f(x)$  полягає в тому, що площа фігури, яка міститься між кривою, віссю  $X$  і двома вертикальними прямими, проведеними паралельно осі ординат від точок  $x_1$  та  $x_2$ , саме дорівнюють ймовірності, з якою похибка будь-якого виміру потрапляє в інтервал від  $x_1$  до  $x_2$ .

Середня квадратична похибка окремого результату

$$S_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 / n}. \quad (4.55)$$

Згідно з теоремою Гауса при  $n \rightarrow \infty$   $S_n$  прямує до сталого значення

$$S_n = 2 \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2, \quad (4.56)$$

а середня квадратична похибка середнього арифметичного

$$S_{n_x} = \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 / [n(n-1)]}.$$

Вона прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$  ( $n$  – число дослідів). Знайшовши  $S_n$  для великої серії вимірювань, ми можемо визначити  $\sigma^2$  згідно з (4.56), а отже і функцію  $S_{n_x} = \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}$  у законі нормального розподілу похибок.

Дослід з великим числом вимірювань можна моделювати за допомогою дошки Гальтона (рис. 4.6), яка відтворює картину випадкових відхилень від початкового напрямку руху частинок, які випробували порівняно велике число зіткнень з поставленими на їх шляху стержнями та ще й одна з одною. З бункера потік частинок потрапляє на 12 рядів металевих стержнів, які відхиляють частинки від вертикального напрямку. При співударі зі стержнями відбувається відхилення частинок в рівною ймовірністю вправо і вліво від стержня. Розсіяні частинки збираються в збірці з багатьма комірками. Числа, зібраних у комірках частинок, відтворюють закон нормального розподілу випадкових відхилень від початкового заданого напрямку руху.

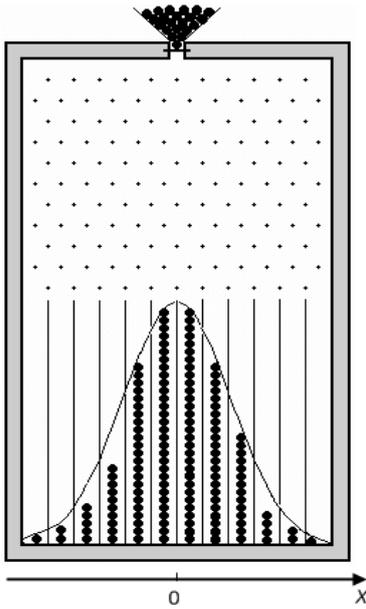


Рис. 4.6. Схема дошки Гальтона

Знайдемо, чому дорівнює середньоквадратична похибка для даної моделі. Очевидно, що для числа дослідів  $n$ , яке дорівнює числу зерен (тобто частинок), середнє квадратичне відхилення координати  $x$  зернин в комірках від середнього значення координати для всіх зернин  $x_{\text{сеп}}=0$  складає

$$S_n = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 / n}, \quad (4.57)$$

де  $x_j$  – відстань від положення  $j$ -ої зернини до середини горизонтальної шкали. Кількість зернин у кожній комірці пропорційна висоті  $n_i = B y_i$ , де  $i$  – номер комірки,  $B$  – коефіцієнт пропорційності. Тому загальна кількість зернин складає

$$n = B \sum_{i=1}^k y_i, \quad (4.58)$$

де  $k$  – кількість комірок.

Суму квадратів відхилень визначимо через подвійну суму, а внутрішню суму по комірці пов'яжемо з її висотою:

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{B y_i} x_i^2 = \sum_{i=1}^k B y_i x_i^2 = B \sum_{i=1}^k y_i x_i^2. \quad (4.59)$$

Підставляючи (4.59) та (4.58) у (4.57), маємо

$$\sigma = S_n = \sqrt{B \sum_{i=1}^k y_i x_i^2 / B \sum_{i=1}^k y_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i x_i^2 / \sum_{i=1}^k y_i^2}. \quad (4.60)$$

### Хід роботи

1. Проведіть три досліди, домагаючись таких розподілів, коли для малих відхилень висота заповнення комірок досить велика, а на краях дошки Гальтона мала, з тим, щоб розподіл не спотворювався із-за обмеженого розмірами дошки інтервалу відхилень.

2. Для кожного досліду "вимірюйте" усі значення  $x_i$  та  $y_i$ . За формулою (4.60) обчисліть  $\sigma$  та знайдіть  $\sigma_{\text{сеп}}$ .

3. За знайденими значенням  $\sigma_{\text{сеп}}$  розрахуйте функцію  $f(x)$  і побудуйте графік теоретичної функції  $\omega_i = f(x_i) \Delta x$  – ймовірності попадання у відповідні комірки від  $x_i$ . Тут  $\Delta x$  – ширина комірок ( $\Delta x \cong 1$  см).

4. Розрахуйте для всіх  $x_i$  експериментально одержану ймовірність попадання частинок у комірки  $\omega_{i, \text{експ}} = y_i / \sum_{i=1}^k y_i$ .

5. Побудуйте графік функції  $\omega_{i, \text{експ}}$  від  $x_i$  і порівняйте його з розрахованим за законом нормального розподілу й побудованим раніше графіком.

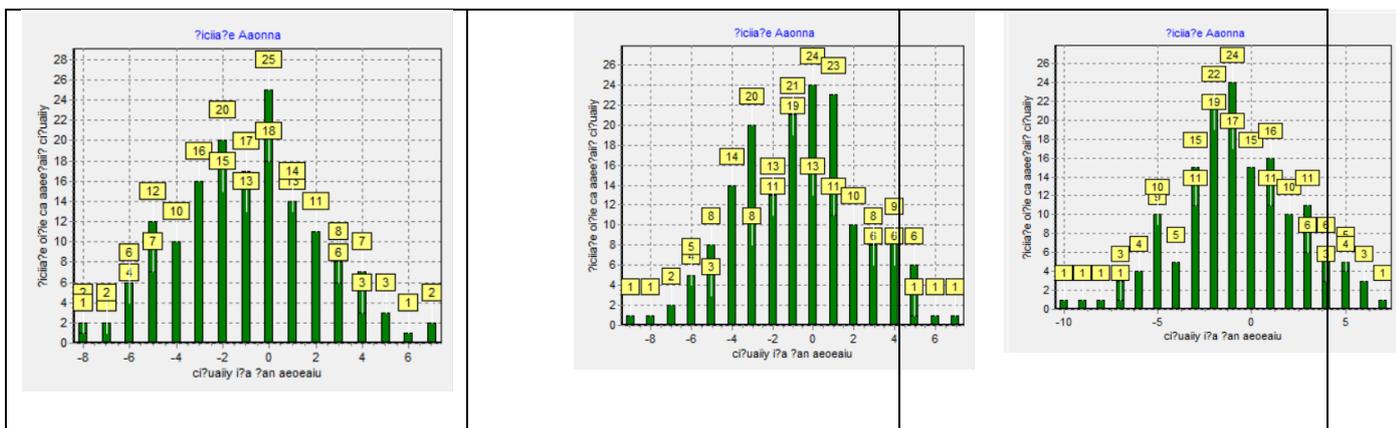
### Комп'ютерний варіант роботи

Комп'ютерний варіант роботи описаний у книжці «Фізика на Паскалі. Практикум» разом із програмою, яка відтворює розподіл. Роботу можна виконати, користуючись відповідним файлом з розширенням «.exe» на Паскалі або запустити файл з розширенням «\*.exe» у папці «Гаус» (Делфі варіант програми). З інтерфейсу програми буде зрозуміло, що робити.

Розподіл Гауса описує зокрема поведінку об'єктів, що виконують випадкові переміщення у випадкових напрямках. У даній лабораторній роботі розглядається наступна модель. Досить велика кількість частинок (матеріальних точок) розміщується на початку координат по осі  $X$ , але в точках з різними координатами по осі  $Y$ . Частинки виконують випадкові стрибки вправо та вліво –  $x[i] := x[i] + (2 * (\text{random}) - 1)$ ; (вираз у дужках приймає випадкові значення в межах від  $-1$  до  $+1$ ). Унаслідок великого числа переміщень деякі частинки зміщуються вправо, інші – вліво; у результаті встановлюється розподіл частинок за координатами. Цей розподіл повинен збігатися з розподілом Гауса. Отже, в даній роботі треба визначити характеристики розподілу за координатами не реальних матеріальних точок, а тих, координати яких розраховуються комп'ютером із застосуванням функції  $\text{random}$  – генератора випадкових чисел, в даному випадку від  $0$  до  $1$ , ( $\text{random}(N)$ , де  $N$  є цілим числом, дає випадкові цілі числа від  $0$  до  $N-1$ ).

### Завдання для комп'ютерного варіанту роботи

1. Зарисуйте декілька гістограм, що відповідають розподілу частинок по осі  $X$  у різні моменти часу.
2. Розрахуйте й побудуйте теоретичну функцію, що відповідає висвітленому значенню дисперсії. Якщо гістограми мають досить великі розбіжності, отримайте декілька гістограм для одного й того самого часу дослідження, усередніть їх. А для розрахунку теоретичної функції використайте усереднене значення дисперсії.



Приклад емуляції гістограми 1	Приклад емуляції гістограми 2	Приклад емуляції гістограми 3
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Рис. 4.7. Комп'ютерний варіант роботи

### Контрольні запитання

1. Що розглядають за міру випадкової похибки вимірювань?
2. Яким двом експериментальним закономірностям задовольняє закон нормального розподілу похибок?
3. Що називають дисперсією вимірювань?
4. На що впливає дисперсією вимірювань?

#### 4.3.5 Лабораторна робота №21. Визначення коефіцієнта дифузії оптичним методом

Рівноважний стан замкнутої системи характеризується однаковим значенням її параметрів по всьому об'єму. Якщо ж стан системи нерівноважний, наприклад  $T$ ,  $P$  або  $C$  у різних ділянках системи неоднакові, то в такій системі мимовільно виникнуть процеси, які прагнуть перевести систему в стан рівноваги. Дифузія представляє собою процес переміщення атомів з області з більш високою концентрацією в ту область системи, де їх концентрація менше. Іншими словами, дифузія відбувається, якщо є градієнт концентрації. Якщо вісь  $x$  паралельна напрямку градієнта концентрації, кількість речовини  $dM$ , що пройшло через площу  $dS$  за проміжок часу  $dt$ , визначається співвідношенням

$$dM = -D \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) dS dt, \quad (4.61)$$

де  $\frac{\partial C}{\partial x}$  – градієнт концентрації в напрямку нормальному до площі  $dS$ ,  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Знак мінус показує, що дифузійний потік направлений в бік зменшення концентрації. Це перший закон дифузії Фіка.

Розмірність коефіцієнта дифузії  $D$  –  $m^2/c$ , або  $(cm^2/c)$ .

Якщо розподіл концентрації змінюється з часом (нестационарний процес дифузії), для знаходження концентрації як функції координати і часу використовують другий закон Фіка

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (4.62)$$

який витікає з умови балансу речовини, що входить при дифузії в деяку малу область простору і виходить з неї через обмежуючі поверхні.

Запропонований у роботі метод визначення коефіцієнта дифузії  $D$  заснований на залежності коефіцієнта заломлення світла в рідині від концентрації розчиненої в ній речовини.

Якщо в плоско паралельну посудину налити рідкий розчин 1 з показником заломлення  $n_1$ , а зверху над ним знаходиться чиста рідина 2 з показником заломлення  $n_2$ , то межа між рідинами, що була різкою в початковий момент, з часом з-за дифузії стає менш чіткою - "розмивається". У цьому розмитому шарі змінюється показник заломлення. Зміна показника заломлення відбувається уздовж напрямку дифузійного потоку, тобто в напрямку  $x$  (рис.1), від значення  $n_1(C_1)$  в однорідному розчині 1 (внизу) до значення  $n_2(C_2)$  в чистій рідині 2 (вгорі). В області з перемінним показником заломлення світло поширюється не прямолінійно.

Залежність кута заломлення променю  $\gamma$  при проходженні кювети з розчином товщиною  $d$  - від градієнта коефіцієнта заломлення визначається за формулою

$$\gamma = d \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_x. \quad (4.63)$$

З формули (4.63) випливає, що найбільше відхилення зазнають промені, що проходять в тому місці, де градієнт показника заломлення максимальний. Навпаки, на границях однорідного розчину і чистої рідини з шаром, де йде дифузія (вгорі або внизу), де  $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$ , промені пройдуть практично без відхилення (рис.4.8).

Монохроматичний паралельний пучок світла, проходить через плоско паралельну кювету з чистою рідиною або однорідним розчином, можна зібрати за допомогою лінзи  $L$  у вузьку смужку на екрані  $E$ , що знаходиться на фокусній відстані від лінзи. При проходженні світла через неоднорідний розчин ми будемо мати набір променів, що виходять з кювети під різними кутами (рис.4.8).

На екрані в фокальній площині збиральної лінзи в цьому випадку спостерігається широка смуга світла, причому в її нижньому краї зберуться промені, відхилені на максимальний кут  $\gamma_{\max}$ . Максимальне відхилення від первинного напрямку набувають промені, які пройшли через область з найбільшим градієнтом показника заломлення.

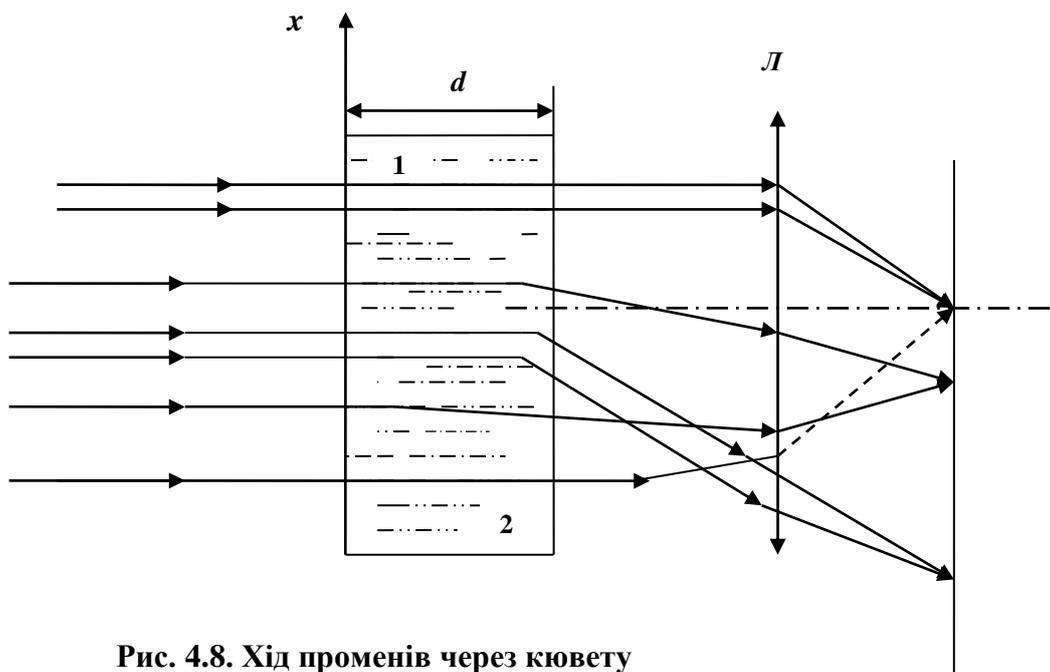


Рис. 4.8. Хід променів через кювету

Рішення, залежного від часу, для рівняння дифузії (4.62) можна шукати у вигляді:

$$C(x,t) = \frac{C_2 - C_1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + Const, \quad (4.63)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - концентрації в областях віддалених від дифузійної зони, тобто в однорідних областях розчину і чистої рідини. З (4.63) випливає, що

$$\left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{C_2 - C_1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

а отже, градієнт максимальний при  $x = 0$  (координата спочатку різкої границі), тобто

$$\left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{\max} = \frac{C_2 - C_1}{2\sqrt{\pi Dt}} \quad (4.64)$$

Для досить розбавлених розчинів можна прийняти, що показник лінійно залежить від концентрації і відповідно записати для градієнта показника заломлення на підставі

$$\left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)_{\max} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi Dt}} \quad (4.65)$$

Тоді максимальний кут відхилення променю:

$$\gamma_{\max} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi Dt}} d, \quad (4.66)$$

де  $d$  - ширина судини (товщина шару рідини), а  $t$  - час, що минув з початку дифузії. Оскільки час  $t$  не відомий з достатньою точністю, обчислювати  $D$  безпосередньо за формулою (4.67) не слід.

Проте, якщо виміряти кілька значень максимального кута відхилення променів (принаймні два) через відомі проміжки часу  $\Delta t$ , то це вже дозволить знайти коефіцієнт дифузії. Нехай відомі  $\gamma_{\max}=\gamma_1$  при  $t=t_1$  і  $\gamma_{\max}=\gamma_2$  при  $t=t_2$ .

Тоді з (4.67) легко отримати формулу, яка містить лише проміжок часу, а саме

$$D = \frac{d^2 (n_2 - n_1)^2}{2\pi \Delta t} \left( \frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} \right). \quad (4.68)$$

Для знаходження коефіцієнта дифузії застосовується прилад, який складається з джерела світла. Д (рис. 4.9), монохроматичного фільтра Ф, коліматора К, зорової труби Т, з мікроскопічним гвинтом, посудини П, що знаходиться на столику.

### Порядок роботи

Посудина П до половини наповнюється дистильованою водою (показник заломлення  $n = 1,333$ ). Потім проводиться спостереження в оптичну трубу зображення щілини і вимірюється за допомогою мікрометричного гвинта Г таке положення краю оптичної труби по вертикалі, що нитка окуляра збігається з нижньою межею зображення щілини. Цей вимір дозволяє знайти нуль відліку  $h_0$  для визначення кута максимального відхилення променів при наявності градієнта концентрації. За допомогою піпетки посудина по краплях доповнюється 20 %-ю водним розчином NaCl (показник заломлення = 1,364) у спеціально вмонтовану в посудину П вигнуту трубочку з тонкими отворами в її дні. Необхідно домогтися, щоб межа розділу між розчином і чистою водою була на рівні оптичної осі системи (рис.4.9).

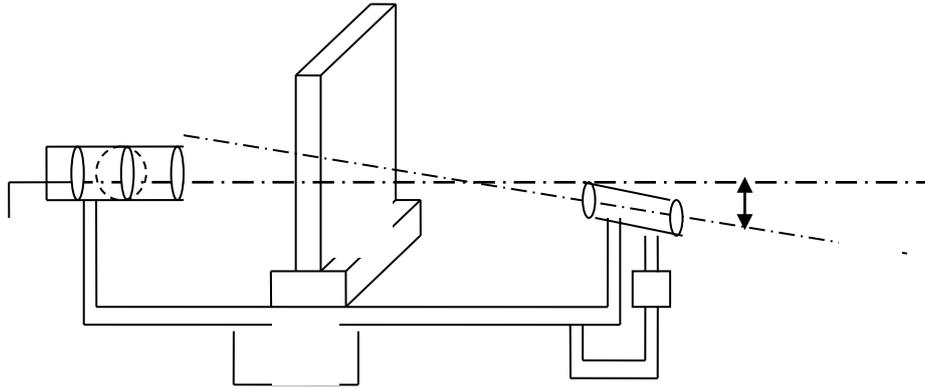


Рис.4.9.Схема приладу для визначення коефіцієнта

В полі зору труби буде видна картина, зображена на рис. 4.10.

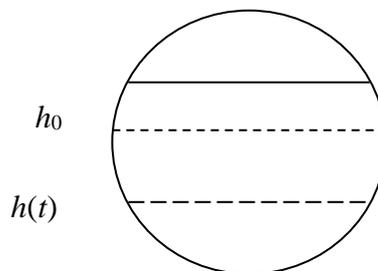


Рис. 4.10. Зміщення нижнього рівня сфокусованих променів

Зображення щілини при протіканні процесу дифузії становить собою досить широку світлу смугу, нижню межу якої дають максимально відхилені промені.

Обертанням мікрометричного гвинта окуляра нитка наводять на найбільш відхилену нижню межу (границя) По різниці обох відліків положення труби визначають кут зі співвідношення

$$\gamma = \gamma_{\max} = \text{tg} \gamma_{\max} = 0,5(h_0 - h(t))$$

де  $(h_0 - h(t))$  різниця показань відліку на мікрометричній гвинті;

$l$  – відстань від посудини до мікрогвинта  $\Gamma$ . ( $\gamma \approx \text{tg} \gamma$ ) тому, що  $l \gg h_0 - h(t)$ . У момент першого вимірювання положення нижньої межі  $h(t)$  виключають секундомір. Вимірювання положення кута  $\gamma$  проводять далі через 7, 10, 15, 20 та 30 хвилин між вимірами. Збільшення інтервалу часу між послідовними вимірюваннями кута  $\gamma$  зв'язана зі зменшенням градієнта концентрації і швидкості його вимірювання у процесі дифузії.

Для обчислення  $D$  за формулою (4.68) досить двох пар значень  $t_1, \gamma_1$  і  $t_2, \gamma_2$ . Проте для збільшення точності роблять більшу кількість вимірювань. Щоб ліквідувати систематичну помилку, треба комбінувати між собою  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , а не відносити неоднакові  $\gamma_k$  до одного і того ж  $\gamma_k$ .

Результати вимірювань і обчислень слід представити у вигляді таблиці. Обов'язково оцініть похибку визначення коефіцієнта дифузії.

## Контрольні запитання

1. Що таке дифузія?
2. Що таке градієнт густини у рівнянні Фіка?
3. Фізичний зміст коефіцієнта дифузії у емпіричному рівнянні переносу.
4. Перший закон Фіка для дифузії.

## 5 Термодинаміка

### 5.1 Теоретичні відомості

#### 5.1.1 Розподіл енергії молекул ідеального газу за ступенями вільності

Спочатку нагадаємо, що таке ступені вільності взагалі. Сумістив початок прямокутної системи координат з центром ваги нерухомого тіла. Якщо немає іншого напрямку перпендикулярного до осі  $X$ , по якому переміщення тіла також можливе, то кажуть, що тіло має один ступінь вільності поступального руху. Якщо існує тільки один перпендикулярний до осі  $X$  напрям, в якому переміщення тіла також можливе, то тіло має два ступені свободи поступального руху. Якщо можливі переміщення по осі  $Z$ ,  $X$ ,  $Y$ , то тіло має три ступені вільності. Якщо тіла можуть обертатись, то треба додати ступені вільності обертального руху. Їх також може бути три, навколо осі  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Тобто максимальне число ступенів вільності твердого тіла, яке не може деформуватись, дорівнює 6: три ступені поступального і три обертального руху. Так сферична молекула внаслідок повної енергії не приходить в обертальний рух і тому має три ступені вільності поступального руху. Для атомної гантелі подібна молекула має п'ять ступенів вільності і три поступального руху і два обертального – навколо двох осей, перпендикулярних одна до одної і до лінії, що сполучає атоми. Для визначення положення такої молекули в просторі досить 5 чисел: три координати центра ваги ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) і два кути. Схема, що складається з кількох не зв'язаних одне з одним тіл, має число ступенів вільності, яке дорівнює сумі ступенів вільності тіл, які входять до її складу.

Ми вже знайшли, що середня енергія поступального руху однієї молекули ідеального одноатомного газу дорівнює:  $\bar{E} = \frac{3}{2} kT$ .

Молекула такого газу має три ступені вільності поступального руху. Тобто на один ступінь вільності в середньому припадає енергія  $\frac{1}{2} kT$ . Коли ж молекула гантелеподібна і може обертатись, то постає питання – скільки енергії припадатиме на один ступінь вільності. Відповідь дає закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул, який був виведений Максвеллом на підставі законів статистики і припущення, що до молекул можна застосувати закони механіки Ньютона. Згідно з законом Максвелла *кінетична енергія розподіляється порівну між ступенями вільності, незалежно від того, чи є вони ступенями вільності поступального чи обертального руху.*

Лише на один ступінь вільності обертального руху припадає стільки ж енергії, скільки на один ступінь поступального руху тобто  $\frac{1}{2}kT$ . “Жорстка” молекула двохатомного газу має 5 ступенів вільності, тому для такої молекули  $\bar{E} = \frac{5}{2}kT$ .

Коли молекула двохатомного газу не жорстка, коли атоми в ній можуть коливатись, то середня енергія молекули при тій самій температурі буде ще більша.

При коливаннях атомів у молекулі енергія коливань може бути як кінетичною, так і потенціальною. Якщо взяти моль газу, тоді через те що кількість молекул дуже велика, можна казати – половина молекул має кінетичну енергію, а половина – потенціальну. Застосувавши до коливального руху закон рівномірного розподілу кінетичної енергії за ступенями вільності, знайдемо, що енергія, яка припадає на один ступінь вільності коливального руху дорівнює не  $\frac{1}{2}kT$ , а  $kT$ , бо в середньому на потенціальну енергію гармонічних коливань припадає стільки ж, скільки і на кінетичну, тобто  $\frac{1}{2}kT$ . Таким чином ступені вільності коливального і поступального рухів не рівноцінні: на один ступінь вільності коливального руху припадає енергії вдвоє більше, ніж на один ступінь вільності поступального руху.

Отже, середня кінетична енергія молекули двохатомного газу, коли атоми беруть участь у коливаннях дорівнює:  $\bar{E} = \frac{5}{2}kT + kT = \frac{7}{2}kT$ .

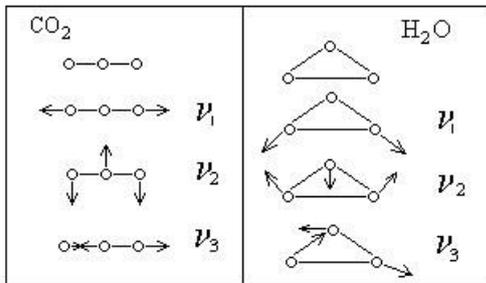


Рис. 5.1. Можливі напрями коливань триатомної молекули

Отже для першого випадку

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT + kT + 4kT = 6,5kT. \quad (5.1)$$

Для нелінійної молекули (рис. 5.1) число ступенів вільності поступального руху – три, обертального – три, коливального – три, отже

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT + 3kT = 6kT. \quad (5.2)$$

Для трьохатомної молекули є дві можливості: 1) молекула лінійна, наприклад CO<sub>2</sub>; 2) молекула нелінійна, наприклад H<sub>2</sub>O. Лінійна молекула має дев'ять ступенів вільності: три – поступального руху, два – обертального (навколо двох осей, перпендикулярних до осі молекули), чотири – коливального руху. Три можливі напрями коливань  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  зображені на рис. 5.1. Четвертий напрям коливань лежить у площині, перпендикулярній рисунку, причому частота цього коливання також  $\nu_2$ .

Загальна формула для середньої енергії багатоатомної молекули газу має вигляд:

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT + rkT + SkT = (3 + r + 2S) \cdot \frac{1}{2}kT, \quad (5.3)$$

де  $r$  -число ступенів вільності обертального руху,  $S$  -число ступенів вільності коливального руху.

Внутрішня енергія одноатомного газу складається з кінетичної енергії ( $U_k$ ), яка залежить від швидкостей теплового руху молекул, і потенціальної енергії  $U_n$ , яка залежить від взаємного положення молекул. В ідеальному газі немає сил взаємодії між молекулами, через те потенціальна енергія молекул дорівнює нулю. Отже повна внутрішня енергія ідеального одноатомного газу складається тільки з кінетичної енергії молекул. Тобто для 1 моля газу

$$U = \frac{3}{2}kT \cdot N_A = \frac{3}{2}RT. \quad (5.4)$$

А внутрішню енергію багатоатомного ідеального газу можна обчислити за формулою:

$$U = \bar{E} \cdot N_A = (3 + r + 2S) \frac{1}{2}RT. \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Теплоємність газів

Нагрівуючи тіло можна діяти двояко: можна залишати зовнішній тиск сталим, тоді при нагріванні об'єм тіла збільшуватиметься, або можна, нагрівуючи тіло, підтримувати його об'єм тіла сталим. У першому випадку для збільшення температури 1 г речовини на 1 К потрібно більше тепла, ніж у другому, бо в першому випадку передана тілу енергія витрачається не тільки на підвищення температури тіла, а й на роботу розширення, а в другому – тільки на підвищення температури тіла. У першому випадку кількість тепла, потрібна для нагрівання 1 г речовини на 1 К, називається питомою теплоємністю при сталому тиску ( $C_p$ ), а у другому – питомою теплоємністю при сталому об'ємі ( $C_v$ ). Усі тіла при нагріванні розширюються, а тому для всіх тіл треба розрізняти  $C_p$  і  $C_v$ . Проте для більшості твердих і рідких тіл зміна об'єму при сталому тиску після нагрівання дуже мала, отже  $C_p$  мало відрізняється від  $C_v$ .

Для газів характерний значно більший коефіцієнт теплового розширення, тому  $C_p > C_v$ . В загальному випадку, коли при нагріванні тіла змінюються як об'єм так і тиск, питома теплоємність має величину, відмінну від  $C_p$  і  $C_v$ . Отже, залежно від умов нагрівання і типу зміни  $p$  і  $V$ , тобто в залежності від типу процесу тіло має нескінченно велику кількість теплоємностей. Процеси, для яких теплоємність є стала величина, називають політропними. *Кількість теплоти, необхідна для того, щоб підвищити на 1 градус температуру 1 моля речовини називається молярною теплоємністю.*

Чому ж дорівнюють  $C_p$  та  $C_v$ ? Для випадку нагрівання при сталому тиску

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1, \quad (5.6)$$

де  $\Delta U_1$  - збільшення внутрішньої енергії,  $W_1$  - робота розширення. З другого боку

$$Q_1 = c_p \Delta T. \quad (5.7)$$

Якщо нагрівати при сталому об'ємі, то

$$Q_2 = \Delta U_2 + W_2 = \Delta U_2. \quad (5.8)$$

Бо  $W_2 = 0$  а з іншого боку за визначенням

$$Q_2 = c_v \Delta T. \quad (5.9)$$

Елементарна робота розширення газу при сталому тиску  $dW_1 = F \cdot dh = \rho \cdot S \cdot dh = p dV$ ,  $W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$ , для 1 моля  $pV_1 = RT_1$ , а

$pV_2 = RT_2$ , тобто  $p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$ . Оскільки в обох випадках газ нагрівався на однакове число градусів, а внутрішня енергія ідеального газу є функція тільки абсолютної температури, то  $\Delta U_1 = \Delta U_2$ . Якщо відняти (5.8) від (5.6), то отримаємо:

$$\underbrace{Q_1 - Q_2}_{(c_p - c_v)\Delta T} = \underbrace{\Delta U_1 - \Delta U_2}_{=0} + \underbrace{W_1 - W_2}_{=R\Delta T}, \quad (5.10)$$

та прийняти до уваги (5.7) і (5.9), дістанемо

$$C_p - C_v = R, \quad (5.11)$$

Це рівняння Роберта Майєра.

Якщо підставити (5.9) в (5.8):

$$C_v = \frac{\Delta U}{\Delta T}, \quad (5.12)$$

Внутрішня енергія одного моля ідеального газу  $U = \frac{3}{2}RT$ , тому

$$C_v = \frac{3}{2}R \quad (5.13)$$

Використовуючи (5.11) отримаємо

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R \quad (5.14)$$

Для багатоатомного газу із (5.12) внутрішня енергія одного моля:

$$\Delta U = (3 + r + 2S) \frac{1}{2} R \Delta T \quad (5.15_{13.10})$$

Тому

$$C_v = (3 + r + 2S) \frac{1}{2} R, \quad (5.16)$$

$$C_p = (5 + r + 2S) \frac{1}{2} R. \quad (5.17)$$

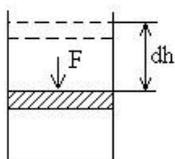
### 5.1.3 Внутрішня енергія як функція стану. Робота розширення газу при ізопроцесах

Є два способи передавання енергії: через роботу і через нагрівання. Мірою енергії, переданої від одного тіла до другого є кількість роботи або кількість тепла. Кількість тепла, виражена в теплових одиницях і еквівалентна одиниці роботи, називається тепловим еквівалентом роботи механічного еквівалента тепла. Так тепловий еквівалент 1 Дж дорівнює 0,239 кал, (1 кал=4,184 Дж). Систему тіл, взаємодія яких з середовищем полягає в обміні енергією через роботу та через нагрівання, називають термодинамічною системою. Фізичний стан системи характеризується сукупністю чисельних значень фізичних величин, таких як: температура, об'єм, діелектрична проникливість, коефіцієнт електропровідності, показник заломлення світла тощо. У термодинаміці для характеристики стану системи користуються трьома величинами: тиском  $p$ , питомим об'ємом  $V$  і температурою  $T$ . Ці величини називають параметрами термодинамічної системи. При цьому одні параметрів називаються внутрішніми, вони стосуються даної системи, другі – зовнішніми, вони стосуються зовнішніх тіл. Так  $V$  - зовнішній параметр, а  $p$  – внутрішній. Крім цих параметрів для характеристики термодинамічного стану деяких систем користуються концентраціями. Параметри стану пов'язані між собою так, що коли один з них змінюється, то змінюється принаймні ще один. Рівняння, яке виражає залежність між параметрами називається рівнянням стану (рівняння Клапейрона).

До рівняння входять три параметри –  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . Кожен з них за допомогою рівняння стану можна визначити як функцію двох інших. Тобто в цьому прикладі величини, що є функціями стану, були також і одним з параметрів стану. Проте існують і такі функції стану, які не є параметрами стану. Прикладом такої функції може бути так звана внутрішня енергія термодинамічної системи, яка є сумою всіх енергій системи, крім тієї частини кінетичної енергії молекул, яка обумовлена рухом системи як цілого.

Якщо параметри з часом не змінюються, то говорять, що система перебуває в стані рівноваги, коли параметри змінюються, то говорять, що в системі відбувається термодинамічний процес, наприклад зміна об'єму газу, що супроводжується зміною тиску й температури.

Якщо при процесі сталим залишається тиск, процес називають ізобарним, якщо сталий об'єм – ізохорний, якщо стала температура – ізотермічний. Крім цього, адіабатним називається такий процес, коли немає обміну теплом між системою і середовищем, а коловим процесом, або циклом, називається такий процес, при якому система виходить з якогось термодинамічного стану і зазнавши ряду змін, повертається до того самого стану.



Розглянемо газ в циліндрі з легкорухомим поршнем (рис. 5.2)

Нехай тиск, який давить на поршень підтримує його в рівновазі. При цьому газ перебуває під тиском  $p = \frac{F}{S}$ , Де

Рис. 5.2. Газ в циліндрі з поршнем

$S$  - площа поршня,  $F$  - вага піску та самого поршня. Якщо збільшити температуру газу на малу величину  $dT$ , газ розшириться і поршень переміститься на віддаль  $dh$ . При цьому тиск газу можна вважати незмінним через малість збільшення об'єму. Тоді елементарна робота, що її виконав газ при своєму розширенні дорівнює:

$$dW = F \cdot dh = p \cdot Sdh = pdV. \quad (5.18)$$

Тобто робота дорівнює добуткові тиску на приріст об'єму. Розглянемо роботу ізобарного розширення тіла. Якщо при підвищенні температури тіла від  $T_1$  до  $T_2$  об'єм зростає від  $V_1$  до  $V_2$ , а тиск залишається сталим, робота дорівнюватиме:

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1). \quad (5.19)$$

Якщо наше тіло є ідеальний газ, то  $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ , а  $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$  тоді

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1). \quad (5.20)$$

Підставивши в (5.19) маємо:

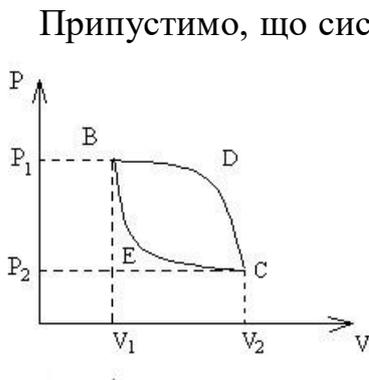
$$W = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1). \quad (5.21)$$

Розглянемо роботу ізотермічного розширення ідеального газу.

$dW = pdV$  із рівняння Клапейрона  $p = \frac{\nu RT}{V}$ , тому  $dW = \nu RT \frac{dV}{V}$  оскільки

$T = \text{const}$ , після інтегрування маємо:  $W = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ , де  $\nu$  - число молів,  $V_1$  - початковий об'єм,  $V_2$  - кінцевий об'єм.

### 5.1.4 Перше начало термодинаміки



**Рис. 5.3. Коловий процес в системі**

Припустимо, що система перебуває в стані з параметрами  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . В координатах  $P$ - $V$  цей стан зобразить точка  $B$  (рис. 5.3). Нехай внутрішня енергія системи в цьому стані дорівнює  $U_B$ . Нехай в системі відбувається коловий процес, тобто система, зазнавши ряду змін, знов повертається до початкового стану  $B$ . На підставі закону про збереження і перетворення енергії система після виконання процесу матиме ту саму внутрішню енергію, яку вона мала спочатку.

Тобто з закону збереження і перетворення енергії випливає важливий висновок: внутрішня енергія термодинамічної системи є однозначна функція стану, тобто кожному стану відповідає певне значення внутрішньої енергії.

Це є одне з формулювань 1 начала термодинаміки.

Інше формулювання дістанемо таким чином. Нехай система може перейти із стану “В” в стан “С” двома способами: через стан Д, або через стан Е. Чи залежить  $U_B-U_C$  від того яким способом система перейшла з “В” в “С”. За першим началом термодинаміки внутрішня енергія у станах В і С дорівнює якимсь певним величинам, через те зміна внутрішньої енергії системи при переході з одного стану в інший не залежить від способу переходу, вона залежить тільки від початкового і кінцевого станів. Це є ще одне формулювання першого начала термодинаміки. Розглянемо далі якусь термодинамічну систему. В результаті взаємодії системи з середовищем енергія переходить від середовища до системи, або, навпаки, від системи до середовища. Цей обмін можливий тільки через роботу або через нагрівання. Умовимося відносно знаків. Кількість тепла  $Q$  ми братимемо з додатнім знаком, якщо система дістає енергію від середовища. Кількість роботи  $W$ , що є мірою енергії, переданої через роботу, братимемо з додатнім знаком, якщо система виконує роботу над середовищем. Якщо система дістала кількість тепла  $Q$ , і над нею була виконана робота  $W$ , причому система перейшла із стану I до стану II, то на підставі закону збереження енергії можна записати:

$$U_2-U_1=-W+Q. \quad (5.22)$$

Рівняння (5.22) є кількісний вираз першого начала термодинаміки.

Або, переписавши це рівняння у вигляді

$$\Delta Q=\Delta W+\Delta U \quad (5.23)$$

можна сформулювати I начало термодинаміки ще й так: енергія  $Q$ , що їй система дістала від середовища через нагрівання, частково переходить у внутрішню енергію системи, а частково повертається середовищу через роботу. Якщо  $Q=0$  і  $\Delta U=0$  то і  $W=0$ . А такий уявний пристрій, що виконував би роботу не витрачаючи ніякої енергії називають вічним двигуном першого роду.

Вернемось до рис. 5.3. Площі під кривою BDC, охоплене віссю об’ємів, та ординатами  $BV_1$  і  $CV_2$ , є графічним зображенням роботи, виконаної системою при переході із стану В у С через BDC. З рис. 5.3. видно, що робота по шляху BEC менш ніж по шляху BDC. Отже робота, яку виконує система при переході з одного стану в інший залежить від шляху переходу, тобто кількість роботи і кількість тепла не є функціями стану термодинамічної системи.

### 5.1.5 Адіабатичний процес

Згадаємо, що адіабатичним називають такий процес, при якому системи не дістає і не відає тепла:

$$dQ = dW + dU, \quad V = const, \quad dU = dQ$$

$$dQ = 0 \rightarrow -dW = dU$$

$$, C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} \rightarrow dU = C_v dT .$$

Тобто при виконанні роботи над адіабатичною ізольованою системою (наприклад, при адіабатному стискуванні газу) внутрішня енергія системи збільшується, значить температура повинна підвищуватись. Крім цього, так як тепло системі не надається, то теплоємність системи при адіабатному процесі дорівнює нулю. Але нулю – це стале число, а процес, при якому теплоємність за-

лишається сталою, називається політропним. Тобто адіабатний процес є окремий випадок політропного процесу, при якому теплоємність дорівнює нулю.

Якщо ми маємо  $n$  молів: то  $dU = C_V n dT$ , де  $C_V$  - молярна теплоємність при сталому  $V$ . Оскільки  $dW = PdV$ , то  $-PdV = nC_V dT$ . Так як  $PV = nRT$ , то розділивши перше рівняння на друге, отримуємо  $-\frac{dV}{V} = \frac{C_V}{R} \cdot \frac{dT}{T}$ .

При підвищенні температури від  $T_1$  до  $T_2$ , об'єм збільшується від  $V_1$  до  $V_2$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = -\frac{C_V}{T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \text{або} \quad \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{C_V}{R}} \quad \text{або} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{C_V}{R}} \quad \text{або} \quad T_2 (V_2)^{\frac{R}{C_V}} = T_1 (V_1)^{\frac{R}{C_V}}$$

Тобто  $TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}$ .

Але  $\frac{R}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \gamma - 1$ , де  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ .

Тобто маємо

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (5.24)$$

Це рівняння адіабати ідеального газу. Або через те що  $PV = nRT$  можемо записати

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (5.25)$$

Це рівняння Пуассона. Знайдемо роботу адіабатного розширення ідеального газу.

$dW = PdV$ ,  $P = \frac{nRT}{V}$ , тому

$$dW = nRT \frac{dV}{V}. \quad (5.26)$$

Так як для адіабати  $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}$ , то після диференціювання:  $V^{\gamma-1} dT + (\gamma-1) \cdot T \cdot V^{\gamma-2} dV = 0$ .

Звідси

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T(\gamma-1)}. \quad (5.27)$$

Вносимо (5.27) в (5.26)

$$dW = -\frac{n \cdot R}{\gamma-1} dT \rightarrow W = -\frac{n \cdot R}{\gamma-1} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{n \cdot R}{\gamma-1} (T_1 - T_2). \quad (5.28)$$

### 5.1.6 Основні поняття, якими користується термодинаміка

Стан системи називається стаціонарним, коли всі параметри, що характеризують стан системи, в усіх частинах системи залишаються сталими як завгодно довго, тобто за часом не змінюються. Ця сталість параметрів може зберігатись сама собою, або підтримуватись за допомогою будь-яких зовнішніх процесів.

**Рівноважним** станом термодинамічної системи називається такий стан, який не змінюється з часом, причому ця незмінність не зумовлена будь-яким зовнішнім відносно системи процесом.

**Метастабільний** – нестійкий стан рівноваги системи, в котрій система може знаходитись довгий час.

**Лабильное** – нестійка рівновага, коли локального мінімуму енергії не спостерігається.

**Нерівноважним** – не може довго знаходитись в цьому стані.

Прикладом стаціонарного стану може бути сталість температури у кожній точці стержня, один кінець якого знаходиться у воді, що кипить при  $100^{\circ}\text{C}$ , а другий – у воді, де плаває лід, тобто при  $0^{\circ}\text{C}$ .

Слід розрізнити також рівноважні і не рівноважні процеси. При цьому процес з одного стану рівноваги до іншого називають релаксацією, а час, за який відновлюється стан рівноваги, називають часом релаксації тоді процес називають рівноважним, або квазістатичним, коли швидкість порушення стану рівноваги була менша за швидкість релаксації. Тобто, якщо стискувати газ у циліндрі, то після зміщення поршню на певну віддаль, ми виконаємо роботу наперед над тією частиною газу, яка безпосередньо прилягає до поршня. Молекули цієї частини дістануть додаткову енергію порівняно з молекулами інших частин об'єму. Через те газ вийде із стану статистичної рівноваги, тепер дійсні значення параметрів стану в різних частинах об'єму будуть неоднакові і відрізнятимуться від середніх. Але ж створена таким способом неоднорідність вирівнюватиметься через зіткнення поміж усіма молекулами, і знову становиться стан рівноваги з відповідним цьому станові розподілом швидкостей молекул. Якщо поршень переміщувати на стільки повільно, що швидкість його переміщення буде дуже мала порівняно з швидкістю релаксації, то можна вважати, що газ переходитиме безпосередньо від одного стану рівноваги до іншого (повільно).

**Процеси також можна поділяти на оборотні і необоротні.** Якщо в системі відбувається який-небудь процес, то вона переходить з певного початкового стану через проміжні стани в певний кінцевий стан. Якщо можна провести такий зворотній процес, який переводить систему з цього кінцевого стану знов у вихідний, причому система проходить через ті самі проміжні стани, що й при прямому процесі, то такі процеси називають оборотними. Коли ж процес не можна провести в зворотному напрямі через ті самі проміжні стани, що й прямий, то процес називають необоротний.

**Необхідною і достатньою умовою оборотності процесу є його рівноважність.** Тобто оборотним процесом, строго кажучи, може бути лише процес, що відбувається нескінченно малою швидкістю, оскільки умовою оборотності процесу є його рівноважність.

Отже оборотний процес відрізняється від необоротного тим, що він допускає можливість повернення системи до початкового стану так, що у навколишньому середовищі не відбувалось ні яких змін тоді як необоротний процес такої можливості не допускає.

### 5.1.7 Цикл Карно

Припустимо що ідеальний газ ізотермічно розширюється від стану **A** до стану **B** (рис 5.4) виконуючи роботу проти зовнішнього тиску. При цьому незмінність температури підтримується за рахунок одержання тепла від середовища. Ентропія ідеального газу є функція абсолютної температури, тобто  $U_A = U_B = \frac{3}{2} \nu \cdot RT$  де  $\nu$ - число молів газу. При переході із **A** до **B** газ виконує роботу.

З першого начала термодинаміки:  $\Delta U = -W + Q$  для  $T = \text{const}$   $\Delta U = 0$ , тому

$W = Q$ . Це значить, що при ізотермічному розширенні ідеального газу дістає енергію від середовища через нагрівання і цілком повертає її середовищу через роботу.

Щоб зробити систему здатною виконати ще роботу, треба повернути її до попереднього стану. Якщо виконати ізотермічне стискування газу, при якому його стан б змінювався б по кривій **BDA**, то при цьому була

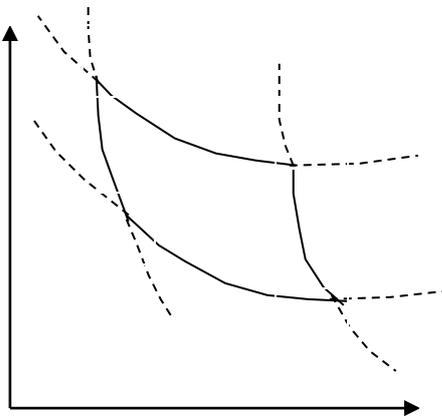


Рис. 5.4. Цикл Карно

б виконана менша робота, ніж по шляху **BCA**. Повторимо такий процес розширення по шляху **ACB** і стискування по шляху **BDA** певне число разів, можна було б виконати бажану кількість роботи. Такий процес називається коловим, або циклом. Особливе місце займає так званий цикл Карно, розроблений у 1824р., для з'ясування питання, від чого залежить коефіцієнт корисної дії теплових машин. Цикл Карно складається з двох оборотних ізотермічних процесів і двох оборотних адіабатних, які між собою чергуються.

Розглянемо його подрібніше у табличному вигляді

х	Шлях	Тип процесу	Початковий стан	Кінцевий стан	Кількість тепла	Виконана робота
	<b>AB</b>	ізотермічний	$T_1 V_1 P_1$	$T_1 V_2 P_2$	$Q_1$ нагрів	$+W_1$
	<b>BC</b>	адіабатний	$T_1 V_2 P_2$	$T_2 V_3 P_3$	0	$+W_2$
	<b>CD</b>	ізотермічний	$T_2 V_3 P_3$	$T_2 V_4 P_4$	$-Q_2$ холод	$-W_3$
	<b>DA</b>	адіабатний	$T_2 V_4 P_4$	$T_1 V_1 P_1$	0	$-W_4$

З таблиці видно:  $W = W_1 + W_2 - W_3 - W_4$  а  $Q = Q_1 - Q_2$ . Пояснимо таблицю **AB** – циліндр стоїть на нагрівнику  $T_1$ , параметри стану газу  $T_1 V_1 P_1$ , потім зменшимо

тиск, газ розшириться і виконує роботу  $W_1$  за рахунок внутрішньої енергії, через те температура трохи знизиться, і тепло  $Q_1$  почне надходити від нагрівника до газу доки температура знов стане такою ж, як і спочатку тобто маємо  $T_2 V_2 P_2$ . **BC**- поставимо циліндр на теплоізолятор і повільно зменшуючи тиск, дамо газу можливість рівноважно адіабатично розширюватись. При цьому газ виконує роботу  $W_2$  за рахунок внутрішньої енергії, і його температура знизиться до температури  $T_3$ , при цьому параметри газу  $T_3 V_3 P_3$ .

**CD** – знявши циліндр з ізолятора поставимо його на холодильник  $T_2$  і будемо проводити над газом ізотермічне рівноважне стискування, доки він не досягне стану  $T_4 V_4 P_4$ . При стискуванні газу виділиться тепло  $Q_2$ , яке перейде до холодильника, при цьому температура холодильника не зміниться в наслідок його нескінченної великої теплоємності. Газ виконує роботу  $-W_3$  (мінус через те, що над газом була виконана робота).

**DA** – знов поставимо циліндр на теплоізолятор і будемо стискувати газ адіабатно, так щоб процес був рівноважний. Стискування припинимо, коли газ повернеться до початкового стану  $T_1 V_1 P_1$ .

Із **I** начала термодинаміки  $\Delta U = -W + Q$

У кінці колового процесу система повертається до початкового стану, тобто  $\Delta U = 0$  для циклу. Або  $W = W_1 + W_2 - W_3 - W_4 = Q = Q_1 + (-Q_2)$ . Таким чином розглядуваний пристрій є прямий тепловий двигун, який відбирає від нагрівника  $Q_1$ , видає холодильникові  $Q_2$ , а решту  $Q_1 - Q_2$  перетворює в роботу. Відношення роботи, виконаної тепловим двигуном за один цикл до кількості тепла, взятого від нагрівника називають термодинамічним коефіцієнтом корисної дії теплового двигуна. Тобто

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|, \quad (5.29)$$

$$\text{тобто } \eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Тоді на шляху **AB**  $Q_1 = W_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ . Так само при ізотермічному стискуванні  $Q_2 = W_2$ . Робота ізотермічного стиснення ідеального газу  $|W_3| = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$

Тобто

$$\eta = 1 - \left| \frac{nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \right|. \quad (5.30)$$

Точки **A** і **D** лежать на одній і тій самій адіабаті, через те, застосовуючи рівняння Пуассона:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (5.31)$$

Аналогічно

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (5.32)$$

Поділивши (5.32) на (5.31) дістанемо

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (5.33)$$

Узявши це до уваги можна переписати (5.30) у вигляді

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.34)$$

Карно сформулював і довів теорему, яка складається з двох частин:

1. Усі оборотні машини, які виконують цикл Карно, мають, незалежно від використовуваного робочого тіла однаковий коефіцієнт корисної дії, якщо вони працюють із спільним нагрівником і спільним холодильником.

2. Коли дві машини виконують цикл Карно, причому одна машина оборотна, а друга необоротна, то ККД необоротної машини менший, ніж ККД оборотної, якщо ці дві машини мають спільний нагрівник та спільний холодильник.

### 5.1.8 Друге начало термодинаміки

*Формулювання В.Томсона:* неможливий такий періодичний процес, єдиним результатом якого було б перетворення теплоти в роботу. При цьому періодичний процес – це такий процес, що складається з колових процесів.

*Формулювання Клаузіуса:* теплота не може сама собою переходити від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

З цих тверджень, як наслідок, виникає неможливість теплового двигуна з ККД, рівним одиниці. Продовжуючи ці міркування, можна прийти й до іншого формулювання другого начала термодинаміки. Якщо від нагрівника відняте кількість тепла  $Q_1$ , а в роботу перетворилась кількість тепла  $Q_2$ , то різниця  $Q_1 - Q_2$  повинна бути переданою якомусь іншому тілу у вигляді теплоти. А щоб цей переділ дійсно відбувся, тіло, що дістає тепло  $Q_1 - Q_2$  повинно мати нижчу температуру, ніж температура тіла, від якого було взято тепло  $Q_1$ , бо за другим началом термодинаміки, теплота сама собою переходить лише від тіла з вищою температурою до тіла з температурою нижчою, яке в техніці називають холодильником. *Тобто вічний двигун другого роду неможливий*, тобто двигун, який діючи періодично, певними циклами, міг би одержувати теплоту від джерела теплоти і цілком перетворювати її в роботу.

Далі можна записати

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.35)$$

Знак рівності стосується оборотних процесів: знак нерівності – необоротних. Отже для оборотних процесів  $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  або  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ , або  $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$

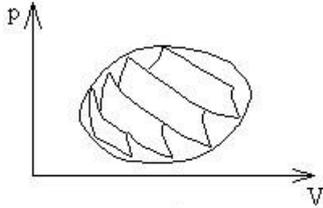
Або

$$\left( \frac{Q_1}{T_1} \right) + \left( -\frac{Q_2}{T_2} \right) = 0. \quad (5.36)$$

Тобто система, виконуючи цикл Карно, одержує від термостата з температурою  $T_1$  кількість тепла  $Q_1$ , а від термостата  $T_2$  кількість тепла ( $-Q_2$ ). За цієї умови формулу (5.36) можна коротко записати у вигляді

$$\sum \frac{Q}{T} = 0. \quad (5.37)$$

Припустимо тепер, що система виконує цикл, який не складається, як цикл Карно, з відрізків ізотерм та адіабат (рис 5.5).



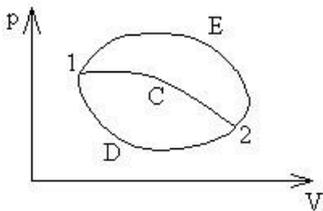
**Рис. 5.5.** Довільний цикл

Однак можна звести цей цикл до великої кількості дрібних відрізків ізотерм та адіабат. Чим більше ізотерм, тим менше цикл, зображений ламаною лінією (рис 5.5) відрізнятиметься від циклу, зображеному плавною кривою. Нескінченно малим відрізкам ізотерм відповідають нескінченно малі кількості тепла  $dQ$ . Через те підсумовування в (5.37) треба замінити інтегруванням по замкнутому контуру і замість (5.37) ми дістанемо:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (5.38)$$

Вираз  $\frac{Q}{T}$  - зветься зведеною теплотою, а формула (5.38) - це кількісний вираз другого началу термодинаміки.

### 5.1.9 Поняття про ентропію



**Рис. 5.6.** Оборотний процес

Застосуємо друге начало термодинаміки до циклу 1C2D1 (рис 5.6). Тоді  $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ . Цей інтеграл можна подати як суму двох інтегралів:

$$(C) \int_1^2 \frac{dQ}{T} + (D) \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0. \quad (5.39)$$

Букви показують, до якої частини кривої стосується інтеграл. Якщо існує інший оборотний процес, тоді

$$(E) \int_1^2 \frac{dQ}{T} + (D) \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0. \quad (5.40)$$

Зіставивши (5.39) та (5.40) одержуємо  $(E) \int_1^2 \frac{dQ}{T} = (C) \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ .

Звідси виходить, що при оборотному процесі  $\frac{dQ}{T}$  не залежить від шляху переходу з стану 1 до стану 2. Цей інтеграл залежить тільки від початкового та кінцевого стану системи. Тому можна ввести таку функцію  $S$ , зміна якої при

оборотному процесі переходу з стану 1 в стан 2 вимірюється  $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ . Цю функцію називають **ентропією**, тобто

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (5.41)$$

Якщо процес нескінченно малий, то для нього можна записати:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (5.42)$$

Це є найзагальніший вираз другого начала термодинаміки у застосуванні до оборотних процесів.

### 5.1.10 Приклади обчислення ентропії

1. Обчислення величини збільшення ентропії при плавленні та при випаровуванні.

При цих процесах температура під час перебігу процесу не змінюється, а тому в формулі (5.41) температуру можна винести за знак інтеграла, а  $\int dQ$  - є просто теплота плавлення  $\lambda$ , або, відносно, теплота випаровування  $r$  помножена на масу тіла  $m$ . Отже

$$\Delta S = \frac{\lambda \cdot m}{T}. \quad (5.43)$$

Величину  $\frac{\Delta S}{m}$  - називають питомою ентропією. Вона вимірюється в

$\left[ \frac{1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}{1\text{К}} \right]$ , тобто такими самими одиницями, як питома теплоємність.

2. Збільшення ентропії тіла при нагріванні і зменшення ентропії при охолодженні.

При нагріванні на  $dT$  градусів система дістає кількість тепла  $dQ = c \cdot m \cdot dT$

Питома теплоємність  $c$  взагалі залежить від температури. Обчислення інтеграла (5.41) буде найпростішим, якщо  $c$  означає середнє значення теплоємності в даному інтервалі температур  $T_1$ -  $T_2$ .

Тоді

$$\Delta S = cm \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.44)$$

Якщо  $T_2 > T_1$ , то  $\Delta S > 0$ . У випадку охолодження  $T_2 < T_1$ ,  $\Delta S < 0$  тобто  $S_2 - S_1 < 0$ , або  $S_1 > S_2$ .

3. Зміна ентропії при ізотермічному розширенні або стискуванні ідеального газу.

Для ізотермічного процесу  $T = \text{const} \rightarrow \Delta S = \frac{Q}{T}$ . За першим началом термодинаміки  $\Delta U = -W + Q$ , а для ізотермічного процесу  $\Delta U = 0$ , тобто  $Q = W$ . Робота розширення  $n$  молів ідеального газу дорівнює  $W = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$ .

Тому після підстановки маємо:

$$\Delta S = nR \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.45)$$

4. Зміна ентропії при адіабатному оборотному процесі.

При адіабатному процесі  $dQ = 0$ , тому  $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = 0$ .

Тобто при адіабатному процесі ентропія майже не змінюється.

### 5.1.11 Вираз другого начала термодинаміки для необоротних процесів

Для необоротного циклу Карно у відповідності з (5.35).

$1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}; \left(\frac{Q_1}{T_1}\right) + \left(-\frac{Q_2}{T_2}\right) = 0$ , або  $\sum_1^n \frac{Q}{T} < 0$ . Цю нерівність для циклу Карно можна поширити на довільний цикл таким самим способом, як ми це робили при оборотному циклі. Тоді  $\sum_1^n \frac{\delta Q}{T} < 0$ . Ми пишемо  $\delta Q$ , а не  $dQ$ ,  $\sum$  а не  $\int$ , тому що при необоротному циклі строго кажучи  $dQ$  не може бути нескінченно малим. А функція, для якої знаходиться сума не є неперервною, що необхідно для інтегрування. Припустимо, що відбувся коловий процес, який складається з оборотної (1C2) та необоротної (1E2) частини (рис.5.7).

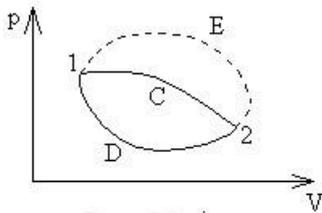


Рис. 5.7. Оборотний та необоротний процеси

Для оборотного процесу (1C2D1)

$$(C) \int_1^2 \frac{dQ}{T} + (D) \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0. \quad (5.46)$$

Для необоротного процесу (1E2)

$$\sum \frac{\delta Q}{T} < 0, \quad (5.47)$$

Підставивши (5.47) та (5.46) маємо

$$(E) \int_1^2 \frac{dQ}{T} > (E) \sum_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Але  $\int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1 = \Delta S$ , тобто  $\Delta S > (E) \sum_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ .

Отже при переході системи з одного стану в інший на необоротному шляху  $\sum \frac{\delta Q}{T}$  менше, ніж зміни ентропії  $\Delta S$ .

Тоді найзагальніший вираз другого начала термодинаміки можна написати так:  $dS \geq \frac{dQ}{T}$ .

Із всього цього можна зробити висновки: ентропія ізольованої системи ( $dQ=0$ ), в якій відбуваються оборотні процеси, залишається сталою  $\Delta S = 0$ . При необоротному процесі в ізольованій системі  $\Delta S > 0$ , тобто ентропія зростає.

### 5.1.12 Статистичне тлумачення другого начала термодинаміки

В замкнутій, цілком ізольованій системі всі процеси відбуваються адіабатично, тобто  $\Delta S \geq 0$ . Оскільки всі реальні процеси відбуваються в напрямі зростання ентропії. Коли настає рівновага, процеси припиняються, і, отже ентропія досягає найбільшого з можливих значень. *Тобто умовою рівноваги в замкнутій системі, з термодинамічного погляду є максимум ентропії.*

Коли в сосуді міститься одна частинка, яка може займати в ньому довільне місце і якщо поділити посуд на дві частини, то математична імовірність того, що частина знаходиться в одній з половин посудини дорівнює  $p = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Якщо в посудині містяться дві однакові частинки і їх можна розрізнити за поставленими на них номерами, то загальне число розподілів дорівнює  $2^2=4$ . Імовірність кожного з розподілів загальне дорівнює  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

№ мікророзподілу	Імовірність мікророзподілу	Розподіл		Номер макро-розподілу	Імовірність макро-розподілу	
		ліворуч	праворуч		Математична	Термодинамічна
1	1/4	1.2	-	I	1/4	1
2	1/4	1	2	II	2/4	2
3	1/4	2	1	III	1/4	1
4	1/4	-	1.2			

Якщо стерти номери на частинках, то мікро розподіли 2 й 3 не відрізнятимуться один від одного і різних розміщень буде тільки три (їх називають макро розподілами). Ймовірність розміщення II-1/2, а I та III – 1/4.

Число мікро розподілів, яке відповідає одному й тому самому макро розподілу називають *термодинамічною* імовірністю даного розподілу.

Отже для III і I вона дорівнює одиниці, а розподілу II - двом.

Якщо взяти одну з послідовностей для 5 частинок: 4 2 3 1 5.

Розділимо цю послідовність на стільки частин, скільки є ділянок об'єму, в якому вони вміщені. Наприклад, при двох ділянках : 42-315.

Перестановка частинок в ділянці не дає нового розподілу. Отже однако-вими будуть такі мікророзподіли:

1. 42-315	24-315
2. 42-351	24-351
3. 42-531	24-531
4. 42-513	24-513
5. 42-135	24-135
6. 42-153	24-153

Тобто дві частинки переставити місцями 2! способом, 3 частинки – 3! способом.

Отже число різних мікро розміщень, коли в одній ділянці об'єму міститься 2 частинки, а в другій – 3 дорівнює:  $W = \frac{5!}{2!3!}$

Загальна формула для обчислення числа мікро розподілів, які відповідають одному й тому самому макророзподілу має вигляд:  $W = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_n!}$

Якщо застосувати цю формулу до 12 частинок, що розміщені у 6 рівних відділеннях об'єму, то на прикладі розподілів:

2-2-2-2-2-2

3-3-2-2-1-1

4-4-4-0-0-0

6-6-0-0-0-0

12-0-0-0-0-0

Термодинамічна імовірність цих розподілів:

$$W_1 = \frac{12!}{2!2!2!2!2!2!} = 7484000; \quad W_2 = \frac{12!}{3!3!2!2!1!1!} = 3326400;$$

$$W_3 = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650; \quad W_4 = \frac{12!}{6!} = 924; \quad W_5 = \frac{12!}{12!} = 1.$$

Тобто найбільш імовірними є рівномірний розподіл.

Якщо розглянути ідеальний газ, де молекули дійсно не відрізняються одна від одної, і фізичні властивості такого газу не залежать від того, де міститься та чи інша молекула, а тільки від того, як розподілені молекули. Отже фізичні властивості газу залежать від макростану, а цими властивостями є тиск, температура, енергія і т.д. При цьому треба зауважити, що мікро тиск системи характеризується розподілом молекул не тільки по об'єму але й по енергіях.

На питання про напрям термодинамічних процесів статистика відповідає так:

У замкнутій системі відбувається самодовільний перехід її від стану менш імовірного до більш імовірного.

Той час, за який система переходить до найбільш імовірного стану називають часом релаксації.

### 5.1.13 Зв'язок між ентропією і термодинамічною ймовірністю

Нехай в об'ємі  $V_1$  міститься  $nN$  молекул, де  $N$ -число Авогадро,  $n$ -число молів. Виділимо в  $V_1$  об'єм  $V_2$ . ймовірність того, що будь-яка молекула знаходиться в  $V_1$ :  $P_1^{(1)} = 1$ .

Ймовірність того, що та ж молекула знаходиться в  $V_2$ :  $P_2^{(1)} = \frac{V_2}{V_1}$ , ймовірність того, що в  $V_2$  одночасно знаходиться дві молекули  $P_2^{(2)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$ , три молекули  $P_2^{(3)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^3$ , а  $nN$  – молекул  $P_2^{(nN)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{nN}$

За тією ж теоремою ймовірності одночасного знаходження всіх молекул в об'ємі  $V_1$ :  $P_1^{(nN)} = 1$ . Визначимо, у скільки разів більш ймовірно знаходження всіх молекул в  $V_1$ , ніж в  $V_2$ :

$$\frac{P_1^{(nN)}}{P_2^{(nN)}} = \frac{1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{nN}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{nN}.$$

Як відомо, відношення математичних ймовірностей дорівнює відношенню термодинамічних ймовірностей:  $W = \frac{W_1}{W_2} = \frac{P_1^{(nN)}}{P_2^{(nN)}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{nN}$ . Звідси

$\ln W = nN \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ . Але  $N = \frac{R}{k}$  тому  $k \ln W = nR \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ . Якщо порівняти з цим вираз для зміни енергії при ізотермічному збільшенні об'єму газу від  $V_2$  до  $V_1$  (5.45), то отримаємо

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right).$$

Можна побачити:  $\Delta S = k \ln W$  або  $S_1 - S_2 = k \ln W_1 - k \ln W_2$ .

Тобто можна припустити  $S_1 = k \ln W_1$  а  $S_2 = k \ln W_2$ .

Таким чином дістанемо загальну формулу

$$S_n = k \ln W_n. \quad (5.48)$$

Ця формула встановлює зв'язок між термодинамічною ймовірністю та енергією системи в даному стані. Рівняння (5.48) було обґрунтоване Больцманом. Згідно з (5.48) чим більша ймовірність того чи іншого стану, тим більша

ентропія в цьому стані. Ймовірність рівноважного стану максимальна. Ентропія в цьому стані також максимальна.

## 5.2. Перелік контрольних питань

1. Розподіл енергії молекул ідеального газу за ступенями вільності. Число ступенів вільності багатоатомної молекули. Залежність енергії багатоатомної молекули від числа ступенів вільності. Енергія 1 моля багатоатомного ідеального газу при високих та низьких температурах.
2. Теплоємність газів. Поняття молярної та питомої теплоємності. Рівняння Майєра для питомих та молярних теплоємностей.
3. Внутрішня енергія як функція стану. Робота розширення газу при ізопроцесах. Поняття параметрів стану, функції стану.
4. Перше начало термодинаміки. Різні формулювання першого начала термодинаміки. Адіабатний процес. Робота адіабатного розширення ідеального газу. Рівняння Пуассона в параметрах P-T, T-V. Політропний процес. Теплоємність ідеального газу.
5. Оборотні та необоротні процеси. Основні поняття, якими користується термодинаміка. Поняття рівноважного та стаціонарного стану. Поняття нерівноважного, метастабільного, лабільного стану. Поняття рівноважного процесу. Поняття оборотного процесу. Поняття циклу.
6. Цикл Карно та його ККД. Цикл Карно в координатах P-V. Поняття ККД теплового двигуна. ККД ідеального теплового двигуна. Теорема Карно.
7. Другий закон термодинаміки. Формулювання Планка другого начала термодинаміки. Формулювання Клаузіуса другого начала термодинаміки. Формулювання Томсона другого начала термодинаміки.
8. Поняття про ентропію. Приклади обчислення ентропії. Найзагальніший вираз другого закону термодинаміки. Збільшення ентропії при плавленні. Збільшення ентропії при нагріванні. Збільшення ентропії при плавленні. Збільшення ентропії при ізотермічному розширенні.
9. Вираз другого закону термодинаміки для необоротних процесів. Статистичне тлумачення 2 начала термодинаміки. Зв'язок між ентропією і термодинамічною ймовірністю. Поняття термодинамічної ймовірності розподілу станів. Загальна формула для обчислення числа мікророзподілів даного макророзподілу. Теорема Нерста.

## 5.3 Лабораторні роботи

### 5.3.1 Лабораторна робота №22. Визначення відношення теплоємностей газів методом Клемана і Дезорма

Прилади та приладдя: балон, водний манометр, насос.

#### Теоретичні відомості

Як відомо теплоємність визначається відношенням кількості теплоти  $\Delta Q$ , наданої тілу до підвищення температури  $\Delta T$ , яке при цьому відбувається:  $C = \lim(\Delta Q / \Delta T)$  при  $\Delta T \rightarrow 0$ . Залежно від маси тіла теплоємність поділяють на пи-

тому і молярну: теплоємність, віднесена до 1кг маси, називають питомою; віднесеною до одного моля молярною;

$$C = \Delta Q / m \Delta T; \quad C^m = c \cdot \mu.$$

Питома теплоємність вимірюється в Дж/(кгК), молярна – Дж/(мольК). Теплоємність залежить від природи речовини; температурного положення інтервалу підвищення температури; способу нагрівання. Теплоємність при сталому тиску завжди більша за теплоємність при сталому об'ємі. Це пояснюється тим, що при нагріванні газу при постійному тиску потрібна ще додаткова робота його розширення. Зокрема, для моля ідеального газу речовини між теплоємностями дорівнює універсальній газовій сталій:

$$C_p - C_v = R \text{ (закон Майєра).}$$

Провести безпосередній вимір теплоємностей  $C_p$  і  $C_v$  важко, тому що теплоємність газів незначна в порівнянні з теплоємністю посудини (балону). Клеман і Дезорм у 1819 році запропонували метод визначення відношення теплоємностей:  $\gamma = C_p / C_v$ .

Шляхом швидкого розширення газу, яке протікає адіабатично, тобто без теплообміну з навколишнім середовищем.

З першого закону термодинаміки можна одержати таке співвідношення для адіабатичного процесу:

$$PV^\gamma = \text{const} . \quad (5.49)$$

Його називають рівнянням Пуассона. Температура при адіабатичному процесі також змінюється:

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}; \quad TV^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (5.50)$$

Приведемо опис методу Клемана і Дезорма. Спочатку повітря в балоні знаходиться при атмосферному тиску. За допомогою насоса через кран  $K_2$  (рис.5.8, рис.5.9) нагнітаємо в балон деяку масу повітря, від тиск збільшується. Коли це нагнітання виконати досить швидко, температура газу в балоні підвищується. Через повний час температура газу встановиться і буде дорівнювати температурі зовнішнього повітря.

Це буде видно з того, що рівні рідини в колінах манометра більше не будуть змінюватись. Нехай різниця рівнів рідини в манометрі при цьому буде  $h_1$ . Позначимо через  $T_0$  абсолютну температуру оточуючого повітря, через  $P_1$  - тиск газу в посудині.

Тоді  $P_1 = P_a + h_1$ , де  $P_a$  - атмосферний тиск. Таким чином параметри газу в балоні при цьому будуть  $P_1, T_0$ .

Якщо швидко відкрити кран  $K_1$ , повітря в посудині буде розширюватись адіабатично, поки його тиск не зрівняється з атмосферним. Температура повітря при цьому знизиться до  $T_1$ . Параметри газу в другому стані будуть  $P_1$  і  $T_2$ . Якщо після цього кран  $K_1$  знову закрити, тиск у посудині почне поступово збільшуватись. Зростання тиску припиниться коли температура повітря в посудині стане рівною зовнішній температурі  $T_0$ . Позначимо тиск у посудині через  $P_2$ , а різницю рівнів, яка установилась в балоні, – через  $h_2$ . Це буде третій стан з параметрами  $P_2, T_0$

$$\text{При цьому } P_2 = P_a + h_2$$

Для адиабатичного переходу газу з вихідного в проміжний стан з параметрами  $P_0$  і  $T_2$ . Скористаємося рівнянням Пуассона в формі (5.50):

$$(P_a + h_1)^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_a^{1-\gamma} T_2^\gamma \quad (5.51)$$

$$\text{Або } \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{h_1}{P_a}\right)^{\gamma-1}.$$

Величини  $\frac{h_1}{P_a}$  і  $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$  малі в порівнянні з одиницею. Тому, розкладаючи ліву і праву частини виразу в ряд Тейлора і відкидаючи члени другого порядку малості, одержимо

$$1 + (\gamma - 1) \frac{h_1}{P_a} = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

звідки

$$P_a \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_1. \quad (5.52)$$

Але ліва частина цього виразу рівна  $h_2$ . Дійсно, для ізохоричного переходу с проміжного стану в кінцевий можна записати

$$\frac{P_a}{T_2} = \frac{P_a + h_2}{T_1},$$

Звідси випливає, що

$$h_2 = P_a \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Таким чином одержуємо рівняння

$$h_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_1. \quad (5.53)$$

З якого легко знайти  $\gamma$  – відношення теплоємностей:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (5.54)$$

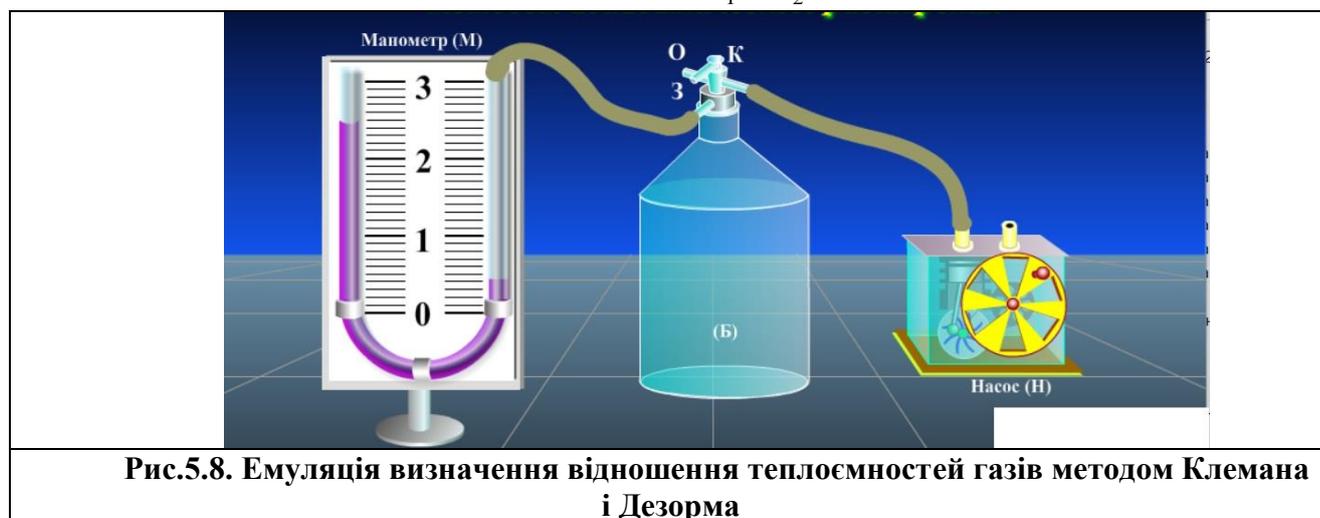
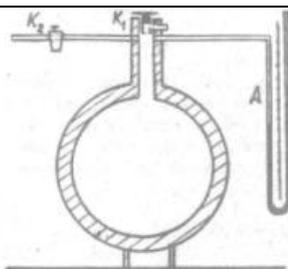


Рис.5.8. Емуляція визначення відношення теплоємностей газів методом Клемана і Дезорма



**Рис.5.9. Визначення відношення теплоємностей газів методом Клемана і Дезорма у режимі реального часу**

### Порядок роботи

1. Роботу можна виконати у режимі емуляції або у режимі реального часу
2. Відкрити кран  $K_2$  (малюнок) і при закритому крані  $K_1$  нагнітати в балон повітря так, щоб водяний манометр показав різницю між тиском в балоні  $P_1$  і атмосферним тиском  $P_a = 250-300$  мм р.ст.
3. Через 2-3 хвилини після досягнення в балоні кімнатної температури  $T_1$  установиться стабільна різниця рівнів води в манометрі. Зафіксувати цю різницю –  $h_1$ .
4. Швидко відкрити (на 0,5 с) і закрити кран  $K_1$ . При цьому газ адіабатично розширюється, а температура його змінюється.
5. Через кілька хвилин, потрібних для теплообміну системи з навколишнім середовищем і підвищення температури до  $T_0$ , визначити  $h_2$  - різницю між досягненим тиском у балоні і атмосферним тиском.
6. Дослід повторити 7-8 разів .
7. За формулою (5.54) розрахувати відношення  $\gamma = C_p/C_v$ .
8. Результати досліду занести в таблицю і привести розрахунок помилки досліду за формулою  $\Delta\gamma = t_{\alpha,n} \cdot \Delta\gamma_{\text{вун}}$ , де

$$\Delta\gamma_{\text{вун}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta\gamma_i^2 / [n(n-1)]} \quad \Delta\gamma_{\text{вун}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta\gamma_i^2 / [n(n-1)]}$$

№ з/п	$h_1$	$h_2$	$\gamma$	$\alpha$	$t_{\alpha,n}$	$\Delta\gamma$	$\gamma_{ic}$ <small>m</small>
1							
2							
3							
...							
10							

### Контрольні запитання

1. Як змінюється внутрішня енергія газу при його адіабатичному розширенні?
2. Як зв'язані молярні теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  з універсальною газовою сталою?

3. Одержати рівняння Пауссона.
4. Зробити розрахунок  $\gamma = C_p/C_v$  для ідеальних газів з одно-, двох і трьохатомними молекулами.

### 5.3.2 Лабораторна робота №23. Визначення відношення питомих теплоємностей $C_p/C_v$ газів за швидкістю звуку методом стоячих хвиль

Прилади та приладдя: звуковий генератор, електронний осцилограф, телефон, труба змінної довжини, теплоізольована труба сталої довжини з нагрівачем, терморезистор з потенціометром, посуд із стислим вуглекислим газом, посуд із стислим вуглекислим газом.

#### Теоретичні відомості

Метою роботи є визначення відношення  $\gamma = C_p/C_v$  для повітря і вуглекислого газу шляхом вивчення умов утворення стоячої хвилі, а також дослідження залежності швидкості звуку від температури.

Поширення хвиль у газах проходить адіабатично, тобто процеси стиснення і розрідження окремих прошарків настільки швидкоплинні, що теплообмін між ними не встигає відбуватись. Внаслідок цього швидкість поширення хвиль залежить від показника адіабати  $\gamma = C_p/C_v$  яка визначається за формулами

$$V = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad V = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (5.55)$$

де  $P$  – тиск;  $\rho$  – густина газу;  $C_p$  і  $C_v$  – теплоємність газу при сталому тиску і об'ємі відповідно;  $R$  – газова стала;  $T$  – абсолютна температура;  $\mu$  – молярна маса газу.

Залежність швидкості звуку від температури можна записати і другою формулою. Відомо, що  $\rho = \frac{\rho_0}{(1 + \alpha t)}$ , де  $\rho_0$  – густина газу при  $t=0$  C;  $\alpha$  – коефіцієнт розширення газу; ( $\alpha=0.004$ ). Тоді згідно з (5.55)

$$V_t = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho_0}} (1 + \alpha t) = V_0 \sqrt{1 + 0.004t}, \quad (5.56)$$

$V_0$  – швидкість звуку при  $t=0$ °C.

Якщо швидкість звукових хвиль і температура газу відома, то з (5.55) можна знайти значення відношення теплоємностей:

$$\gamma = \mu V^2 / RT, \quad (5.57)$$

причому швидкість звуку зв'язана з частотою  $\nu$  і довжиною хвилі  $\lambda$  співвідношенням  $V = \lambda \nu$ .

Хвиля, яка поширюється вздовж труби, багатократно відбивається від торцевих стінок, і внаслідок взаємодії всіх відбитих хвиль виникають дуже складні коливання.

Картина спрощується, якщо довжина труби дорівнює цілому числу половини довжини хвилі, тобто  $L = n\lambda/2$ .

Тоді відбиті хвилі збігаються (в окремих місцях трубки) по фазі з падаючими хвилями, посилюють одна одну, амплітуда коливання зростає, настає резонанс. При ідеально пружних стінах труби виникає стояча хвиля, яка переносить енергію, стінкам відповідають вузли стоячої хвилі. В дійсності втрати енергії при відбитті мають місце, вони компенсуються за рахунок добавок енергії (наприклад, від телефону). Амплітуди падаючої і відбитої хвиль не бувають однаковими, а тому у вузлах мають місце не нульові коливання. Тому, установивши мікрофон, навіть біля відбиваючої стінки труби, тобто у вузлі, можна, змірюючи наведений сигнал чітко зафіксувати появу резонансу при зміні довжини труби або частоті коливання.

### Опис приладу

Схема приладу наведена на рис.5.10. Звукові коливання в трубі генеруються телефоном Т і фіксуються мікрофоном М. Мембрана телефону приводиться в рух змінним струмом звукової частоти, джерелом якої є генератор (ЗГ). Електричні коливання від мікрофона спостерігаються на екрані осцилографа.

На нерухомій трубі розміщений нагрівач, підключений до регульованого джерела напруги.

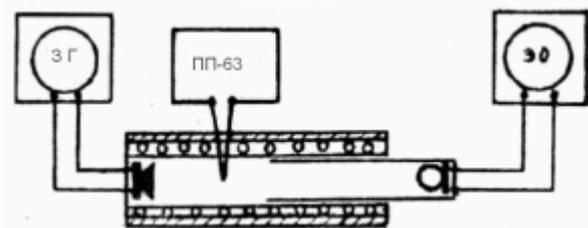


Рис. 5.10. Схема приладу для знаходження швидкості звуку в газах.

Вимірювання температури виконується за допомогою термопари, підключеної до потенціометру ПП-63 (див. окремий опис цього пристрою). Температура знаходиться за формулою  $t = t_{ноч} + \alpha_t \cdot E(mV)$  де – стала, яка вказана на установці;  $E$  – показання потенціометра (ЕРС термопари в мілівольтах).

Для знаходження швидкості руху у вуглекислому газі нерухома труба за допомогою спеціального пристрою з'єднується з балоном із стислим  $CO_2$  (методика роботи з стислим газом приведена окремій інструкції). Перед початком роботи необхідно ознайомитися з правилами експлуатації приладів. Роботу розпочинають після прогріву генератора і осцилографа (3-5 хв.).

### Обчислення швидкості звуку

Знаходження умов при яких виникає резонанс ( на осцилографі при цьому спостерігається максимальна амплітуда), проводиться двома способами.

1. При незмінній частоті звукового генератора  $\nu$ , а значить і довжині хвилі, резонанс можна отримати, змінюючи довжину труби  $L$ . Якщо довжину труби поступово збільшувати, то спостерігається ряд послідовних резонансів, для яких виконуються умови

$$l_1 = 1 \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad l_2 = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad \dots, \quad l_k = k \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad \dots, \quad l_n = n \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (5.58)$$

Записавши  $\lambda$  через  $l_n$  і підставивши у співвідношення  $V = \lambda \nu$ , отримаємо

$$V = 2\nu \frac{l_n}{n}, \quad (5.59)$$

Якщо установка не дозволяє (для даної частоти) установити довжину труби, що відповідає першому ( $n=1$ ) і декільком наступним ( $2, 3 \dots k-1$ ) резонансам, а  $k$ -й і наступні за ним резонанси фіксуються чітко, то для розрахунку швидкості звукової хвилі слід використовувати формулу  $V = 2\nu \frac{l_n - l_k}{n - k}$ .

2. При постійній довжині труби  $L$  змінюють частоту звукового генератора, а значить, і довжину звукової хвилі. Для послідовних резонансів маємо

$$L = n \frac{\lambda}{2} = \frac{V n}{2 \nu}. \quad (5.60)$$

Звідси

$$V = 2L \frac{\nu_n}{n} \quad \text{або} \quad V = 2L \frac{\nu_n - \nu_k}{m}, \quad (5.61)$$

де  $\nu_k$ - початкова резонансна частота,  $n = k + m$ .

### Порядок роботи

Підготовка до замірів. Зібрати установку і увімкнути в електромережу електронний осцилограф і звуковий генератор. Після їх прогрівання увімкнути тумблер «Промінь» на електронному осцилографі і повернути ручку «Яскравість». На екрані повинна з'явитися лінія. Тумблер «Вид роботи» генератора поставити на положення «Зовнішнє навантаження», множник частот поставити на положення «x10». На екрані осцилографа будуть спостерігатися електричні коливання звукової частоти.

Визначення швидкості звуку в повітрі. Згідно з написаним вище, швидкість звуку визначають: 1) при фіксованій частоті звукового генератора; 2) при постійній довжині труби.

1. При фіксованій довжині труби встановити частоту в інтервалі 1000-2000 Гц. При фіксованій частоті повільно змінити довжину труби і послідовно відмічати відстані по шкалі, що відповідає резонансу. Заміри повторити для 3-4 різних частот. Отримані значення занести в таблицю і побудувати графік залежності довжини труби (ордината) від номера резонансів (абсциса). З графіка знайти  $(l_n - l_k) / m$ , підставити в формулу (5.61) і знайти  $V$ .

2. При фіксованій довжині труби повільно збільшувати частоту генератора від 500 до 2500 Гц і відмічати всі резонансні частоти (в точках різного зростання амплітуди коливання). Переконайтеся в збіганні результатів, проводячи заміри при зменшенні частот. Отримані результати занести в таблицю і побудувати графік: вісь абсцис – номер резонансу, вісь ординати – відповідні частоти.

Із графіка знайти  $(v_n - v_k) / m$  підставити в формулу (5.61) і знайти  $V$ .

Порівняти обидва способи визначення  $V$  і знайти середнє значення.

3. Знайти  $\gamma$  згідно з формулою (5.57) і оцінити похибку отриманого значення.

4. Для знаходження залежності швидкості звуку від температури вмикають нагрівач. Після кожного збільшення напруга на 5-10 В чекають приблизно 10-15 хв. для встановлення теплової рівноваги. Потім знаходять швидкість звуку другим способом (фіксування довжини труби). Нагрівання проводять до 80-100°C (3-4 mV). Після закінчення замірів і розрахунків будують графік залежності швидкості звуку від температури, порівнюють результати з теоретичною залежністю.

5. Для знаходження швидкості звуку і відношення теплоємностей у вуглекислому газі труби з'єднуються з балоном з стислим вуглекислим газом, який виштовхує повітря. Всі заміри виконуються одним з вищезгаданих способів (як правило, другим).

1 спосіб					2 спосіб.				
№ з/п	$v$	$L$	$V$	$\Delta V$	$v$	$L$	$V$	$\Delta V$	$\gamma$
1									
2									

### Контрольні запитання

1. Виведіть формулу для знаходження швидкості звуку в газі.
2. Порівняйте теоретичні значення  $\gamma = C_p / C_v$  для повітря і вуглекисло-го газу.
3. Чи залежить  $\gamma$  від температури у вибраному температурному інтервалі?

### 5.3.3 Лабораторна робота №24. Вивчення питомої теплоємності рідини методом спостереження швидкості охолодження (нагрівання)

Прилади та приладдя: два однакових калориметри з рідиною, нагрівальною спіраллю, мішалкою та термометрами.

У даній роботі визначається теплоємність досліджуваної рідини за допомогою порівняння швидкості охолодження цієї рідини та води, теплоємність якої  $C_g$  відома.

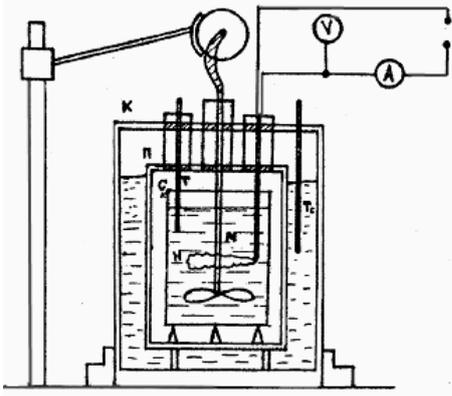


Рис. 5.11. Схема калориметра

Установка складається з двох однакових калориметрів (рис.5.11), в одному з них – досліджувана рідина, в другому вода. Обидві рідини нагріваються за допомогою спіралей з однаковим електричним опором (Н- нагрівник).

У стакані з рідиною знаходиться також мішалка М та термометр Т. Між внутрішньою і зовнішньою калориметричними посудинами заливається вода, температура якої визначається термометром Тс.

Потік тепла від стакану С<sub>к</sub> до внутрішньої калориметричної посудини П визначається різницею температур рідини та залитою водою простору між калориметричними посудинами, які вимірюються термометрами Т та Тс.

### Теоретичні відомості

Коли тіло, нагріте до температури  $t$ , знаходиться в середовищі з більш низькою температурою  $t_c$ , то теплопередача, названа в цьому випадку тепловіддачею, відбувається шляхом теплопровідності через тонкий непереміщуваний шар рідини чи газу на поверхні тіла за допомогою конвективного переносу в об'ємі рідини чи газу. Згідно з формулою Ньютона для тепловіддачі кількість теплоти  $dQ$ , яка віддається тілом з площею поверхні  $S$  за час  $dt$ , пропорційна різниці температур  $(t-t_c)$ ,  $dQ=\alpha S(t-t_c)dt$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі. Зниження температури тіла за час  $dt$ , що пов'язане з утратою теплоти  $dQ$ , залежить від його теплоємності  $dQ=-mcdt$ , де  $m$  – маса тіла,  $C$  – питома теплоємність.

Порівнюючи праві частини в формулах для  $dQ$  та розділяючи змінні, одержимо

$$mc \frac{dt}{t-t_c} = \alpha S dr \Rightarrow mc \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t-t_c} = \alpha S \tau. \quad (5.62)$$

При цьому допускаємо, що температура середовища постійна.

Тепловий еквівалент калориметричної системи (кількість теплоти, яка потрібна для нагрівання її на 1 градус) дорівнює сумі теплових еквівалентів калориметра з мішалкою, нагрівника, зануреної частини термометра та теплоємності рідини  $mc$ . Позначимо його  $W+mc$ .

Запишемо рівняння (5.62) для обох використаних у лабораторній роботі калориметричних систем:

$$(W_p + m_p C_p) \ln \frac{t_1 - t_c}{t_2 - t_c} = (\alpha S)_p \cdot \tau_1 \quad (5.63)$$

$$(W_B + m_B C_B) \ln \frac{t_1 - t_c}{t_2 - t_c} = (\alpha S)_B \tau_2 \quad (5.64)$$



### Контрольні запитання

1. Що таке питома теплоємність? В яких одиницях вона вимірюється?
2. Яку теплоємність визначали в даній роботі ( $C_p$  чи  $C_v$ )?
3. Вивести формулу для визначення  $C_x$ .
4. Якими способами може здійснюватись теплообмін?

#### 5.3.4 Лабораторна робота № 25. Визначення теплоємності металів методом охолодження

Прилади та приладдя: зразки металів, електронагрівач, штатив з термопарами, потенціометр ПП-63.

#### Теоретичні відомості

Металевій зразок, температура якого вища за температуру оточуючого середовища  $T_0$ , охолоджується в цьому середовищі. Кількість теплоти  $q$ , яку зразок втрачає за інтервал часу  $\Delta t$ , може бути виражене як

$$q = - \int c \rho \frac{dT}{dt} \Delta t dV, \quad (5.66)$$

де  $C$  - теплоємність металу;  $\rho$  – його густина;  $V$  – об'єм зразка.

Ця теплота виділяється через поверхню зразка  $S$  і може бути виражена за допомогою формули Ньютона:

$$Q = \int L(T - T_0) \Delta t dS, \quad (5.67)$$

$L$  - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні зразка.

Прирівнюючи вирази (5.66) і (5.67) одержимо:

$$- \int c \rho \frac{dT}{dt} dV = \int L(T - T_0) dS. \quad (5.68)$$

Враховуючи, що величини  $C$ ,  $\rho$ ,  $dT/dx$  не залежать від координат точок об'єму, а величини  $L$ ,  $T$ ,  $T_0$  не залежать від координат точок поверхні, то одержимо:

$$c \rho \frac{dT}{dt} V = L(T - T_0) S. \quad (5.69)$$

Перепишемо вираз (5.69) у вигляді:

$$\frac{d(T - T_0)}{T - T_0} = - \frac{dS}{mc} dt, \quad (5.70)$$

де  $m = \rho V$  – маса зразка. Знак «мінус» показує, що із збільшенням часу температура  $T$  зразка зменшується. Інтегрування рівняння (5.70) дає формулу

$$\ln(T - T_0) = -(LS/c \cdot m)t + \ln(T_m - T_0), \quad (5.71)$$

де  $T_m$  – температура тіла в початковий момент часу. При інтегруванні виразу (5.70) було зроблено припущення, що  $LS/c \cdot m$  не залежить від температури.

Рівняння (5.71) виражає лінійну залежність  $\ln(T - T_0)$  від часу а величина  $LS/c \cdot m$  – це тангенс кута нахилу цієї прямої до осі часу.

Якщо експериментально криві охолодження  $T(t)$  двох зразків з різних металів, але однакової форми й розмірів, і побудувати для них графіки залежності  $\ln(T - T_0)$  від  $t$ , то можна визначити відповідні тангенси, тобто величини  $\text{tg}L = LS/c \cdot m$ .

Відношення цих тангенсів  $\epsilon$ :

$$K = \frac{tgL_1}{tgL_2} = \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1} \quad (5.72)$$

В припущенні що коефіцієнти тепловіддачі однакові для обох зразків в однакових інтервалах температур. Якщо теплоємність  $c_2$  одного зі зразків відома, з (5.72) можна визначити теплоємність другого зразка:

$$c_1 = \frac{c_2 m_2}{K m_1} \quad (5.73)$$

Схема установки (рис.5.13) містить електронагрівач 1 закріплений на штативі 2, ковзаючи муфту 3 та термопару 4 із закріпленим на кінці керамічної соломки 5 зразком.

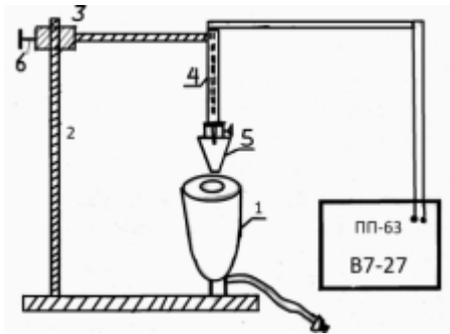


Рис. 5.13. Схема установки

### Порядок роботи.

Виникаючи при нагріванні зразка і спаю термопары е.р.с (електрорушійна сила) виміряти за допомогою електронного вольтметра В7-27.

Гвинтом 6 послабити кріплення муфти і опустити зразок в електронагрівач. Після нагрівання до  $T=600$  К зразок підняти, повернути держак зразка на  $180^\circ$  С і закріпити гвинтом 6. Нагрітий зразок охолодити у середовищі (повітря з температурою  $T_0$ ) до температури нижче  $100^\circ$  С. Через кожні 20-30с робити запис різниці потенціалів за показниками вольтметра. За допомогою таблиці визначити відповідні температури зразка.

Таблиця 5.1

е.р.с., mV	
$T - T_0$	
$\ln(T - T_0)$	

Таблиця 5.2

T, К	272	333	393	453	513	573	623
	0,091	0,094	0,0975	0,1008	0,1038	0,107	0,109

Одержані криві розбити на прямолінійні відрізки. Для кожного з таких відрізків визначити  $tgL$  знайти значення теплоємності заліза і алюмінію при різних температурах за формулою (5.73), вважаючи теплоємність міді відомою. При цьому слід мати на увазі, що у формулі (5.73) значення теплоємностей  $c_1$  і

$c_2$  відповідають однаковим температурам. Температура залежності теплоємності міді наведена в таблиці (5.2).

### Контрольні запитання

1. За якими механізмами може відбуватися теплообмін?
2. Який зміст величини  $T$  у формулах (5.71) і (5.72) ?
3. Яка будова металу?

### 5.3.5 Лабораторна робота №26. Визначення теплоємності рідини подвійним калориметром

Прилади та приладдя: два однакові калориметри з рідиною, нагрівальною спіраллю, мішалкою та термометром.

У цій роботі теплоємність досліджуваної рідини вимірюється методом порівняння з відомою теплоємністю води. Прилад складається з двох однакових калориметрів (описані в лабораторній роботі №24), але в цій роботі простір між зовнішнім і внутрішнім калориметричними судами водою не заповнюється. В одному з калориметрів внутрішній стакан заповнюється досліджуваною рідиною (трансформаторним маслом), в іншому водою. У кожний калориметр занурена нагрівальна спіраль. Опір спіралей в обох калориметрах однаковий. Тому при послідовному з'єднанні спіралей згідно з законом Джоуля-Ленца в них виділяється однакова кількість теплоти. Для вирівнювання температури в усьому об'ємі рідини у кожному калориметрі є мішалка, яка обертається за допомогою електродвигуна.

Якби не було втрат тепла калориметром в зовнішнє середовище, то кількість тепла, одержана першим та другим калориметром від нагрівачів за однаковий проміжок часу, визначалася б за формулою:

$$Q_1 = (m_1 c_x + w_1) / (T_{k1} + T_{n1}) \quad (5.74)$$

$$Q_2 = (m_2 c_B + w_2) / (T_{k2} + T_{n2}) \quad (5.75)$$

Тут  $m_1$  – маса досліджуваної рідини в першому калориметрі;  $m_2$  – маса води у другому калориметрі;  $w_1$  і  $w_2$  – теплові еквіваленти першого та другого калориметрів ( $W$  – це сумарна теплоємність внутрішнього стакана, мішалки, зануреної частини термометра та нагрівача;  $C_x$  – питома теплоємність досліджуваної рідини;  $C_B$  – питома теплоємність води;  $C_B=4187$  Дж/(кг·К);  $T_{n1}$  і  $T_{n2}$  – початкові температури першого калориметра (досліджувана рідина) і другого калориметра (вода);  $T_{k1}$  і  $T_{k2}$  – кінцеві температури першого та другого калориметрів.

Із умови рівноваги  $Q_1=Q_2$ , з цього випливає що:

$$C_x = \frac{(C_B m_2 + w_2)(T_{k2} - T_{n2}) - w_1(T_{k1} - T_{n1})}{m_1(T_{k1} - T_{n1})} \quad (5.76)$$

(без урахування поправки на теплообмін).

Через те що деяка кількість тепла буде проходити крізь оболонку калориметра, треба врахувати поправку до зміни температур на теплообмін. У цьому випадку формула (5.76) має вигляд:

$$C_x = \frac{(C_B m_B + w_2)(\Delta T + \theta_2) - w_1(\Delta T_1 + Q_1)}{m_1(\Delta T_1 + Q_1)}, \quad (5.77)$$

де  $\Delta T_1 = T_{k1} - T_{n1}$ ;  $\Delta T_2 = T_{k2} - T_{n2}$ ;  $Q_1$  і  $Q_2$  – поправки на теплообмін для першого та другого калориметрів. Поправку на теплообмін можна визначити за наближеними формулами:

$$Q_1 = (V_{01} + V_{k1}) \cdot (\Delta \tau_1 / 2), \quad Q_2 = (V_{02} + V_{k2}) \cdot (\Delta \tau_2 / 2),$$

де  $V_{01}$  і  $V_{k1}$  – швидкості зниження температури досліджуваної рідини в початковому та кінцевому періодах (при вимкненому нагрівачі);  $V_{02}$  і  $V_{k2}$  – ті ж швидкості для другого калориметра (з водою);  $\Delta \tau = \tau_k - \tau_n$  – час роботи нагрівачів, його треба брати однаковим для обох калориметрів.

На рисунку, котрий зображує температурний хід для обох калориметрів, позначені всі величини необхідні величини, необхідні для розрахунків.

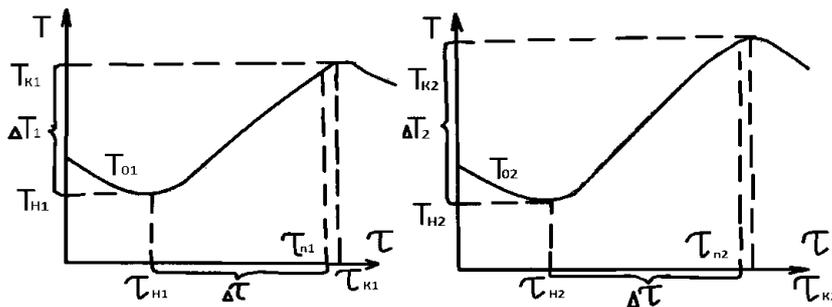


Рис. 5.14. Температурний хід для двох калориметрів

Значення  $V_{02}$  і  $V_{k2}$  визначають за практично прямолінійною залежністю зміни температури від часу на початковому та кінцевому періодах (охолодження), як модулі куткових коефіцієнтів в нахилу кривих (точніше дотичних проведених до відповідних частин, що безпосередньо примикають до головного періоду). Якщо задача побудови графіка викладачем не ставиться, швидкість охолодження можна знайти наближено як відношення зниження температури до відповідного проміжку часу.

### Порядок роботи

1. Ввімкнути електродвигуни, які обертають мішалку калориметрів. Двигуни залишити ввімкнутими до кінця досліду.

2. Підключити нагрівачі до джерела живлення паралельно і підняти температуру рідини у кожному калориметрі до  $t = 25^\circ\text{C}$  (влітку до  $30^\circ\text{C}$ ), при досягненні цієї температури послідовно включити нагрівачі. Внаслідок теплової інерції температура підніметься трохи вище ніж  $26^\circ\text{C}$ .

3. Коли рівень ртутного стовпчика термометра досягне  $26^{\circ}\text{C}$ , ввімкнути секундомір і не вимикати до кінця досліду.

4. Через кожні  $0.1^{\circ}\text{C}$  записувати значення температури який понижується в обох калориметрах (досліди з пониженням температури для обох калориметрів починаються як правило не в однаковий час), і відповідні їм проміжки  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Температуру зменшити приблизно на  $25^{\circ}\text{C}$

5. Підключити нагрівачі послідовно і ввімкнути їх. Записати відповідний ввімкненню момент часу  $\tau_n$ . Через кожні  $0.5^{\circ}\text{C}$  записувати підвищення температури і відповідні їм моменти часу  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Температуру збільшити на декілька градусів ( $\sim 5$ ).

6. Вимкнути нагрівачі і відміряти відповідні моменти часу. Записати максимальні значення температури які будуть досягнуті в моменти часу  $\tau_{k1}$  і  $\tau_{k2}$  із-за теплової інерції.

7. При зниженні температури в кожному калориметрі на  $0.1^{\circ}\text{C}$  записати відповідні моменти часу  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Після зменшення температури приблизно на  $1^{\circ}\text{C}$  зупинити секундомір і вимкнути електродвигуни.

8. Побудувати графіки залежності  $T(\tau)$  для води та досліджуваної рідини, за якими знайти  $V_{01}, V_{02}, V_{k1}$  і  $V_{k2}$ .

9. Результати вимірювань та обчислень занести до таблиці. Оцінити похибку  $s_x$ , прийнявши помилку знаходження помилку знаходження  $T+\theta$  рівною  $\theta/4$ .

### Контрольні запитання

1. Які основні елементи конструкції калориметра?
2. Чому спіралі калориметрів з'єднують послідовно?
3. Яка з двох поправок  $\theta_1$  або  $\theta_2$  є більшою?

## 6 Реальні гази. Фазові перетворення речовини

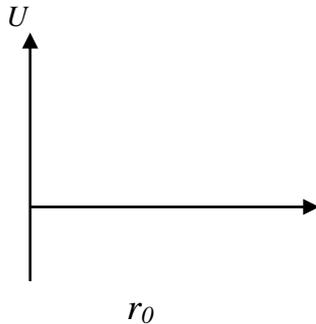
### 6.1 Теоретичні відомості

#### 6.1.1 Реальний газ. Рівняння Ван дер Ваальса

Старанно поставлені досліди показують, що закони Бойля-Маріотта і Гей-Люсака приблизно правильні тільки щодо не надмірно густих газів при не дуже низьких температурах.

Відхилення від законів ідеального газу зумовлені наявністю у реальних газів власного об'єму самих молекул і сил взаємного притягання між молекулами. Нам уже відомо, що між частинками газів діють як сили притягання, так і сили відштовхування. Частіше замість сили  $\mathbf{F}$ , яка є рівнодіючою сил притягання і відштовхування, користуються взаємною потенціальною енергією частинок  $\mathbf{U}$ :  $F = -\partial u / \partial r$ . З рис. 6.1 видно, що на віддалі  $r_0$  сила притягання урівноважується силою відштовхування і  $\mathbf{U}$ -мінімальна.

На віддалі більший за  $r_0$  переважає сили притягання, на віддалі, менший за  $r_0$  - сила відштовхування. Якщо побудувати залежності “ $pV$ ” від “ $p$ ” (ізотерми Амага), то у випадку виконання закону Бойля-Маріотта “ $pV(p)$ ” мали б вигляд прямих ліній, паралельних осі тисків. Насправді це не так.



**Рис. 6.1.** Вплив відстані на взаємодію молекул

Одним з рівнянь стану реального газу є рівняння, запропоноване Ван-Дер-Ваальсом (1837-1923) в 1873р. Хоч згодом було запропоновано багато інших рівнянь стану реальних газів, хоч деякі з них точніше передають поведінку реальних газів, проте ні одне з них не може зрівнятися з рівнянням Ван-Дер-Ваальса, щодо простоти зовнішнього вигляду і теоретичного обґрунтування. Спочатку Гірн запропонував надати рівнянню стану реальних газів такого вигляду:

$$(p+Z) \times (V-b) = RT, \quad (6.1)$$

де  $Z$  - поправка на сили притягання між молекулами;  $b$  - поправка на об'єм молекул. Ван-Дер-Ваальсу лишилось повніше розкрити фізичний зміст поправок  $Z$  і  $b$ . Він запропонував вважати, що

$$Z = a/V^2, \quad (6.2)$$

де  $a$  - коефіцієнт пропорційності, що називається атракційною сталою,  $V$  - молярний об'єм газу, тобто об'єм одного молю газу.

Тому, підставивши (6.2) у (6.1) отримаємо рівняння Ван-Дер-Ваальса

$$(P + a/V^2)(V-b) = RT. \quad (6.3)$$

Сталі “ $a$ ” і “ $b$ ” визначаються експериментально. Однак треба зауважити, що рівняння Ван Дер Ваальса дає незадовільні кількісні результати. Це привело до чисельних спроб вивести інші, точніші рівняння стану реальних газів, їх понад 150. Сам Ван Дер Ваальс зазначив однією з причин недосконалості те, що не береться до уваги утворення асоціації (груп, скупчень), які мають властивості однієї молекули. Так було отримане рівняння з урахуванням сил взаємодії між молекулами, об'єму молекул та міжмолекулярних асоціації, рівняння Вукаловича-Новікова:

$$(P + a/V^2)(V-b) = RT(1 - (A/V) - (B/V^2)),$$

де  $A$  та  $B$  - відомі функції температури. Існує також рівняння Боголюбова:

$$pV = RT \left[ 1 - \sum (k \times (k+1)) \times \left( \frac{B_k}{V^k} \right) \right],$$

де  $B_k$  - функції температури, які можна обчислити, знаючи закон взаємодії між молекулами.

### 6.1.2 Застосування рівняння Ван дер Ваальса для опису фазового переходу рідина-пара

Якщо розглядати фазові переходи, необхідно спочатку звернутися до переходу пар-рідина. Дуже велику роль при аналізі цього переходу відіграє рівняння Ван дер Ваальса:

$$p = \frac{RT}{v_{\mu} - b} - \frac{a}{v_{\mu}^2}.$$

Якщо побудувати ізотерми Ван дер Ваальса (рис. 6.2), то при високих температурах останній член в формулі можна відкинути. Тоді ізотерма буде гіперболою. Якщо рівняння переписати у вигляді  $pv_{\mu}^3 - (RT + pb)v_{\mu}^2 + v_{\mu} - ab = 0$  то аналіз цього рівняння покаже, що може бути один чи три дійсних корені.

Ко  
жному  
кореню  
відпові-  
дають  
точки  
перети-  
ну ізо-  
терми  
 $P(V)$  та  
ізобари  
 $P = \text{const}$

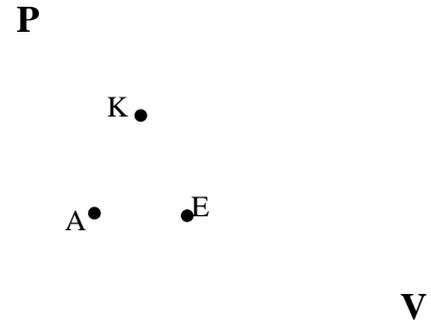
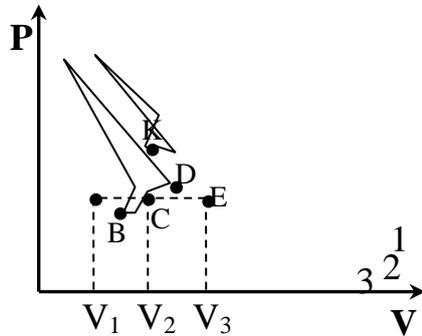


Рис. 6.2. Ізотерми Ван дер Ваальса

– 3 кореня може бути на ізотермі вигляду (3) при нижчих температурах та не дуже високих тисках. Це  $V_1$ ,  $V_2$  та  $V_3$ . Є також температура  $T_K$ , при якій всі три кореня дорівнюють одне одному (на ізотермі (2)). Для реальних речовин ізотерми мають інший вигляд. При зменшенні об'єму при низьких  $T$   $P$  зростає доти, поки не починає перетворюватися у рідку фазу (AB). Коли весь газ перетворюється у рідину (B) тиск починає дуже швидко зростати. Тобто в реальних газах замість хвилеподібної теоретичної ділянки виникають горизонтальні. Однак у реальної речовини можна отримати проміжки AB і DE. Це можливо, коли в газі немає центрів конденсації (пилу) і можна отримати перенасичену пару з підвищеним тиском.

При конденсації тиск різко спадає до значення, що відповідає горизонтальній ділянці. Також при відсутності бульбашок газу в рідині можна отримати перегріту рідину при швидкому зменшенні тиску. Коли рідина починає кипіти, тиск збільшується до рівноважного. Перенасичена пара та перегріта рідина це метастабільні стани (нерівноважні) речовини. Точка K на ізотермах відповідає критичному стану речовини, а область зі штриховкою – область не перетвореної в рідину пари. При  $T > T_K$  неможливо газ перетворити в рідину.

### 6.1.3 В'язкість рідин. Поверхневий натяг. Формула Лапласа

В'язкість – здатність чинити опір переміщенню однієї її частини відносно іншої під дією зовнішніх сил. Тобто як і у газів. Для рідин також справедлива формула Ньютона для визначення сили внутрішнього тертя. В'язкість рідин залежить від температури, зменшуючись з її підвищенням.

Бачинський О.Й, показав, що коефіцієнт в'язкості рідин залежить від густини і збільшується з її підвищенням.

Для характеристики потоку рідин застосовують число Рейнольда.

Наявність у рідин вільної поверхні, яка є границею фаз, призводить до існування особливого типу явищ, так званих *поверхневих*.

Система рідина – насичена пара при  $T = \text{const}$  перебуває в термодинамічній рівновазі. Для замкненої системи швидкість випаровування з поверхні рідини буде дорівнювати швидкості конденсації. При чому густина рідини у сотні тисяч разів ( $6 \cdot 10^5$  разів) більша за густину насиченої пари. Зважаючи на це, сили міжмолекулярної взаємодії в рідині набагато більші ніж у парі. Якщо розглянути молекулу всередині рідини, сили взаємодії з молекулами, що оточують обрану молекулу, буде зрівноважено. Але на поверхні рідини сила взаємодії з молекулами пари набагато менша за сили з боку молекул рідини. Результируючу силу  $F_p - F_n$ , віднесену до одиниці площі поверхні, називають внутрішнім тиском. Тобто молекули на поверхні мають більшу енергію. Для того, щоб перевести молекулу з середини рідини на поверхню, тобто для збільшення поверхні рідини, потрібно виконати роботу проти внутрішніх сил:

$$dA = -\sigma dS,$$

де  $\sigma$  – вільна поверхнева енергія (або коефіцієнт поверхневого натягу);  $dS$  – площа елемента поверхні.

Із-за особливого стану молекул поверхневого шару рідини виникають сили поверхневого натягу, що намагаються скоротити площу вільної поверхні:

$$dF = \sigma dl,$$

де  $F$  – сили поверхневого натягу;  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $dS$  – площа елемента поверхні.

Сили поверхневого натягу завжди дотичні до поверхні рідини у разі викривленого меніску (вільної поверхні) сили поверхневого натягу створюють додатковий тиск  $\Delta P$  порівняно з плоским меніском. Для опуклого меніску  $\Delta P > 0$ , для угнутого  $\Delta P < 0$ .

Для сферичної краплі радіусом  $r$  при зменшенні поверхні на  $dS$  виконується робота  $dA = \sigma dS$  одночасно зменшується об'єм на  $dV$ , тобто:

$$dA = PdV$$

$$\text{але } S = 4\pi r^2 \quad \text{або} \quad dS = 8\pi r dr, \quad \text{або}$$

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\sigma}{R} \cdot \cos \theta = \rho gh \quad \left( r = \frac{R}{\cos \theta} \right)$$

Для меніску довільної форми (рис. 6.3) за формулою Лапласа:  $\Delta p = \pm \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + p_0$ , де  $r_1$  та  $r_2$  – головні

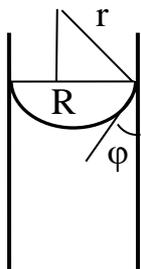


Рис. 6.3. Схема меніску довільної форми

радіуси кривизни;  $\sigma \sim 1/T$  з підвищенням  $T$   $\sigma_T$  збільшується, а  $\sigma_{рідини}$  зменшується.

Якщо нанести краплю рідини на поверхню твердого тіла у випадку змочування вигляд вона матиме як на (рис. 6.4 а), а у випадку незмочування – як на (рис. 6.4 б). Явище змочування описується крайовим кутом  $\theta$ , що утворюється дотичною до поверхні рідини біля поверхні твердого тіла та поверхнею твердого тіла біля границі рідина – тверде тіло. При змочуванні  $\theta < \pi/2$ , при незмочуванні  $\theta > \pi/2$ . При чому  $\sigma_{12} + \sigma_{23} \cdot \cos\theta = \sigma_{13}$ .

Крайовий кут змочування пов'язаний з коефіцієнтами поверхневого натягу на границі тверде тіло (1) – рідина (2) – газ (3).



Рис. 6.4. Крапля рідини на поверхні твердого тіла:  
а) змочування; б) незмочування

#### 6.1.4 Плавлення та кристалізація. Переохолодження рідин

*Молекулярний рух у рідині:* молекули рідини роблять коливання подібно до молекул твердих тіл, але положення рівноваги, відносно яких ці коливання відбуваються, лишаються незмінними тільки протягом певного проміжку часу, а потім зміщується. Тобто у рідинах поєднується риси, характерні для будови газів і кристалів.

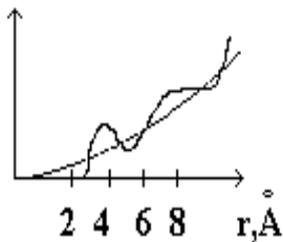


Рис. 6.5. Радіальна функція розподілу

Рідина своїми властивостями і будовою займає проміжне положення між твердим і газоподібним станом. Розміщення частинок в кристалах описують за допомогою просторових ґрат, розміщення молекул у рідині описують за допомогою парної функції  $g(r) = \frac{\rho}{\rho_0}$  (або структурного фактору), а також атомної (радіальної) функцією розподілу  $N(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$ .

Аморфні тіла (полімери, стекла, смоли) займають проміжне місце між рідинами і кристалами. Аморфні тіла як і

рідини не мають далекого порядку в розміщенні молекул. Є тільки близький порядок. Радіальна функція розподілу має вигляд як на рис. 6.5. Положення першого піку визначає найбільш імовірну віддаль між сусідніми атомами, а площа під першим піком – число сусідів (координаційне число). Аморфні тіла та

рідини *ізотропні*, а кристалічні – *анізотропні*. При переході рідини в аморфний стан речовина не перестає бути однорідною, змінюючи в'язкість.

Якщо при охолодженні речовини відбувається кристалізація, то з однорідної рідини утворюється суміш кристаликів і рідини, **тобто відбувається розподіл на дві фази** – кристалічну і рідку, що відрізняються одна від одної своїми фізичними властивостями. **Друга відмінність** лежить в кривих охолодження речовини. При утворенні скла на кривій  $T(\tau)$  охолодження немає горизонтальної частини, як при кристалізації. Тобто з рідкого стану в твердий аморфна речовина переходить в деякому інтервалі температур, а в кристалічний – при сталій температурі. **Третя відмінність** виявляється в тому, що під час переходу рідини в твердий аморфний стан усі фізичні властивості змінюються безперервно, тоді як під час кристалізації – стрибкоподібно. Якщо аморфне, або кристалічне тіло нагріти до температури, яка відповідає рідкому стану а потім швидко охолодити (для деяких речовин це  $10^6 - 10^9$  К/с) то ріст в'язкості не дозволить молекулам встигнути перебудуватись, і залишиться структура, яка відповідає рідині. Утворюється так звана переохолоджена рідина, а потім при підвищенні в'язкості і аморфний стан. Загартований аморфний стан не є рівноважним, але якщо в'язкість речовини велика ( $>10^{13}$  Пуаз) то час релаксації теж великий і переходу в рівноважний стан практично ніколи не відбувається. Температуру, при якій аморфна речовина може перебувати в нерівноважному стані, позначають як  $T_g$ .

### 6.1.5 Випаровування і рівновага між паром, рідиною і твердим тілом

Якщо рідина або тверде тіло, що легко випаровується, перебувають у закритій посудині, то маса взятого тіла спочатку внаслідок випаровування зменшується, а потім лишається сталою: встановлюється так звана динамічна рівновага пари і рідини, або пари і твердого тіла. Кількість теплоти, потрібна для перетворення в пару одного грама рідини при незмінній температурі називається *питомою захованою теплотою випаровування*; а у випадку випаровування твердого тіла - *питомою захованою теплотою возгонки*. Число молекул, які випаровуються з  $1 \text{ см}^2$  вільної поверхні рідини, або сублимують з  $1 \text{ см}^2$  поверхні твердого тіла за 1 с називають швидкістю випаровування. Вона залежить від температури. Однак необхідно враховувати і зворотний процес повернення молекул пари в рідину. Якщо швидкість випаровування більша за швидкість повернення молекул пари – то пару називають *ненасиченою*. З моменту, коли випаровування припиняється і одночасно існують пара і рідина, пару називають *насиченою*. Якщо побудувати графічно температурну залежність тиску насиченої пари (рис. 6.6) то видно, що усі точки кривої (I) являють ті умови при яких пара перебуває в рівновазі з рідиною. Далі, якщо додати криву рівноваги рідини і твердого стану, то одержимо фазову діаграму стану. Криву I називають кри-

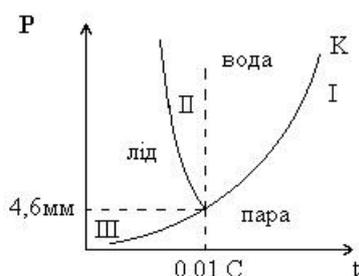


Рис. 6.6. Діаграма стану

ривної молекул пари – то пару називають *ненасиченою*. З моменту, коли випаровування припиняється і одночасно існують пара і рідина, пару називають *насиченою*. Якщо побудувати графічно температурну залежність тиску насиченої пари (рис. 6.6) то видно, що усі точки кривої (I) являють ті умови при яких пара перебуває в рівновазі з рідиною. Далі, якщо додати криву рівноваги рідини і твердого стану, то одержимо фазову діаграму стану. Криву I називають кри-

вою рівноважного тиску рідина-пара, або кривою кипіння. Криву III – кривою возгонки (або оберненого процесу переходу з газоподібного стану в твердий, який називають сублімацією). Область між кривими II – III відповідає твердому стану; між кривими I – II – рідкому стану; область праворуч від кривих I і III відповідає газоподібному стану.

Треба розрізняти поняття агрегатного стану речовини (твердий, рідкий та газоподібний) від поняття фази. *Фазою* називають *сукупність атомів або молекул яка має визначені структуру та фізико-хімічні властивості*. Термодинаміка визначає фазу як однорідну частину системи, яка відокремлена від інших частин системи границями розділу і може бути механічно вилучена із системи. Агрегатні стани речовини відрізняються характером руху молекул, а фазові стани обов'язково відрізняються за своєю структурою.

Основні переходи речовини із одного стану до іншого це:

1. Випаровування та конденсація;
2. Возгонка або сублімація (випаровування всього твердого тіла мінуючи рідкий стан);
3. Кристалізація та правління (перехід прямий та зворотний від кристалічного до рідкого стану);
4. Поліморфізм (перехід твердого тіла з одного до іншого кристалічного стану, при якому змінюється кристалічна решітка);
5. Упорядкування (перехід від хаотичного розміщенні атомів різного сорту в кристалі до впорядкованого);
6. Феромагнетизм та антиферомагнетизм (прямий та зворотний переходи від феро- або антиферомагнетика до парамагнетика, тобто від впорядкованого розподілу магнітних моментів атомів до хаотичного);
7. Прямий та зворотний перехід від сегнетоелектрика, який характеризується впорядкованим розподілом дипольних моментів, до простого діелектрика;
8. Надтечія рідини – особливий стан гелію, який характеризується нескінченно малим значенням коефіцієнта в'язкості;
9. Надпровідність – явище зниження електричного опору при низьких не рівних 0 К температурах.

Фазовою рівновагою називають стан термодинамічної системи, в якому різні фази речовини мають спільні границі та не змінюється кількісно.

Розрізняють *фазові переходи* (за Еренфестом) *першого роду*, при яких стрибок змінюється перші похідні термодинамічного потенціалу Гіббса за температурою  $T$  і тиском  $P$ , тобто ентропія  $S$  і об'єм  $V$ . Фазовими переходами другого роду називають такі переходи, коли  $S$  і  $V$  не змінюються; а змінюється стрибком всі термодинамічні коефіцієнти:  $C_p$ , коефіцієнт об'ємного теплового розширення  $\alpha_p$ ; коефіцієнт стисливості  $\chi_T$ .

### 6.1.6 Тверді тіла. Просторові решітки. Індeksi Міллера

Якщо порівнювати будову газів, рідин та твердих тіл з погляду ступеня упорядкованості в розміщенні молекул, то гази характеризуються найбільшою

хаотичністю в розміщенні молекул, а кристали – найбільшою впорядкованістю. Щодо рідин, то вони займають з цього погляду проміжне місце між газами і кристалами. Тому розглянемо властивості кристалів. Кристали складаються з молекул але кристали мають такі властивості, яких немає в кожній окремій молекулі. Істотною особливістю кристалічного тіла є впорядкованість у розміщенні частинок, з яких воно побудоване: атомів, молекул, іонів, груп атомів тощо. Зручним способом опису цього розміщення є просторові решітки. Як наслідок упорядкованого розміщення частинок, кристали набувають ряду властивостей, яких у тіл некристалічних немає. Однією з таких властивостей є плоскогранність і сталість кутів між гранями монокристалів.

Найважливішими властивостями кристала, зумовленими закономірним розподілом частинок у ньому, є так звана анізотропія, симетрія в розподілі напрямів з однаковими фізичними властивостями і однорідність. Відомо, що монокристали мають форму правильного многогранника, якщо вони були створені в рівноважних умовах. Відхилення від рівноважних умов приводить до утворення многогранників різної форми, які утворюються перерізом плоских граней правильного многогранника. Але кути між основними гранями будуть постійними. Закон сталості кутів уперше сформулював датський лікар і природодослідник Стенон (Нільс Стенсен) (1638-1686). Однак цей закон не привернув серйозної уваги і був забитий. Тільки через 100 років в 1763р. він був незалежно від Стенона встановлений Ломоносовим. Крім цього Ломоносов прийшов до дуже важливого висновку про наявність щільного зв'язку між зовнішньою формою кристала і внутрішнім правильним закономірним розміщенням атомів, які утворюють кристал.

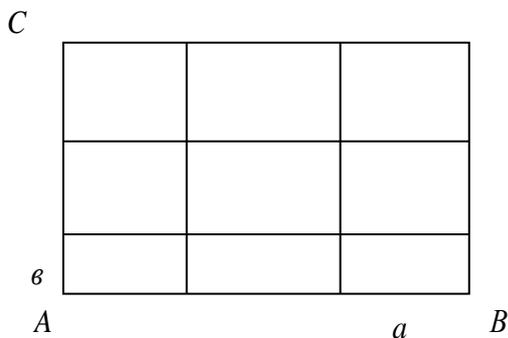


Рис. 6.7. Плоска решітка

“а” між однаковими частинками в напрямі АВ назвемо періодом повторюваності в цьому напрямі. Тоді період повторюваності в напрямі АС – в. Тобто, якщо зсунути решітку в нове положення так щоб лінії, які утворюють решітку лишались паралельними лініям першої решітки, і сумістити один вузол, тоді всі інші вузли суміщатимуться.

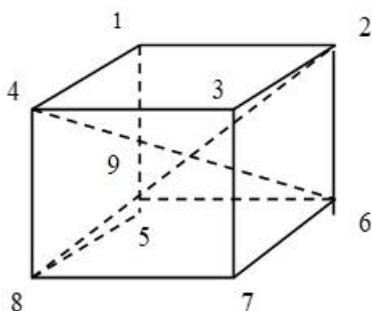


Рис. 6.8. Кубічна комірка

Многокутник (або комірка), трансляцією (зсувом) якого можуть бути побудовані вся плоска решітка завжди має вигляд паралелограма. У просторових решітках такою коміркою є паралелепіпед.

Щоб знайти скільки частинок припадає на одну комірку можна зсунути решітку на малу віддаль в напрямку діагоналі, а потім полічити число атомів в кожній комірці. Якщо решітка така, що атоми знаходяться тільки у вершинах, наприклад куб, то число атомів всередині буде – 1. Якщо комірка має вигляд куба, в кожному куті якого і в центрі міститься по одній частинці (рис. 6.8), то залишивши частинки нерухомими і змістивши решітку по діагоналі, яка сполучає частинки 1 → 7 на малу віддаль, побачимо що всередину комірки покажуть дві частинки (7 і 9).

Тим способом знайдемо, що на одну комірку гранецентрованого куба

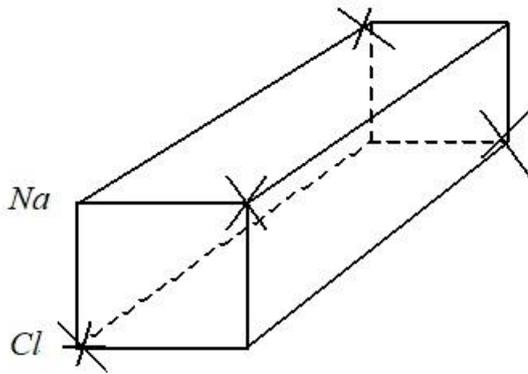


Рис. 6.9. Решітка NaCl

припадає чотири атоми. За числом частинок в комірці решітки поділяють на прості (з одним атомом в комірці) або примітивні і складні, якщо на одну комірку припадає кілька частинок. Розглянемо приклад. Для іонної решітки, тобто решітки сполуки, наприклад NaCl, яка збудована з іонів Na і Cl, яка має вигляд куба у вершинах якого 4 іони Na і 4 іони Cl (рис. 6.9), де кружки – Na, хрестики – іони хлору, на одну комірку припадає 1 іон. Причому в суміжні комірки по-

падуть різні іони.

На одну елементарну комірку припадає 4 іони Na і 4 іони Cl, тобто 4 молекули NaCl. Отже число елементарних кубів в 1 молі –  $N_A/4$ . Об'єм елементарного кубика з ребром  $a$  –  $a^3$ , тому об'єм 1 моля  $V = a^3 \cdot N_A/4$ . З другого боку  $V = \mu/\rho$  для одного моля ( $V = \mu/(m \cdot V)$ , а  $\mu/m = 1$ ). Тобто:  $\mu/\rho = a^3(N_A/4) \rightarrow a^3 = 4\mu/(\rho \cdot N_A)$  - це період повторюваності решітки NaCl.

Форма всякого паралелепіпеда визначається співвідношенням між ребрами  $a, b, c$ , які сходяться в одній точці, і величиною кутів  $\alpha, \beta, \gamma$  між цими ребрами. За ознаками: дорівнюють ребра одне одному чи не дорівнюють; дорівнюють кути  $90^\circ$ , чи різняться від  $90^\circ$ , а також – дорівнюють вони один одному, чи не дорівнюють проведена систематизація всіх просторових ґрат на сім систем.

1. Триклинна ( $a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ )
2. Моноклінна ( $a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )
3. Ромбічна ( $a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )
4. Тетрагональна ( $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )
5. Кубічна ( $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )
6. Гексагональна ( $a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ )

### 7. Ромбоедрична ( $a=b=c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ ).

Але для даного розміщення частинок існує дуже велике число різних решіток як простих, так і складних. Однак можна вибрати для даного розміщення лише один тип решітки, форму комірки, які відбивають істотні риси даного розміщення. Такою ознакою розміщення є симетрія. Найважливіші симетричні перетворення: а) обертання навколо осі  $C_4$  (четвертого порядку),  $C_3$  і  $C_2$ . Так куб має  $3C_4$ ;  $4C_3$  та  $6C_2$ ; б) відбиття в дзеркалі; тобто наявність площини; відбиття від якої приводить до створення даного розміщення. Так у куба - 9 площин симетрії ( $9P$ ); с) відбиття в точці: тобто наявність центрів інверсії, точкових дзеркал, відбиття від яких приводить до створення даного розміщення. Так куб має центр інверсії, так як існує така точка, що будь-яка пряма, проведена через цю точку, поділяється при перерізі з тілом на рівні частини. Наприклад, тригранна піраміда не має центр симетрії. Крім трансляцій допоміжні засоби, якими здійснюється симетричне перетворення тіла, а саме: вісь симетрії, площина симетрії і центр інверсії називають елементами симетрії. Так повна сукупність елементів симетрії куба складається з  $3C_4$ ,  $4C_3$ ,  $6C_2$ ,  $9P$ ,  $z$ . Для комірки ромбоедричної системи сукупність елементів симетрії складається з  $2C_3$ ,  $3C_2$ ,  $3P$ ,  $z$ .

Тіла різної форми мають різну сукупність елементів симетрії. Але якщо довільно скласти яку-небудь сукупність елементів симетрії, то може виявитися, що в дійсності немає такої форми, яка мала б цю сукупність елементів симетрії. У кристалах, внаслідок решітчастої будови, не може бути ряду осей симетрії, які спостерігаються в симетричних тілах. Наприклад, у кристалах неможлива  $C_5$  – вісь симетрії п'ятого порядку, хоч у природі вона зустрічається у деяких квітках та у морських зірок. У кристалів можливе лише  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_6$  і можливе лише 32 сукупності елементів симетрії. Спочатку це довів російський академік А.В. Гадолін (1867), а потім Федоров (1879). Можна також ввести ще елементи симетрії: трансляцію та поворот навколо осі на певний кут і трансляцію, або гвинтову вісь.

Домовимось, що комірка решітки, симетрія якої перебуває у відповідності з симетрією періодичного розміщення частинок називається елементарною коміркою. Тепер ясно, чому часто доводиться користуватися не простою коміркою, а складною. Тобто є такі розміщення, які не можна побудувати трансляцією простої комірки. Тому використовують складні комірки: об'ємноцентровані, гранецентровані, базоцентровані.

Для того щоб охарактеризувати положення ідеальної плоскої грані кристала, що відповідає деякій кристалічній площині, використовують відрізки, відрізування гранню на трьох координатних осях. Відрізки на осях по трьох напрямках вимірюють не однаковим масштабом, а масштабами, відповідними до основних періодів трансляції  $a, b, c$ . Таким чином їх значення складають  $ma, nb, pc$ , де  $m, n, p$  – цілі числа. Символи атомних площин – індекси Міллера ( $h, k, l$ ) визначаються з відношення величин, обернених до величин відрізків на осях:  $(1/m):(1/n):(1/p)$ .

Кожну кристалічну площину можна визначити рівнянням  $(X/A)+(Y/B)+(Z/C)=1$ , де А, В, С – довжини відрізків, відрізуваних на осях. Значення цих довжин завжди є раціональними числами, тому рівняння площини кристала можна записати як  $hx+ky+bz=0$ . Цей вигляд відповідає визначенню індексів Міллера. Сукупність індексів Міллера прийнято брати в круглі дужки, наприклад (1, 2, 5). Так, індекси кристалічних площин, паралельних граням елементарної комірки кубічної решітки будуть такими: (001): (010): (100). Кристалічна площина (111) перетинає три вузли елементарної кубічної комірки, жоден з яких не розташований на початку координат.

### 6.1.7 Дефекти кристалів

Рентгенівське дослідження будови кристалів показує, що в дійсності в кристалах немає тієї ідеальної правильності розміщення частинок, яка припускається просторовою решіткою даного кристала. Порушення правильності кристалічної будови полягає насамперед у тому, що кристал складається з окремих ділянок, або блоків правильної кристалічної будови, трохи зміщених з ідеальних положень. Зміщення блоків дуже мале порівняно з періодом повторюваності. Така структура зветься мозаїчною або блочною. Однак блоки також не є ідеальними монокристалами. Дефектами кристалів називають будь-які відхилення від періодичності. Блоки також мають дефекти структури: це насамперед або незаповнені атомами місця, дірки, або деформовані місця решітки внаслідок впровадження чужорідних атомів, це точкові дефекти. Тобто до точкових дефектів відносяться:

- а) вакансії, або дірки (незаповнені атомами місця);
- б) деформовані місця решітки внаслідок заміщення основних атомів якимись чужорідними (заміщення);
- в) деформовані місця решітки внаслідок впровадження атомів між вузлами решітки (міжвузельні атоми).

Характерною особливістю точкових дефектів є те, що вони порушують лише ближній порядок, не торкаючись дальнього порядку.

Існують також лінійні дефекти, які називають дислокаціями. Вони порушують дальній порядок у кристалах. Дислокації характеризуються певною лінією (вузькою смужкою завтовшки в кілька атомних відстаней) та певним вектором, який зветься вектором Бюргерса. Розрізняють два основних види дислокації: крайову та гвинтову.

Схему крайовою дислокації показано на рис. 6.10. Ця дислокація характеризується додатковою атомною площиною, в частині кристала з одного боку від лінії дислокації. Лінією дислокації в даному випадку є пряма, перпендикулярна до площини рисунка. Схему гвинтової дислокації показано на рис. 6.11.

Їх утворення можна уявити собі як розріз решітки по площині і здвиг її частини на довжину періоду решітки так, щоб у площині розрізу дві частини решітки збігалися. Край півплощини розрізу називають лінією гвинтової дислокації. Якщо провести контур Бюргерса, складений із основних векторів тран-

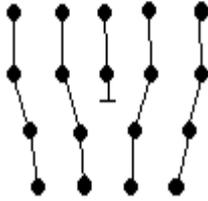


Рис. 6.10. Крайова дислокація

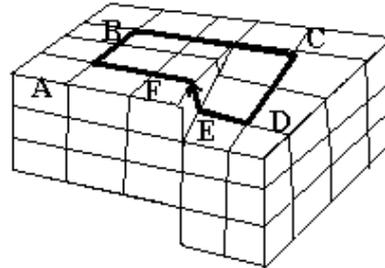


Рис. 6.11. Гвинтова дислокація

сляції, на достатній відстані від лінії дислокації, тобто там де будова ідеальна (FABCDE рис. 6.11). При наявності дислокації цей контур буде розірваний. Вектор, який з'єднує його кінцеву і початкову точки (вектор EF рис. 6.11) називається вектором Бюргерса.

У випадку крайової дислокації вектор Бюргерса перпендикулярний до лінії дислокації, а у випадку гвинтової дислокації – паралельний до неї. Дефекти дуже впливають на різні властивості тіл.

## 6.2. Перелік контрольних питань

1. Відмінності реального газу від ідеального. Ізотерми Амага.
2. Три види Ван-дер-Вальсових сил. Рівняння Ван-дер-Ваальса і його корені. Фізичний зміст постійних Ван дер Ваальса. Критичні параметри та їх визначення через константи рівняння Ван дер Ваальса.
3. Порівняння ізотерм газу Ван дер Ваальса з експериментальними. Визначення області існування пересиченої пари та перегрітої рідини, а також нестійкого стану. Бінодаль і спінодаль, та межі існування речовини в гомогенному та гетерогенному станах.
4. Відповідність рівняння Ван дер Ваальса з дослідними даними. Властивості речовини у критичному стані. Внутрішня енергія газу. Адіабатичне дросюлювання. Ефект Джоуля – Томсона. Термодинаміка ефекту Джоуля – Томсона.
5. Плавлення і кристалізація. Переохолодження рідин. Поняття функції радіального розподілу атомів, структурного фактору (парній функції) для опису будови рідини. Особливості переходу рідини в кристалічний і аморфний твердий стан.
6. Випаровування і рівновага між парою, рідиною і твердою фазою. Насичена пара. Поняття фази. 9 типів фазових переходів. Діаграма стану пар-рідина-тверда фаза в координатах P-T. Типи фазових переходів по Еренфесту.
7. Основні особливості рідини визначених по параметрах  $\beta_T, \alpha_p, C_p, C_V$ .

8. Закони переносу для рідин. Визначення величин коефіцієнтів дифузії, в'язкості та теплопровідності.

9. Поверхневий шар. Поверхневий натяг. Формула Лапласа. Формула Лапласа для меніска довільної форми. Капілярні сили. Явище змочування. Поняття краевого кута змочування. Додатковий тиск рідини між двома паралельними близько розташованими пластинами. Залежність коефіцієнта поверхневого натягу від температури.

10. Рідкі розчини. Закони Рауля. Осмотичний тиск. Закон Вант-Гоффа.

11. Тверді тіла. Поділ твердих тіл за структурними станами. Близній та дальній порядок Просторові ґрати. Поняття індексів Міллера для площин і напрямів в кристалах. Елементи симетрії кристалів. Поняття ґрат Браве. Групи Федорова. Сім сингоній кристалічних ґрат.

12. Види, сил і енергій зв'язку у твердих тілах Дефекти в реальних кристалах. Точкові дефекти. Лінійні, поверхневі та об'ємні дефекти. Види дислокацій, поняття лінії дислокації і вектора Бюргерса.

13. Пружні властивості, коефіцієнти теплового розширення, рівняння стану та теплоємність твердого тіла.

### 6.3 Лабораторні роботи

#### 6.3.1 Лабораторна робота №27. Вивчення кристалізації гіпосульфїту

Прилади та приладдя: колбочка з гіпосульфїтом, термометр, електронагрівач, секундомір, хімічний стакан.

#### Теоретичні відомості

Гіпосульфїт - сіркуватоокислий натрій ( $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ) - має відому точку плавлення, при якій він переходить у рідину. Рідина чистого гіпосульфїту може бути значно переохолоджена відносно температури плавлення, якщо охолоджувати його відносно швидко і не штовхати рідину.

Переохолоджений гіпосульфїт при внесенні в нього малих кристалів (центрів кристалізації) починає кристалізуватися. При ньому виділяється теплота кристалізації, що приводить до підвищення температури майже до точки плавлення.

На рис. 6.12 схематично показана залежність температури від часу, яка обумовлена процесами, що діються під час плавлення та кристалізації гіпосульфїту.

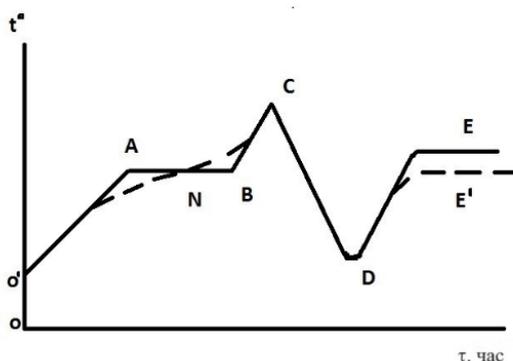


Рис. 6.12. Залежність температури гіпосульфїту від часу

Спочатку температура росте пропорційно часу згідно з відрізком  $O'A$ . Нахил прямої до осі абсцис залежить від теплоємності кристалічного матеріалу та інтенсивності нагрівання.

Під час плавлення речовини, що не має домішок, її температура перестає збільшуватися, тому що тепло йде на збільшення потенціальної енергії (розрив зв'язків між молекулами, які склали кристалічну решітку). Теоретично ця частина графіка повинна бути горизонтальним відрізком прямої (відрізок  $AB$ ). Але якщо теплопровідність речовини порівняно мала, температура в ній неоднорідна. Термометр, який сам відводить тепло, вимірює температуру в найближчому до нього шарі речовини. Плавлення речовини йде неодноразово. Пунктирна крива на рис. 6.12 показує, яка може бути реальна залежність температури від часу. Середню температуру на близькому до горизонтального відрізка (точку  $N$ ) можна вважати за температуру плавлення.

### Порядок роботи

Після підвищення температури рідкого гіпосульфиту до  $80^{\circ}\text{C}$  його починають охолоджувати. Охолоджують спочатку на повітрі до температури  $50^{\circ}\text{C}$ , а потім у воді, зануривши колбу у посуд (хімічний стакан) з холодною водою. Ні в якому разі не можна охолоджувати колбу відразу у воді, бо від цього вона трісне. Для охолодження в повітрі і занурення у воду колбу з речовиною перемішують уздовж штатива.

Після охолодження рідкого гіпосульфиту до  $30^{\circ}\text{C}$  посуд з водою приймають і кидають у розплав гіпосульфиту маленькі кристалики - центри кристалізації. Починається кристалізація. Під час кристалізації температура підвищується майже до точки плавлення, а потім мало змінюється аж до кінця кристалізації (відрізок  $DE$ ). При інтенсивному відводі тепла (якщо не прийняти посуд з водою) точка плавлення, як правило, не досягається і температурна залежність відповідає відрізка  $DE$ .

При значному переохолодженні, обережно нахиливши колбу із гіпосульфитом, можна побачити, що рідина стала більш в'язкою. Рідини, в яких в'язкість швидко збільшується при зменшенні температури, можуть твердіти без кристалізації (як скло). Це пов'язано з тим, що при збільшенні в'язкості, зменшується рухливість молекул, тому зменшується кількість виникаючих спонтанно центрів кристалізації, а існуючі центри ростуть дуже повільно.

### Виконання роботи

Розташувати колбу з гіпосульфідом та термометром над поверхнею нагрівача і ввімкнути останній в електричну мережу (рис. 6.13). Записувати температуру гіпосульфіді, що вимірюється термометром, через кожні 0,5 хвилини.

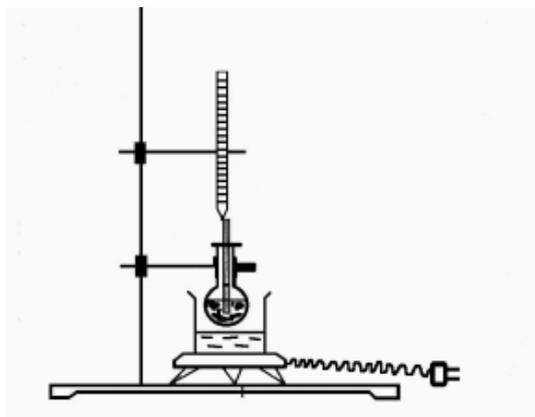


Рис. 6.13. Схема приладу

Коли весь гіпосульфід перетвориться у рідину, а температура підвищиться до  $80^{\circ}\text{C}$ , нагрівач вимикають. Гіпосульфід охолодити на повітрі до температури  $50^{\circ}\text{C}$ , а потім колбу з речовиною занурити у воду. Продовжувати записувати температуру через кожні 0,5 хвилини.

Після охолодження речовини до  $30^{\circ}\text{C}$  посуд з водою прийняти, (колбу переміщують на штативі угору). Вкинути маленький кристалик гіпосульфіді і продовжувати вивчати залежність температури від часу; спостерігати за ходом кристалізації. Перестати записувати після того, як вона після збільшення почне зменшуватися. Дані досліду занести у таблицю. Побудувати графік залежності температури гіпосульфіді від часу. На відрізках цієї залежності, що відповідають кристалізації та плавленню, відмітити значення температури плавлення.

### Контрольні запитання

1. Чому температура під час плавлення не підвищується?
2. Пояснити залежність температури від часу при плавленні і кристалізації гіпосульфіді, розглядаючи побудований графік.
3. Указати на графіку відрізок часу, коли рідкий гіпосульфід знаходиться у переохоложеному стані.
4. Описати рух молекул у різних агрегатних станах речовини.

### 6.3.2 Лабораторна робота №28. Визначення вологості повітря

Прилади та приладдя: психрометр, стаканчик для змочування одного з термометрів психрометра.

Мета роботи полягає у визначенні абсолютною та відносною вологості повітря.

### Теоретичні відомості

Атмосферне повітря має у своєму складі деяку кількість водяної пари, що обумовлює вологість повітря. Кількість водяної пари в повітрі при даних умовах характеризується абсолютною та відносною вологістю повітря.

Абсолютною вологістю називається кількість водяної пари, що знаходиться в одиниці об'єму повітря. Як правило, її виражають в г/м<sup>3</sup>.

Виразимо густину повітря при нормальних умовах з рівняння стану ідеального газу:

$$\rho_{\text{пов}} = \frac{P_{\text{пов}_0} \mu_{\text{пов}}}{RT_0}, \quad (6.4)$$

де  $P_{\text{пов}}$  – тиск повітря;  $\mu$  – молярна маса;  $R$  – газова стала;  $T$  – абсолютна температура.

Аналогічно для густини водяної пари далекої від насичення, при будь-якому тиску  $P$  і температурі  $T$ , маємо, що  $\rho_{\text{пари}} = \frac{P \mu_{\text{пари}}}{RT}$ .

Тому

$$(\rho_{\text{пари}}/\rho_{\text{пов}}) = (P \mu_{\text{пари}} T_0)/(P_0 \mu_{\text{пов}} T) \quad (6.5)$$

або

$$\rho_{\text{пари}} = \rho_{\text{пов}} (P \mu_{\text{пари}} T_0)/(P_0 \mu_{\text{пов}} T). \quad (6.6)$$

Підставивши значення  $\rho_{\text{пов}} = 1293$  г/м<sup>3</sup> і виразивши  $P_{\text{пов}}$  в мм рт. ст. ( $1.013 \cdot 10^5$  н/м – 760 мм рт. ст.), одержимо

$$\rho_{\text{пари}} = 1,06 \frac{P}{1 + \alpha t}. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) дає змогу визначити абсолютну вологість повітря (у г/м<sup>3</sup>), якщо відома пружність (парціальний тиск) водяної пари (з цієї формули також видно, що при малих значеннях  $t$ : величина абсолютної вологості в г/м<sup>3</sup> мало відрізняється від величини пружності водяної пари  $P$ , вимірюваної в мм рт. ст. Тому на практиці найчастіше визначають абсолютна вологість не за кількістю водяної пари  $m$  в грамах, що міститься в 1 м<sup>3</sup> повітря, а за її пружністю  $P$ , вираженою в мм рт. ст.

Відносна вологість характеризує ступінь насичення повітря парою. Відносною вологістю називають відношення абсолютної вологості до кількості пари в 1 м<sup>3</sup>, яка насичує повітря за даної температури:

$$W = m/M. \quad (6.8)$$

Отже, можемо написати

$$W = (m/M) \cdot 100\% = (P/P_0) \cdot 100\%, \quad (6.9)$$

де  $P_0$  – пружність насиченої водяної пари за температури  $T$ .

Відносну вологість звичайно виражають у процентах. Визначення вологості повітря проводять по психрометру або гігрометру.

### Визначення абсолютної і відносної вологості повітря за допомогою психрометра

Психрометр – найбільш поширений прилад для визначення вологості повітря. Якщо два однакових термометри знаходяться в однакових потоках повітря, показання цих термометрів повинні бути однаковими. Якщо балончик одного з термометрів буде весь час зволожений, наприклад, обгорнутим мокрою тканиною, то показання термометрів будуть різними. Завдяки випаровуванню води з тканини так званий "мокрый" термометр буде показувати більш низьку температуру, ніж сухий. Чим менша вологість оточуючого повітря, тим інтенсивнішим буде випаровування і тим нижчими будуть показання "мокрого" термометра. Рівниця температур, виміряна цими термометрами, характеризуватиме вологість повітря.



Рис. 6.14. Психрометр

Тепло, що йде на випаровування, надходить до "мокрого" термометра вів повітряного потоку, який утворюється вентилятором. За законом тепловіддачі Ньютона кількість теплоти ( $Q_1$ , яка переходить через поверхню системи 5, залежить від різниці температур між системою і оточуючим середовищем:

$$Q_1 = \alpha(v)(t - t_1)S_1, \quad (6.10)$$

де  $\alpha(v)$  – так званий коефіцієнт тепловіддачі, який залежить від швидкості повітряного потоку  $v$ ;  $t_1$  – температура "мокрого" термометра  $t$  – температура оточуючого середовища. У методі психрометра  $(t - t_1)$  – це максимальна різниця температур сухого і "мокрого" термометрів.

З іншого боку, масу води, що випаровується за одиницю часу, можна за формулою Дальтона представити так:

$$m_{\text{вип.}} = K(v)S_2(P_0 - P)/P_{\text{пов.}}$$

Тут  $S_2$  – площа поверхні, з якої відбувається випаровування;  $P_{\text{пов.}}$  – тиск повітря;  $P_0$  – пружність насиченої водяної пари при температурі рідини, що випаровується, тобто при температурі  $t_1$ ;  $P$  – пружність водяної пари, що знаходиться в повітрі;  $K(v)$  коефіцієнт пропорційності, що залежить від швидкості потоку повітря.

Кількість теплоти  $Q_2$ , яка йде на випаровування маси води, очевидно, дорівнює

$$Q_2 = m_{\text{вип.}} \lambda = \lambda K(v)S_2(P_0 - P)/P_{\text{пов.}}, \quad (6.11)$$

де  $\lambda$  – питома теплота пароутворення воли.

При стаціонарному режимі, тобто при незмінних температурах  $t_1$  і  $t_2$  з  $Q_1=Q_2$ . Враховуючи, що  $S_1=S_2$ , з (6.10) і (6.11) одержимо

$$\frac{K\lambda(P_0 - P)}{P_{\text{пов.}}} = \alpha(t - t_1)$$

звідки

$$P = P_0(t_1) - A(t - t_1)P_{\text{пов.}}, \quad (6.12)$$

де  $A = \alpha/K\lambda$  – стала системи. Величина цієї сталої залежить від швидкості потоку повітря і знаходиться експериментально.

Будову стандартного аспіраційного психрометра показано на рис.6.14. Він складається з двох термометрів. Балончик правого термометра огорнутий тканиною. Аспіратор психрометра має пружинний вентилятор, що заводиться ключем **К**. Повітряні потоки входять у циліндри з термометрами знизу. А над балонами термометрів обидва потоки з'єднуються в один.

### Порядок роботи

Змочування тканини термометра проводиться за допомогою маленького хімічного стаканчика з водою. Ключем **К** майже повністю заводять вентилятор (5–7 обертів) і починають слідкувати за показаннями термометрів. Через 4–5 хвилин показання термометрів встановлюються і різниця  $(t - t_1)$  може бути виміряна. Абсолютна вологість визначається за формулою (6.12), враховуючи, що стала даного приладу  $A = 8.1 \cdot 10^{-4}$  (град мм рт. ст.)<sup>-1</sup>. Величину  $P_0(t_1)$ , що входить у формулу (6.12), знаходять з таблиці 1, а атмосферний тиск вимірюють барометром. Якщо з табл. 1 знайти тиск насиченої водяної пари  $P_0(t)$  при температурі оточуючого повітря  $t$ , то за формулою (6.9) можна розрахувати відносну вологість.

Таблиця 6.1. Значення тиску насиченої пари води (мм рт. ст.) в залежності від температури

$t, ^\circ\text{C}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.58	4.92	5.29	5.68	6.09	6.54	7.01	7.51	8.04	8.50
10	9.20	9.68	10.50	11.22	11.97	12.77	13.62	14.51	15.46	16.46
20	17.50	18.63	19.80	21.04	22.36	22.73	25.18	26.72	28.32	30.01
30	31.80	33.66	35.63	37.69	39.86	42.14	44.53	47.03	49.66	52.41

Похибка визначення абсолютної вологості  $P$  пов'язана в найбільшій мірі з похибкою визначення температури мокрого термометра. Тому її визначають за формулою:

$$\Delta P = \Delta P_0(t_1) + AP\Delta t_1. \quad (6.13)$$

Похибку  $\Delta P_0(t_1)$  знаходять як результат множення швидкості зміни тиску з ростом температури  $dP_0/dt$  за температури  $t_1$  на величину стандартної похибки визначення температури ( $\Delta t_1 = \Delta S(t_1)$ ).

Похідну  $dP_0/dt$  знаходиться з табл. 6.1. Наприклад, в інтервалі температури від 12 по 13°C  $dP_0/dt = (11.22 - 10.50)$  у мм рт. ст./град. Всі результати вимірів і розрахунків заносять у таблицю 6.2.

Таблиця 6.2. Результати вимірів і розрахунків

№ з/п	$P_{\text{пов.}}$	$t$	$P_0$	$t_1$	$P_1$	$P$	$\Delta t_1$	$\Delta P$	$W$	$\Delta W$
1										
2										
3										
Середнє							$\Delta S(t_1)$			

### Визначення абсолютної і відносної вологості повітря за допомогою віртуального приладу

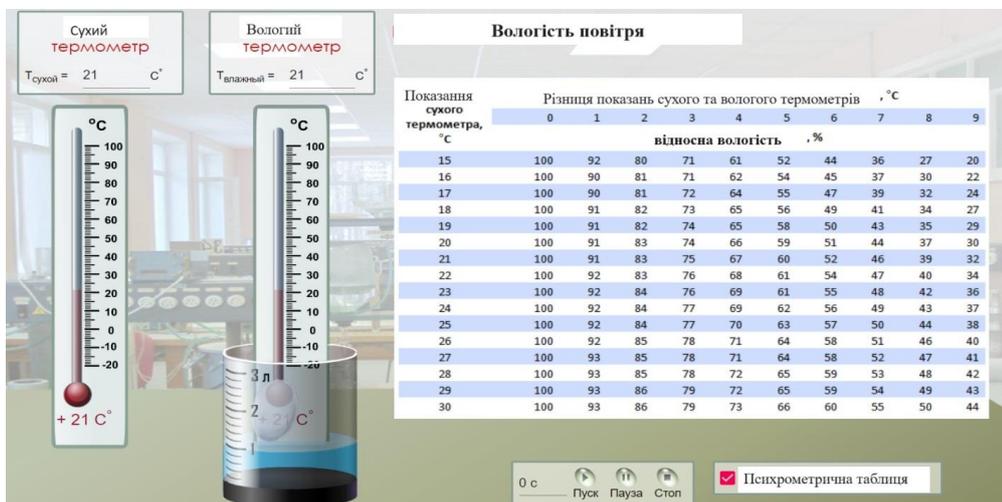


Рис. 6.15. Віртуальний прилад для визначення вологості повітря

### Контрольні запитання

1. Що називається вологістю повітря (абсолютною, відносною)?
2. Що таке точка роси?
3. Чому пружність насиченої пари збільшується а ростом температури?
4. Вивести формулу (6.12).

### 6.3.3 Лабораторна робота №29. Визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини

Прилади та приладдя: прилад з пристроєм для підвищення тиску та манометром, посудинки а водою та розчином, капіляри.

#### Теоретичні відомості

Молекули рідини біля поверхні знаходяться в особливих умовах. Такі молекули мають більшу потенціальну енергію, ніж молекули, що містяться в об'ємі рідини. Тому рідина має як можна меншу вільну поверхню, а поверхневий шар увесь час натягнутий, як розтягнута гумова плівка. Сила поверхневого натягу направлена по дотичній до поверхні рідини і діє нормально до будь-якої лінії по границі поверхні рідини і будь-якого іншого твердого чи рідкого тіла. Сила, яка діє на одиницю відстані уздовж такої лінії, зветься коефіцієнтом поверхневого натягу. Він є питомою характеристикою рідини.

Якщо капіляр занурити в рідину, то рідина підніметься або опуститься в капілярі на деяку висоту над рівням рідини в посудині. Це явище пояснюється тим, що тиск, під яким знаходиться рідина, залежить від форми її поверхні. У капілярних трубках внаслідок взаємодії молекул рідини з молекулами речовини капіляра поверхня рідини викривлюється.

Залежність тиску, під яким знаходиться рідина, від форми її поверхні описується формулою Лапласа

$$P=P_0+\alpha(1/R_1+1/R_2), \quad (6.14)$$

де  $P$  – тиск під викривленою поверхнею;  $P_0$  – тиск під плоскою поверхнею;  $\alpha$  – коефіцієнт поверхневого натягу рідини;  $R_1$ , та  $R_2$ - головні радіуси кривизни поверхні рідини. У капілярній трубці  $R_1=R_2= R$ , тобто поверхня рідини має сферичну форму. У цьому випадку формула Лапласа має вигляд

$$P=P_0+2\alpha/R. \quad (6.15)$$

Якщо поверхня опукла, то радіус кривизни  $K=1/R$  і додток до тиску будуть більше нуля. При угнутій поверхні  $K<0$ . Отже, при змочуванні рідиною стінок тиск під угнутим меніском у трубці буде менший за тиск під плоскою поверхнею рідини в широкій посудині на величину  $2\alpha/R$ . При незмочуванні, навпаки, тиск буде більший на таку ж величину. Цим і пояснюється те, що рідина в капілярних трубках при змочуванні піднімається, а при незмочуванні опускається. Очевидно, що при рівновазі

$$2\alpha/R=\rho gh,$$

де  $\rho$  - густина рідини;  $g$  – прискорення сили земного тяжіння;  $h$  – висота підняття рідини в капілярній трубці відносно рівня рідини в широкій посудині;  $R$  – радіус сферичної поверхні рідини в капілярі. При повному змочуванні стінок капіляра рідиною  $R$  дорівнює радіусу капіляра.

Якщо збільшити зовнішній тиск над поверхнею рідини в капілярі, що його змочує, то можна досягти того, що рівні рідини в широкій й посудині і в капілярі зрівняються. Нехай для цього зовнішній тиск потрібно збільшити на вели-

чину  $\Delta P$ . Очевидно, при цьому  $\Delta P = 2\alpha/R$ . Вимірявши цей додатковий тиск  $\Delta P$ , можна визначити коефіцієнт поверхневого натягу досліджуваної рідини.

**Опис приладу**. Прилад складається з капіляра  $n$ , з'єднаного за допомогою гумової трубки  $A$  з манометром  $M$  широкою скляною, трубкою (воронкою)  $B$  яка опущена в посудину з водою (рис.6.). Опускаючи і піднімаючи трубку  $B$ , можна змінювати тиск у системі.

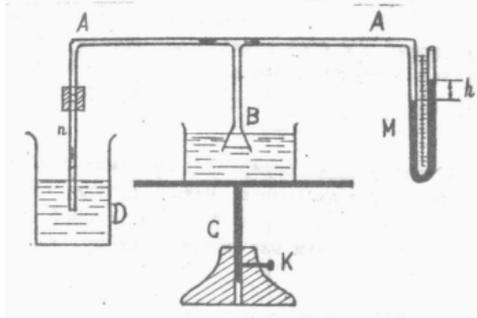


Рис. 6.16. Схема приладу для визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини

### Порядок роботи

1. Для визначення радіусів капілярних трубок провести досліди з рідиною, коефіцієнт поверхневого натягу  $\alpha$  якої відомий. Досліджувану рідину налити у посудину  $B$  і опустити в неї капіляр (точніше поставити посудину, в яку вже налита ця рідина). Повільно підняти столик  $C$  за допомогою спеціальної тяги і виведеної ручки, збільшити тиск в системі і довести рівень рідини в капілярі до рівня рідини в посудині  $B$ . Цей надлишковий у порівнянні з атмосферним тиск  $\Delta P$  виміряти за різницею рівнів рідини в манометрі  $M$ . Він дорівнює, очевидно, тискові, обумовленому викривленим поверхні рідини в капілярі. Таким чином,

$$2\alpha_1/R = \rho_1 g \Delta h_1,$$

де  $\rho_1$  – густина рідини в манометрі;  $\Delta h_1$  – різниця рівнів цієї рідини в манометрі.

Звідси,

$$R = 2\alpha_1 / (\rho_1 g \Delta h_1),$$

2. Описаний вище дослід провести з рідиною, поверхневий натяг,  $\alpha$ , якої треба визначити (і для тих самих капілярів). Розрахувати коефіцієнт поверхневого натягу за формулою

$$\alpha = \rho_1 g \Delta h_2 R / 2,$$

де  $\Delta h_2$  – значення різниці рівнів в манометрі в дослідах з рідиною, коефіцієнт  $\alpha$  якої невідомий;  $R$  – розраховані радіуси капілярів.

3. Результати вимірювань і розрахунків занести у таблицю. Знайти середнє значення коефіцієнта  $\alpha$  та похибку його визначення.

### Контрольні запитання

1. Яка природа поверхневого натягу?
2. Вивести формулу Лапласа для визначення тиску під викривленою поверхнею рідини.
3. Чому рівні рідини в капілярі і в посудині, в яку він занурений, різні?

#### 6.3.4 Лабораторна робота №30. Вивчення температурної залежності коефіцієнта поверхневого натягу рідини

Прилади та приладдя: прилад Ребіндера.

Коефіцієнт поверхневого натягу в даній роботі визначається за методом Ребіндера. Прилад Ребіндера (рис. 6.17) складається з наповненого водою аспіратора 3, з'єднаного за допомогою гумових трубок 7 з U-подібним манометром 4 і верхнім повітряним простором посудини 5, в яку наливається невелика кількість досліджуваної рідини. У посудину 5 введена (скрізь пробку) скляна трубка 2 з вузьким кінцем, що дотикається до поверхні рідини.

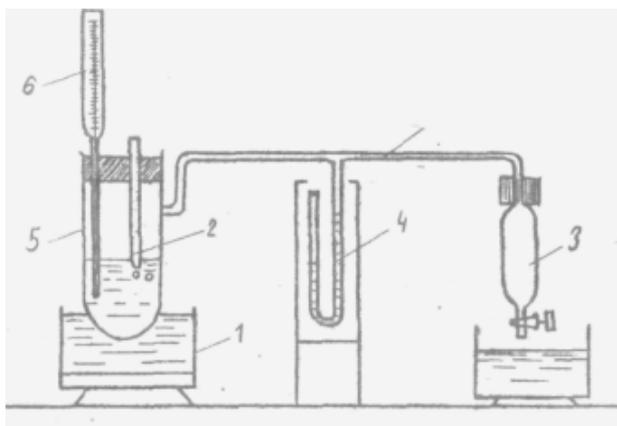


Рис. 6.17. Схема приладу Ребіндера

Якщо відкрити кран аспіратора, з нього почне витікати вода і над поверхнею досліджуваної рідини створиться деяке розрідження. Манометр 4 вимірює різницю між атмосферним тиском і тиском, який створюється над поверхнею рідини в посудині 5. Ця різниця тисків  $\Delta P$  приводить до виникнення на нижньому відтягнутому кінці трубки 2 повітряної бульбашки. При збільшенні  $\Delta P$  ця бульбашка поступово збільшується, але радіус  $R$  кривизни спочатку зменшується (бо ж він був дуже великий, коли бульбашка тільки з'явилася). Різниця тисків  $\Delta P$ , що зростає, урівноважується тиском, обумовленим поверхневим натягом викривленої поверхні рідини на отворі трубки 2,

$$\Delta P = 2\alpha_1/R, \quad (6.16)$$

де  $R$  – радіус кривизни бульбашки;  $\alpha$  – коефіцієнт поверхневого натягу рідини. Права частина (6.16) записана згідно з рівнянням Лапласа для сферичної поверхні рідини.

Зменшення радіуса бульбашки відбувається доти, доки він не стане рівним радіусу отвору трубки 2. Подальше зменшення радіусу бульбашки неможливе. Тому максимальний тиск, обумовлений поверхневим натягом

$$\Delta P_{\max} = 2\alpha/r = \rho g \Delta h_{\max} = \rho g H, \quad (6.17)$$

де  $\rho$  – густина рідини в манометрі;  $H$  – різниця рівнів у колінах манометра.

При подальшому витіканні води з аспіраатора тиск у системі зменшується і відрізняється від атмосферного тиску на більшу величину, ніж  $\Delta P_{\max}$ . При цьому радіус бульбашки трохи зростає, величина  $2\alpha/r$  стає меншою, ніж  $\Delta P_{\max}$ . Далі бульбашка проривається, повітря з трубки через рідину попадає в посудину  $B$ , тиск у ній зростає, а різниця тисків зменшується. Вода з аспіраатора продовжує витікати, різниця тисків  $\Delta P$  знову збільшується, на кінці трубки 2 утворюється нова бульбашка, і весь процес повторюється.

Розрахунок коефіцієнта поверхневого натягу проводиться за формулою (6.17). Через те, що отвір трубки не являє собою кола,  $r$  краще розглядати як параметр приладу, що підлягає експериментальному визначенню. Тоді з (6.17) випливає

$$\alpha = A H. \quad (6.18)$$

Для визначення  $A$  треба провести дослід з рідиною, поверхневий натяг  $\alpha_0$  якої відомий, наприклад з дистильованою водою. Очевидно, для сферичної поверхні рідини:

$$A = \alpha_0 / H_0, \quad (6.19)$$

де  $H_0$  - максимальна різниця тисків, визначена по манометру при вимірюваннях з еталонною рідиною. Визначивши сталу приладу  $A$ , знаходять коефіцієнт поверхневого натягу досліджуваної рідини за формулою (6.18).

### Порядок роботи

1. Відкривши пробку (рис.6.17) аспіраатора 3, налити в нього воду, а посуд 5 заповнити приблизно до половини дистильованою водою. Закривши пробку, відкрити кран аспіраатора так, щоб після пониження тиску в системі повітряні бульбашки рідко відривалися від трубки 2. Виміри тиску по манометру 4 виконувати тоді, коли різниця рівнів у манометрі досягне максимального значення, тобто перед тим, як повітряна бульбашка на отворі трубки 2 прорветься. Записати дані 10 вимірів величини  $H_0$ . Визначити температуру в посудині 5 по термометру 6. З таблиць знайти коефіцієнт поверхневого натягу води при даній температурі. За цими даними визначити сталу приладу  $A$ .

2. Наповнити посуд 5 досліджуваною рідиною (приблизно до половини), так щоб кінець трубки 2 дотикався до її поверхні. Занурити посудину 5 в посудину, через яку протікає вода від термостату, температура якої може бути встановлена на будь-якому рівні до 100°C (верхній отвір трубки 2 повинен бути у повітрі). Виключити термостат. За допомогою головки регулюючого термометра термостата встановити температуру на декілька градусів вище кімнатної. Приблизно через 5 хвилин, коли ця температура встановиться, провести вимірювання. Знову відрегулювати термостат на нову температуру, більшу за попе-

редню, і через 5 хвилин виконати виміри  $H$  для цієї нової температури. Дослід повторювати доти, доки температура не досягне 70-80°C.

3. Розрахувати значення коефіцієнта поверхневого натягу досліджуваної рідини за даними всіх вимірювань. Результати занести в таблицю й побудувати на їх основі графік залежності  $\alpha=f(t)$ . Якщо з таблиць відома залежність досліджуваної рідини від температури, порівняти результати розрахунків з табличними даними. Розрахувати похибку визначення  $H_0$  за формулою (6.20)

$$\Delta S(H_0) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta H_{0_i}^2}{n(n-1)}} \quad (6.20)$$

Таблиця 6.3. Результати дослідів

$N$ з/ $n$	$\alpha_{\text{в}}$	$H_0$	$\Delta H_0$	$A$	$\Delta A/A$	$t$ °C	$H$	$\alpha(t)$	$\Delta\alpha/\alpha$
1									
2									
...									
10									
Середнє									

Рекомендується розрахувати аналітичним методом (мінімізація середньоквадратичного відхилення) параметри найкращої прямої, якою апроксимується експериментальна залежність  $\alpha(t)$  (бажано з використанням ЕОМ).

### Контрольні запитання

1. Яка природа поверхневого натягу?
2. Вивести формулу Лапласа.
3. Розглянути термодинаміку поверхневого натягу і пояснити його залежність від температури.
4. Якій умові повинна відповідати найкраща пряма, що відповідає експериментальній й залежності.
5. Як треба вибирати масштаби при будівництві графічної залежності?

### 6.3.5 Лабораторна робота №31. Вивчення моделі ближнього порядку рідини за допомогою функції радіального розподілу атомів

Прилади та приладдя: прилад з кульками, лінійка, комп'ютер.

### Теоретичні відомості

Розглянемо, що являє собою функція радіального розподілу атомів на прикладі двовимірної решітки, яка зображена на рис. 6.18. Виберемо довільний

атом  $A$  (вузол решітки) за центр координатної системи. На найближчій відстані до нього розташовані  $n_1=4$  атоми. Найменша відстань між атомами визначається їх ефективними розмірами і особливостями взаємодії.

Проведемо коло радіусом  $r_1$ , навколо атома  $A$ . Це коло називається координаційним, а число атомів  $n_1$ , на даній відстані  $r_1$  від центрального атома – координаційним числом.

Аналогічно можна визначити число атомів  $n_2$  на відстані  $r_2$ , наступній за найближчою, і провести координаційне коло радіусом  $r_2$  (у нашому випадку  $n_2$  також дорівнює чотирьом).

Якщо продовжити цей процес систематизації розміщення атомів у решітці, то одержимо серію координаційних кіл, що охоплюють всю сукупність атомів. Кожна структура характеризується своїм специфічним положенням координаційних кіл,  $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_v)$  і відповідними значеннями координаційних чисел  $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_v)$ . Розміщення атомів даної структури відносно центрального (довільно вибраного атома) представляють у вигляді залежності координаційних чисел від міжатомних відстаней  $r_i$ . Для двовимірної решітки така залежність показана на рис. 6.19. Ця залежність дискретна.

Описану схему використовують і для характеристики розміщення атомів у тривимірній решітці. Причому в тривимірній структурі роль координаційного кола відіграє координаційна сфера. У таблиці 1 приведені значення координаційних чисел для перших шести координаційних сфер найбільш розповсюджених кристалічних структур: об'ємноцентрованої кубічної (ОЦК), гранецентрованої кубічної (ГЦК), і гексагональної щільноупакованої (ГЩУ).

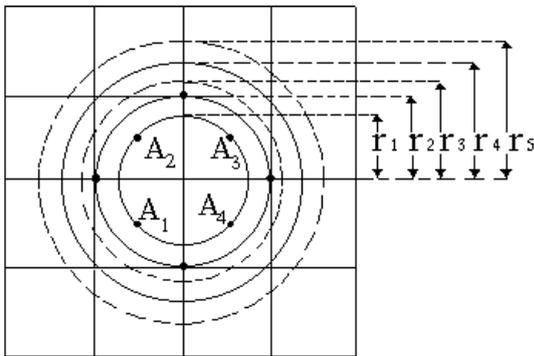


Рис. 6.18. Координаційні «сфери» двовимірної квадратної кристалічної решітки,  $a$  – період решітки

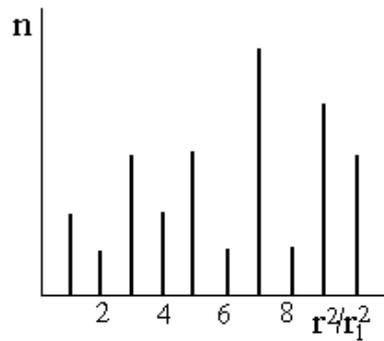


Рис. 6.19. Розподіл атомів за координаційними «сферами» двовимірної решітки

Таблиця 6.4. Значення координаційних чисел для перших шести координаційних сфер найбільш розповсюджених кристалічних структур

Тип структури	Номер координаційної сфери

	1	2	3	4	5	6
ОЦК	8	6	12	24	8	6
ГЦК	12	6	24	12	24	8
ГЦУ	12	6	2	18	12	16

На відміну від твердих тіл (кристалів) атоми в рідинах, аморфних тілах розмішуються неупорядковано і не на чітко визначених відстанях один від одного, але і не зовсім рівномірно, як у газах. На невеликій відстані від даного атома існує так званий близький порядок у розміщенні атомів, який характеризує особливості відхилення координаційного числа від середнього значення, що відповідає рівномірному розподілу атомів. Відхилення обумовлені скінченними розмірами атомів та їх взаємодією. На великих відстанях у порівнянні з розмірами атомів відхилення координаційного числа від середнього значення практично відсутні.

У випадку рідин та аморфних твердих тіл розглядають число атомів не на поверхні точно визначених сфер, а у сферичних прошарках. Якщо провести навколо даного атома дві сфери з радіусами  $r$  та  $r+\Delta r$ , то об'єм сферичного прошарку буде дорівнювати  $4\pi r^2\Delta r$ . Визначимо радіальну густину молекул через кількість молекул у сферичному шарі:

$$\rho(r) = \frac{n_r}{4\pi r^2\Delta r}, \quad (6.21)$$

тобто це середня кількість молекул в одиниці об'єму цього шару. Позначимо через  $r_0$  середню густину молекул. Рентгенівські дослідження показують, що зі зростанням відстані  $r$  густина  $r(r)$  наближається до  $r_0$ , а в разі малих відстаней  $r(r)$  може бути або більше, або менше ніж  $r_0$ .

Радіальною, або парною функцією розподілу  $g(r)$  називають відношення

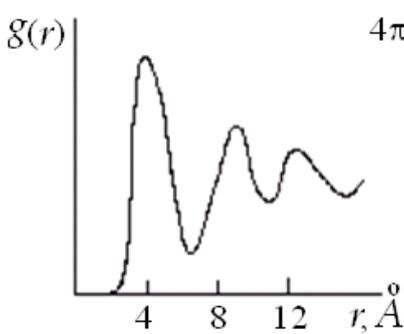
$$g(r) = r(r)/r_0. \quad (6.22)$$


Рис. 6.20. Парна функція розподілу атомів

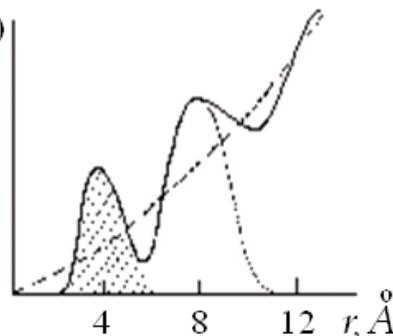


Рис. 6.21. Функція радіального розподілу атомів

Воно характеризує кореляції взаємного розташування молекул у просторі (відхилення від хаотичного розміщення). На рис. 6.20 графічно зображена функція  $g(r)$  для рідкого натрію, одержана на основі рентгенівського дослідження. Як бачимо, ця функція зростає зі збільшенням  $r$  від значення  $g(r)=0$  на малих відстанях (сусідній атом не може влізти в середину того, що розглядається), а потім змінюється так, що стає то більшою, то меншою за одиницю. Однак чим більша відстань від атома, який береться за початковий, тим менші відхилення значень функції  $g(r)$  від одиниці. Для рівномірного розподілу атомів  $g(r) = 1$  для всіх  $r$ .

Зазначимо, що з графіком радіального розміщення в ідеальному кристалі краще порівнювати графік так званої функції атомного розподілу  $4\pi r^2\rho(r)$ , якісний вигляд якого відтворено на рис. 6.21. Добуток  $4\pi r^2\rho(r)dr$  визначає число атомів у сферичному шарі, утвореному сферами з радіусами  $r$  і  $r+dr$ . Тому площі під піками графіка визначають кількості атомів у відповідних координаційних сферах (на рис. 6.21 заштрихована площа під першим піком). Однак вирішення того, як розділити між піками площу їх перетину, є досить складною проблемою. Тому з достатньою точністю можна визначити кількість атомів тільки для перших двох координаційних сфер. Пунктирна крива на рис. 6.21 відповідає функції  $4\pi r^2\rho_0$ .

У двовимірному випадку атомну густину в прошарку  $\Delta r$  (кільце) на відстані  $r$  від вибраного атома можна записати як відношення

$$\rho(r) = \frac{\Delta N(r, \Delta r)}{2\pi r \Delta r},$$

де  $\Delta N(r, \Delta r)$  – кількість атомів або молекул, центри яких знаходяться у кільці площею  $2\pi r \Delta r$ . Середню густину  $\rho_0$  для описаної нижче моделі із  $n_{\text{кул}}$  скляних кульок коробці (дискова) слушно знайти як відношення їх загальної кількості молекул до площі розглянутого двовимірного об'єму.

### Опис приладу та способу розрахунків

У роботі вивчається неупорядковане розміщення молекул у двовимірній рідині (аморфному тілі) на моделі. Модель побудована так. В об'ємі у формі циліндра розміщується  $N$  кульок однакового діаметра одним шаром, причому частина простору залишається незайнятою. Циліндр зверху закритий пластинкою зі скла чи плексигласу на відстані від дна, трохи більший від діаметра кульок. Дно, прозора пластинка і кульки виготовлені з матеріалів великої твердості, щоб взаємодію кульок між собою і матеріалом циліндра можна було вважати пружною. Якщо ці вимоги виконуються, то розміщення кульок у моделі буде відповідати розміщенню не взаємодіючих молекул. Така будова моделі дозволяє стверджувати, що всі кульки є еквівалентними. Тому, якщо зробити декілька кульок міченими і поворотами та нахилами змінювати розміщення кульок в моделі, то частота появи мічених кульок на відстані  $r_i$ , буде відповідати

ймовірності даної міжатомної відстані, що дозволить розрахувати функцію  $g(r)$  (6.22).

Позначимо кількість дослідів через  $p$ , кількість вимірювань в одній послідовності через  $q$ , число інтервалів міжатомних відстаней через  $m$  (інтервали  $\Delta r$  порядку радіуса кульок). Повне число вимірювань  $N=pq$ ; ймовірність кожного інтервалу  $p_i=1/m$  для всіх  $i$ ; ймовірність попадання результату вимірювання в цей інтервал  $g(i)$ ; кількість вимірів з відстанями між кільками, що попадають в інтервал від  $r_i$  до  $r_i + \Delta r$ , дорівнюватиме  $n(r_i) = N p_i g(i)$ . Звідси одержимо:

$$g(r_i) = g(i) = n(r_i)/(N p_i) = m n(r_i)/N. \quad (6.23)$$

У наших приладах розміщено 4 кольорові (мічені) кульки. Тому в одному досліді можна виміряти 6 відстаней між ними. Рекомендується зробити 50 дослідів. Тоді  $N=50 \cdot 6=300$ .

У роботі необхідно шляхом вимірювань знайти величини  $n(r_i)$ , обчислити значення функції  $g(r_i)$ , накреслити графік залежностей  $g(r)$  та функції  $W(r_i)=2\pi r g_0 g(r)$  від  $r$  та обчислити значення координатних чисел для перших двох-трьох координатних "сфер" (кілець).

### Порядок роботи

До початку експерименту накреслити таблицю, вертикальні графі якої – це частота появи кульок на даній відстані і від центральної кульки. Відстані розбити на інтервали шириною  $\Delta r = 0,5$  см, діаметр кульок дорівнює 1 см. Перший інтервал, закінчується на відстані 0,5 см. Далі ідуть інтервали  $0,5 \pm 0,5$  см;  $1 \pm 0,5$  см;  $1,5 \pm 0,5$  см  $13,5 \pm 0,5$  см. Всього 28 інтервалів, тому  $p_i=1/28$ . Радіус циліндричної моделі з кульками дорівнює  $R$  (вимірюється); середня щільність для моделі  $g_0 = n_{\text{кул}}/\pi R^2$ , де  $n_{\text{кул}}$  – число кульок у моделі.

Після кожного перемішування кульок виміряти 6 відстаней між чотирма міченими кульками. Кожну відстань вимірювати три рази і середнє значення відмітити у відповідній графі рискую. Після завершення експерименту обчислити значення  $n(r_i)$ ,  $g(r_i)$  (за формулою (6.23)), а також значення функції атомного розподілу  $W(r_i)$ , яка у випадку двовимірної моделі дорівнює  $2\pi r g_0 g(r)$ . Всі обчислені величини  $n(r_i)$ ,  $g(r_i)$ , і  $W(r_i)$  занести у відповідні графі табл. 6.3.5.2. Одержані значення функції  $g(r_i)$ , і  $W(r_i)$  використати для побудови графіка відповідних залежностей. При цьому кожне значення  $g(r_i)$  або  $W(r_i)$ , що відповідав інтервалу  $i$ ,  $i+0.5$  см, відкладати посередині цих інтервалів, тобто в точках  $0.25 \dots 1.25$ ;  $1.75$ ;  $\dots 13.75$  (для перших інтервалів з  $r_i < 2$ ,  $n(r_i)=0$ ).

Графік накреслити в довільному масштабі. Після побудови графіка визначити кількість атомів, що приходиться на  $1 \text{ см}^2$  площі даного масштабу.

Таблиця 6.5. Обчислені величини  $n(r_i)$ ,  $g(r_i)$ , і  $W(r_i)$

$r_i$ ,	1,	2	2,	3	3,	4	4,	5	5,	6	6,	7	7,	8	8,	9	9,	.	1	13,
---------	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	-----

см	5		5		5		5		5		5		5		5	.	3	5
$n(r_i)$																.		
$g(r_i)$																.		
$W(r_i)$																.		
$\rho_0$																		

### Порядок роботи у випадку комп'ютерного варіанту

У комп'ютерному варіанті використовується модель густого газу з твердих дисків, при зближенні яких відбуваються пружні удари. Розміри частинок  $3 \cdot 10^{-10}$  м, такі як у молекул, а їх швидкості відповідні до температури.

Визначення  $g(r)$  для комп'ютерної моделі виконується за даними значень відстаней між атомами. Якщо загальне число відстаней, що відповідають розглядуваним інтервалам по відстані (28 інтервалів шириною  $0,5 \text{ \AA}$  в межах кола радіусом  $14 \text{ \AA}$ ) дорівнює  $N$ , то на один інтервал у середньому припало б  $n_i = N/28$  значень. Але дійсні числа  $\Delta N_i$  різні для різних інтервалів. Відношення  $\Delta N_i/N$  характеризують ймовірності певних відстаней між атомами. Вони дорівнюють відношенню числа атомів у даному прошарку  $2\pi r_i \Delta r \rho_0 g(r_i)$  до загального числа атомів у розглянутому двовимірному об'ємі –  $\pi R^2 \rho_0$  ( $R = 14 \text{ \AA}$ ):

$$\Delta N_i/N = (2\pi r_i \Delta r \rho_0 g(r_i)) / (\pi R^2 \rho_0).$$

Звідси знаходимо:

$$g(r_i) = (\Delta N_i/N) R^2 / (2r_i \Delta r). \quad (6.24)$$

Після запуску файлу  $g(r).exe$  (програма  $G(r)$ ) буде запрошення ввести ширину колонок гістограми, температури, молярної маси газу. Потім з'явиться картина, що відображає рух молекул. А потім машина прорахує всі значення  $n(r_i)$  і загальну кількість вимірів відстаней між молекулами в межах круга радіусом  $14 \text{ \AA}$  (28 інтервалів по  $0,5 \text{ \AA}$ ). За натисненням клавіші «пробіл» відключається графічний режим і з'являються записи названих величин. Їх слід переписати й виконати завдання, перелічені в попередньому пункті. Функція  $g(r)$ , розрахована за формулою (6.24), нормована – за великих  $r$  вона наблизатиметься до 1.

## Аналіз результатів

Згідно з вище зазначеним (пояснення до рис. 6.21), перше та друге коорди

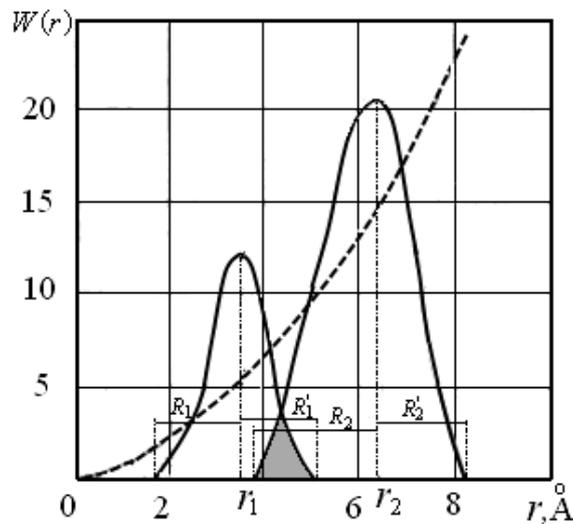


Рис. 6.22. Графік функції атомного розподілу

наційні числа ( $Z_1$  та  $Z_2$ ) дорівнюють площі під першим та другим піком функції атомного розподілу (рис. 6.22). Площу під піками можна визначити двома способами, перший а них проілюстрований на рис. 6.22 – праву сторону першого піку добудовують симетрично лівій. Після визначення лівої сторони другого піку (так, щоб сумарна ордината відповідала графіку) праву сторону його роблять такою ж, як і ліву.

У другому методі кожний пік від наступного відділяється лінією, паралельною осі ординат. Лінії проводять униз від точок, що відповідають мінімуму функції  $W(r_i)$  між відповідними двома піками.

### Контрольні запитання

1. Які особливості руху молекул в речовинах, що знаходяться в різних агрегатних станах?
2. Що спільне і чим відрізняється атомна будова кристалів і рідин?
3. Дати визначення радіальної щільності, парної радіальної функції розподілу і функції атомного розподілу.

### Список рекомендованої літератури

1. Венгренівіч Р.Д., Стасик М.О. Фізика. Підручник для студ. вищ. навч. закл. – Чернівці.: Друк Арт., 2017. -736 с.
2. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. / Кармазін В.В., Семенець В.В.-К.: Кондор, 2016.-786 с.

3. Загальна фізика. Практичні завдання навч.-метод. посіб./ А.О.Мамалуй, М.В.Лебедева, В.В.Пилипенко та ін.; за заг. ред. А.О.Мамалуй –Х.: Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2014. –296 с.
4. Фізика: навчальний посібник / Є. М. Борисов, А. Б. Кулик, А. Л. Лапшин, В. М. Максименко. - Київ : КНЕУ, 2011. - 589 с.
5. Башев В.Ф., Кушнерьов О.І., Рябцев С.І., Куцева Н.О. Навчальний посібник до вивчення дисципліни «Фізичний практикум» –Д.:РВВ ДНУ. –2018, 64 с.
6. Палехін В.П. Курс фізики : підручник / В. П. Палехін. - Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. - 516 с.
7. Соколович Ю. А., Богданова Г. С. Фізика: Навчально-практичний довідник. – Х.: Ранок, 2010. -385 с.
8. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики: у 3 кн., К.: 2003. – 278 с.
9. Кучерук І.М. Загальний курс фізики: У 3 т.: Навч. посіб. для студ. вищ. техн. і пед. закл. освіти/ І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; за ред. І.М. Кучерука. - К.: Техніка, 2001. - 452 с.
10. Фізика: навчальний посібник/ Є. М. Борисов, А. Б. Кулик, А. Л. Лапшин, В. М. Максименко. - Київ : КНЕУ, 2011. - 589 с.
11. Рябцев С.І., Башев В.Ф., Кушнерьов О. І. Навчально-методичне видання. Практикум з дисципліни “Молекулярна фізика”/ уклад.: С.І. Рябцев, В.Ф. Башев, О. І. Кушнерьов. Навчальне видання. – Дніпро: ДНУ, 2024.— 44 с.  
[http://repository.dnu.dp.ua:1100/?page=inner\\_material&id=16976](http://repository.dnu.dp.ua:1100/?page=inner_material&id=16976)
12. Serway R.A., Jewett J.W. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics. 9th ed. Boston: Cengage Learning, 2018. 1484 p.
13. Irodov I. E. Problems In General Physics. Meerut: Arihant Publications India limited, 2020. 402 p.

## Зміст

ПЕРЕДМОВА.....	3
ЧАСТИНА I. МЕХАНІКА .....	3
1 ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ. КІНЕМАТИКА.....	3
1.1 Теоретичні відомості.....	3
1.1.1 Опис руху матеріальної точки .....	3
1.1.2 Швидкість і прискорення у разі криволінійного руху .....	6
1.1.3 Кінематика обертального руху .....	7
1.1.4 Вимірювання фізичних величин.....	8
1.1.5 Елементи теорії похибок.....	9
1.1.6 Обробка результатів вимірювань .....	10
1.1.7 Порядок обробки результатів вимірювань.....	13
1.1.8 Вимірювання геометричних розмірів.....	16
1.2 Перелік контрольних питань .....	18
1.3. Лабораторні роботи.....	18
1.3.1 Лабораторна робота 1. Визначення геометричних розмірів тіл. Ноніус ....	18
2 ДИНАМІКА. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ.....	19

2.1 Теоретичні відомості.....	19
2.1.1 Перший закон Ньютона. Принцип відносності Галілея.....	19
2.1.2 Другий і третій закони механіки. Закон збереження імпульсу.....	20
2.1.3 Рух тіл зі змінною масою. Рівняння Мещерського .....	22
2.1.4 Сили пружних деформацій .....	23
2.1.5 Деформація розтягу.....	23
2.1.6 Деформація стиску .....	24
2.1.7 Деформація зсуву .....	25
2.1.8 Деформація кручення.....	25
2.1.9 Механічні властивості твердих тіл .....	25
2.1.10 Сили тертя.....	27
2.1.11 Сили опору. В'язкість .....	30
2.1.12 Закони Кеплера. Закон всесвітнього тяжіння. ....	31
2.1.13 Неінерціальні системи відліку і сили інерції. Кориолісова сила. ....	32
2.1.14 Робота, потужність, енергія. Закон збереження енергії .....	34
2.1.15 Рух системи матеріальних точок. Закон руху центра мас.....	36
2.1.16 Поступальний і обертальний рух твердого тіла. Момент сили .....	36
2.1.17 Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції.....	37
2.1.18 Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу .....	38
2.1.19 Кінетична енергія обертального руху тіла .....	38
2.1.20 Теорема Штейнера. Вільні осі обертання .....	39
2.1.21 Момент інерції твердого тіла. Маятники Максвелла й Обербека .....	40
2.1.22 Теорія гіроскопічних явищ. Гіроскопічний ефект і його застосування ...	42
2.1.23 Закон Паскаля. Сила Архімеда .....	45
2.1.24 Стаціонарний потік рідин і газів. Рівняння Бернуллі .....	46
2.1.25 В'язкість рідини. Ламінарний і турбулентний потоки .....	47
2.2. Перелік контрольних питань .....	48
2.3. Лабораторні роботи.....	49
2.3.1 Лабораторна робота 2. Визначення коефіцієнтів тертя спокою, ковзання і кочення .....	49
2.3.2 Лабораторна робота 3. Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом падаючої кульки .....	50
2.3.3 Лабораторна робота 4. Визначення модуля Юнга методом згину .....	51
2.3.4 Лабораторна робота 5 Визначення модуля Юнга за методом Лермантова	52
2.3.5 Лабораторна робота 6. Визначення модуля зсуву за коливаннями крутильного маятника.....	53
2.3.6 Лабораторна робота 7 Визначення моменту інерції динамічним методом	55
2.3.7 Лабораторна робота 8. Визначення моменту інерції махового колеса методом коливань .....	56
2.3.8 Лабораторна робота 9. Вивчення плоского руху твердого тіла за допомогою маятника Максвелла .....	58
2.3.9 Лабораторна робота 10. Перевірка основного закону обертального руху за допомогою маятника Обербека .....	59
2.3.10 Лабораторна робота 11. Вивчення властивостей гіроскопа .....	62

3 КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ .....	63
3.1 Теоретичні відомості.....	63
3.1.1 Гармонічний коливальний рух .....	63
3.1.2 Математичний маятник.....	65
3.1.3 Фізичний маятник .....	66
3.1.4 Енергія коливального руху .....	68
3.1.5 Додавання коливань однакового напрямку. Биття.....	68
3.1.6 Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	70
3.1.7 Згасання коливань. Декремент згасання. Автоколивання.....	71
3.1.8 Вимушені коливання. Резонанс .....	73
3.1.9 Хвилі. Рівняння хвилі.....	74
3.1.10 Енергія хвилі. Вектор Умова .....	75
3.1.11 Інтерференція хвиль .....	76
3.2. Перелік контрольних питань .....	77
3.3. Лабораторні роботи.....	78
3.3.1 Лабораторна робота 12. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.....	78
3.3.2 Лабораторна робота 13. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника .....	78
3.3.3 Лабораторна робота 14. Визначення декременту згасання пружних коливань.....	79
3.3.4 Лабораторна робота 15. Визначення швидкості звуку в повітрі методом додавання взаємно перпендикулярних звукових коливань .....	80
3.3.5 Лабораторна робота 16. Визначення фазової швидкості поширення коливань методом стоячих хвиль.....	84
ЧАСТИНА II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА.....	86
4 ВЛАСТИВОСТІ ГАЗІВ. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОГО МЕТОДУ .....	86
4.1 Теоретичні відомості.....	86
4.1.1 Експериментальні закони ідеального газу. Об'єднаний газовий закон, формула Клапейрона. Універсальна газова стала. Стала Больцмана.....	86
4.1.2 Барометрична формула .....	90
4.1.3 Основне рівняння кінетичної теорії газів .....	91
4.1.4 Висновки з основного рівняння кінетичної теорії газів .....	92
4.1.5 Розподіл Максвелла по швидкостях.....	93
4.1.6 Поняття про флуктуації .....	95
4.1.7 Довжина вільного пробігу молекули.....	95
4.1.8 Явища переносу. Стаціонарна теплопровідність.....	96
4.1.9 Обчислення коефіцієнта теплопровідності газів .....	97
4.1.10 Внутрішнє тертя в газах .....	99
4.1.11 Молекулярна теорія дифузії в газах .....	101
4.2. Перелік контрольних питань .....	102
4.3 Лабораторні роботи.....	103

4.3.1 Лабораторна робота №17. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя, середньої довжини вільного пробігу та ефективного (газокінетичного) діаметра молекул методом протікання через капіляр .....	103
4.3.2 Лабораторна робота №18. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом затухаючих коливань .....	106
4.3.3 Лабораторна робота №19. Визначення коефіцієнта теплопровідності повітря .....	108
4.3.4 Лабораторна робота №20. Визначення розподілу Гауса .....	111
4.3.5 Лабораторна робота №21. Визначення коефіцієнта дифузії методом .....	115
5 ТЕРМОДИНАМІКА .....	120
5.1 Теоретичні відомості .....	120
5.1.1 Розподіл енергії молекул ідеального газу за ступенями вільності .....	120
5.1.2 Теплоємність газів .....	122
5.1.3 Внутрішня енергія як функція стану. Робота розширення газу при ізопроцесах .....	124
5.1.4 Перше начало термодинаміки .....	125
5.1.5 Адіабатичний процес .....	126
5.1.6 Основні поняття, якими користується термодинаміка .....	127
5.1.7 Цикл Карно .....	129
5.1.8 Друге начало термодинаміки .....	131
5.1.9 Поняття про ентропію .....	132
5.1.10 Приклади обчислення ентропії .....	133
5.1.11 Вираз другого начала термодинаміки для необоротних процесів .....	134
5.1.12 Статистичне тлумачення другого начала термодинаміки .....	135
5.1.13 Зв'язок між ентропією і термодинамічною імовірністю .....	137
5.2. Перелік контрольних питань .....	138
5.3 Лабораторні роботи .....	138
5.3.1 Лабораторна робота №22. Визначення відношення теплоємностей газів методом Клемана і Дезорма .....	138
5.3.2 Лабораторна робота №23. Визначення відношення питомих теплоємностей $C_p/C_v$ газів за швидкістю звуку методом стоячих хвиль .....	142
5.3.3 Лабораторна робота №24. Вивчення питомої теплоємності рідини методом спостереження швидкості охолодження (нагрівання) .....	145
5.3.4 Лабораторна робота № 25. Визначення теплоємності металів методом охолодження .....	148
5.3.5 Лабораторна робота №26. Визначення теплоємності рідини подвійним калориметром .....	150
6 РЕАЛЬНІ ГАЗИ. ФАЗОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РЕЧОВИНИ .....	152
6.1 Теоретичні відомості .....	152
6.1.1 Реальний газ. Рівняння Ван дер Ваальса .....	152
6.1.2 Застосування рівняння Ван дер Ваальса для опису фазового переходу рідина-пара .....	154
6.1.3 В'язкість рідин. Поверхневий натяг. Формула Лапласа .....	155
6.1.4 Плавлення та кристалізація. Переохолодження рідин .....	156

6.1.5 Випаровування і рівновага між парою, рідиною і твердим тілом .....	157
6.1.6 Тверді тіла. Просторові решітки. Індокси Міллера .....	158
6.1.7 Дефекти кристалів .....	162
6.2. Перелік контрольних питань .....	163
6.3 Лабораторні роботи.....	164
6.3.1 Лабораторна робота №27. Вивчення кристалізації гіпосульфїту .....	164
6.3.2 Лабораторна робота №28. Визначення вологості повітря .....	166
6.3.3 Лабораторна робота №29. Визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини.....	171
6.3.4 Лабораторна робота №30. Вивчення температурної залежності коефіцієнта поверхневого натягу рідини .....	173
6.3.5 Лабораторна робота №31. Вивчення моделі ближнього порядку рідини за допомогою функції радіального розподілу атомів .....	175
Список рекомендованої літератури .....	181